十三五

“十三五”独立本科院校大学数学系列规划教材

微积分（I）

Calculus（I）

南京大学金陵学院

张玉莲 陈仲 ◎ 编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

微积分（Ⅰ）

张玉莲　陈　仲　编著

东南大学出版社
·南京·

内 容 提 要

本书是普通高校“独立学院”本科理工类专业微积分(或高等数学)课程的教材. 全书有两册，其中《微积分(Ⅰ)》包含极限与连续、导数与微分、不定积分与定积分、空间解析几何等四章，《微积分(Ⅱ)》包含多元函数微分学、二重积分与三重积分、曲线积分与曲面积分、数项级数与幂级数、微分方程等五章.

本书在深度和广度上符合教育部审定的“高等院校非数学专业高等数学课程教学基本要求”，并参照教育部考试中心颁发的《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》中数学一与数学二的知识范围，编写的立足点是基础与应用并重，注重数学的思想和方法，注重几何背景和实际意义，并适当地渗透现代数学思想及对部分内容进行更新与优化，适合独立学院培养高素质的具有创新精神的应用型人才的目标.

本书结构严谨，难易适度，语言简洁，既可作为独立学院等高校本科理工科学生学习微积分课程的教材，也可作为科技工作者自学微积分的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分. Ⅰ / 张玉莲，陈仲编著. — 南京 : 东南大学出版社，2018. 6

ISBN 978 - 7 - 5641 - 7784 - 3

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①张… ②陈… Ⅲ. ①微积分—高等学校—教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 111113 号

微积分(Ⅰ)

出版发行	东南大学出版社
社　　址	南京市四牌楼 2 号(邮编:210096)
出 版 人	江建中
责任编辑	吉雄飞(联系电话:025 - 83793169)
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	南京京新印刷厂
开　　本	700mm×1000mm　1/16
印　　张	18. 5
字　　数	363 千字
版　　次	2018 年 6 月第 1 版
印　　次	2018 年 6 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN　978 - 7 - 5641 - 7784 - 3
定　　价	40. 00 元

本社图书若有印装质量问题，请直接与营销部联系，电话:025 - 83791830。

前　言

著名的德国数学家高斯曾说:“数学是科学的皇后”.人类的实践也已证明数学是所有科学的共同“语言”,是学习所有自然科学的“钥匙”,而数学素养更是成为衡量一个国家科技水平的重要标志.独立学院理工类微积分课程是培养高素质应用型人才的重要的必修课,我们编写该课程教材的立足点是基础与应用并重,以提高学生数学素养为根本目标.

在基础与应用并重的思想指导下,我们编写了微积分课程的教学大纲,设计了课时安排,教材编写与教学实践密切结合,并多次修改力求完善.在编写过程中,我们努力做到:

(1) 在深度和广度上符合教育部审定的“高等院校非数学专业高等数学课程教学基本要求”,并参照教育部考试中心颁发的《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》中数学一与数学二的知识范围.在独立学院中,有不少学生是因为高考发挥失常而没有考上理想的高校,进入独立学院后他们发奋努力,立志考研.我们编写教材时,在广度上尽可能达到考研的知识范围.

(2) 注重数学的思想和方法,适当地渗透现代数学思想,并运用部分近代数学的术语与符号,以求符合独立学院培养高素质的具有创新精神的应用型人才的目标.教材除了使学生获得微积分的基本概念、基本理论和基本方法外,还要让学生受到一定的科学训练,学到数学思想方法,为其学习后继课程提供必要的数学基础,并为其毕业后胜任工作或继续深造积累潜在的能力.

(3) 通过教学研究,将一些经典定理、公式的结论或证明加以更新与优化.如此,既改革了教学内容,又丰富了微积分学的内涵.

(4) 对于基本概念和重要定理注重几何背景和实际意义的介绍;对重要的、比较难理解的命题尽量给出几何解释,让学生对微积分的内容能有较好的理解.

我们的目标是全书结构严谨,难易适度,语言简洁,既适合培养目标,又贴近教学实际,便于教与学.

本书分两册,其中《微积分(Ⅰ)》包含极限与连续、导数与微分、不定积分与定积分、空间解析几何等四章,《微积分(Ⅱ)》包含多元函数微分学、二重积分与三重积分、曲线积分与曲面积分、数项级数与幂级数、微分方程等五章.对数学要求较高的理工类专业,如电子、通信、电气、计算机等,本书可分两个学期讲授,第一学期

讲授《微积分(Ⅰ)》,第二学期讲授《微积分(Ⅱ)》;其他理工类专业,如土木、地质、环境、化工等,本书可与《线性代数》分两个学期讲授,第一学期讲授《微积分(Ⅰ)》,第二学期讲授《微积分(Ⅱ)》与《线性代数》的基本内容(如略去三重积分、曲线积分与曲面积分、基变换·坐标变换、二次型等).本书在附录部分提供了微积分课程的教学课时安排建议,供授课老师参考。

书中用 * 标出的部分为较难内容,供任课教师选用,一般留给学生课外自学.书中习题分 A,B 两组,A 组为基本要求,B 组为较高要求,每一章末还配有复习题,供学有余力的学生练习.书末附有习题答案与提示.

本书《微积分(Ⅰ)》由张玉莲、陈仲编著,陈仲写第 1,4 章,张玉莲写第 2,3 章;《微积分(Ⅱ)》由陈仲、王夕予、林小围编著,陈仲写第 5,6 章,王夕予写第 7,8 章,林小围写第 9 章.

感谢金陵学院教务处和基础教学部对编者的关心,感谢钱钟教授、王均义教授、黄卫华教授和王建民主任对编者的支持,感谢范克新、邓建平、袁明霞、马荣、章丽霞、魏云峰、邵宝刚等老师使用本书讲授微积分课程,并给编者提供宝贵的修改建议.感谢东南大学出版社吉雄飞编辑的认真负责和悉心编校,使本书质量大有提高.

书中不足与错误难免,敬请智者不吝赐教.

编　者

2018.2 于南京大学

目　　录

1　极限与连续

微积分学的主要内容是导数与积分，这两个概念都是某种形式的极限，因此极限是微积分学的基础，学好极限概念将有助于学好“微积分”这门课程.

1.1　预备知识

1.1.1　常用的逻辑符号与数学符号

(1) “$\forall$”表示“**任给**”，也表示“任取”、“对一切的”、“对于任意一个”等. 例如：“$\forall \varepsilon > 0$”表示“任给正数 ε”.

(2) “$\exists$”表示“**存在**”，也表示“存在某个”、“至少有一个”等. 例如：“$\exists \delta > 0$”表示“存在正数 δ”.

(3) “$\Rightarrow$”表示“**推出**”，也表示“使得”、“蕴含”等. 例如：“$A \Rightarrow B$”表示“如果命题 A 成立，可推出命题 B 成立”；“命题 A 是命题 B 的充分条件”；“命题 B 是命题 A 的必要条件”.

(4) “$\Leftrightarrow$”表示“**等价**”，也表示“充分必要”等. 例如：“$A \Leftrightarrow B$”表示“命题 A 等价于命题 B”；“命题 B 是命题 A 成立的充要条件”.

(5) “$\xlongequal{\text{def}}$”表示“**定义**”. 例如：“$A \xlongequal{\text{def}} B$”表示“命题 A 的定义是命题 B”；“用命题 B 来定义命题 A”.

(6) “max”表示“**最大**”. 例如：$\max\{1,2,3\} = 3$.

(7) “min”表示“**最小**”. 例如：$\min\{1,2,3\} = 1$.

(8) “$\sum\limits_{i=1}^{n}$”表示“**求和**”. 例如：$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

(9) “$\prod\limits_{i=1}^{n}$”表示“**求积**”. 例如：$\prod\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \cdots a_n$.

(10) “$\square$”表示“**证毕**”. 一个定理或命题证明完毕，尾部记 $\square$ 表示证毕.

正确运用上述逻辑符号与数学符号，可大大简化文字叙述，言简意赅.

1.1.2　集合

1) 集合的基本概念

我们将具有某种特定性质的一组事物的全体称为**集合**，记为 $A = \{x \mid x$ 具有

某种性质},或 $\mathscr{A}=\{f \mid f$ 具有某种性质}. 一集合中的每个个体称为该集合的**元素**. 若 a 是集合 A 的元素,记为 $a\in A$;若 a 不是集合 A 的元素,记为 $a\notin A$. 一般的,用 $A,B,C,D,\cdots$ 或花体字 $\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C},\mathscr{D},\cdots$ 表示集合,用 $a,b,c,\cdots$ 表示元素.

集合中的元素具有确定性、互异性、无序性.

只含有限多个元素的集合称为**有限集**,有限集常用列举法表示,如集合 A 有有限个元素 $a,b,c,\cdots,f$,则 $A=\{a,b,c,\cdots,f\}$;含有无限多个元素的集合称为**无限集**.

给定两个集合 A,B,若 $\forall a\in A\Rightarrow a\in B$,则称 A 是 B 的**子集**,记为 $A\subseteq B$. 若 $A\subseteq B$,且 $\exists b\in B$,使得 $b\notin A$,则称 A 是 B 的**真子集**,记为 $A\subset B$. 不含任何元素的集合称为**空集**,记为 $\varnothing$. 我们规定空集是任何集合的子集,即对任意集合 A,有 $\varnothing\subseteq A$. 例如 $A=\{0,1\}$ 时,A 的全部子集是 $\{0\},\{1\},\{0,1\},\varnothing$.

2) 集合的并、交、差运算

定义 1.1.1 设 A,B 是集合,则集合 A 与 B 的并、交、差分别定义为

$$A\cup B \xlongequal{\text{def}} \{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

$$A\cap B \xlongequal{\text{def}} \{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

$$A\backslash B \xlongequal{\text{def}} \{x \mid x\in A, \text{但 } x\notin B\}$$

关于集合的并、交、差,有下列性质(证明从略).

定理 1.1.1 设 A,B,C 是集合,则有

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A \qquad \textbf{(交换律)}$$

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\quad (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C) \qquad \textbf{(结合律)}$$

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),\quad (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C) \qquad \textbf{(分配律)}$$

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B} \qquad \textbf{(德·摩根①律)}$$

注 在研究集合与集合之间的关系时,常将具有某种性质的研究对象的全体称为**全集**,记为 Ω. 若 A 是 Ω 的子集,称 $\Omega\backslash A$ 为 A 的**补集**,记为 $\overline{A}$.

3) 常用的数集

自然数集 $\quad \mathbf{N} \xlongequal{\text{def}} \{x \mid x=0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$

正整数集 $\quad \mathbf{N}^{*} \xlongequal{\text{def}} \{x \mid x=1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$

整数集 $\quad \mathbf{Z} \xlongequal{\text{def}} \{x \mid x=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots,\pm n,\cdots\}$

①德·摩根(De Morgan),1806—1871,英国数学家.

有理数集 $\mathbf{Q} \xlongequal{\text{def}} \left\{x \middle| x=\dfrac{p}{q}, p\in \mathbf{Z}, q\in \mathbf{N}^*, \text{且 } p \text{ 与 } q \text{ 互素}\right\}$

有理数总可用有限小数或无限循环小数表示，我们将无限不循环小数称为**无理数**，有理数与无理数统称为**实数**，而全体实数的集合称为**实数集**，记为 $\mathbf{R}$. 实数在几何上用数轴上的点表示，数轴上的每一点表示一个实数.

有时，我们在表示数集的字母的右上角加上符号“ $*$ ”或“$+$”或“$-$”，表示该数集的某特定子集. 例如：

$$\mathbf{R}^* = \{x \mid x\in \mathbf{R}, x\neq 0\},\quad \mathbf{R}^+ = \{x \mid x\in \mathbf{R}, x>0\}$$

$$\mathbf{R}^- = \{x \mid x\in \mathbf{R}, x<0\}$$

下面是本书在空间解析几何和多元函数中常用的与实数集有关的几个集合：

二维平面　　$\mathbf{R}^2 \xlongequal{\text{def}} \{(x,y) \mid x\in \mathbf{R}, y\in \mathbf{R}\}$

三维空间　　$\mathbf{R}^3 \xlongequal{\text{def}} \{(x,y,z) \mid x\in \mathbf{R}, y\in \mathbf{R}, z\in \mathbf{R}\}$

***n* 维空间**　　$\mathbf{R}^n \xlongequal{\text{def}} \{(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n) \mid x_i\in \mathbf{R}, i=1,2,3,\cdots,n\}$

4) 邻域

定义 1.1.2(邻域)　设 $a,\delta\in \mathbf{R}$，且 $\delta>0$.

(1) $U_\delta(a) \xlongequal{\text{def}} \{x \mid |x-a|<\delta\}$，称 $U_\delta(a)$ 为**点 a 的 δ 邻域**，并称点 a 为**邻域的中心**，称 δ 为**邻域的半径**；

(2) $U_\delta^\circ(a) \xlongequal{\text{def}} \{x \mid x\in U_\delta(a), x\neq a\}$，称 $U_\delta^\circ(a)$ 为**点 a 的去心 δ 邻域**；

(3) $U_\delta^+(a) \xlongequal{\text{def}} \{x \mid x\in U_\delta(a), x>a\}$，称 $U_\delta^+(a)$ 为**点 a 的右 δ 邻域**；

(4) $U_\delta^-(a) \xlongequal{\text{def}} \{x \mid x\in U_\delta(a), x<a\}$，称 $U_\delta^-(a)$ 为**点 a 的左 δ 邻域**.

1.1.3　排列与组合

1) 排列

从 n 个不同元素中任取 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 个不同元素并按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的一个**排列**. 从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的所有排列的个数称为**排列数**，记为 P_n^m，且

$$P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

2) 组合

从 n 个不同元素中任取 $m(1\leqslant m\leqslant n)$ 个不同元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的一个**组合**. 从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的所有组合的个数称为**组合数**，记为 C_n^m，且

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

3) 排列与组合的重要性质

应用排列数与组合数的公式,容易证明下列重要性质(证明留给读者):

(1) $nP_n^n = P_{n+1}^{n+1} - P_n^n$;

(2) $P_1^1 + 2P_2^2 + 3P_3^3 + \cdots + nP_n^n = P_{n+1}^{n+1} - 1$;

(3) $C_n^m = C_n^{n-m}$;

(4) $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$.

1.1.4 数学归纳法

在微积分和现代数学的各学科中,数学归纳法是证明一个命题成立常用的数学方法,有时甚至是不可替代的方法.

在数学中,证明与所有正整数有关的命题 $P(n)$ 时常用数学归纳法. 数学归纳法分第一数学归纳法和第二数学归纳法. **第一数学归纳法**证明的步骤如下:

(1) 证明 $n=1$(或为其他某个正整数) 时命题成立,即 $P(1)$ 成立;

(2) 对任意正整数 $n(n \geqslant 2)$,假设 $P(n)$ 成立;

(3) 从(2) 中的假设出发,证明 $P(n+1)$ 一定成立,

则有结论:命题 $P(n)$ 对一切正整数成立.

第二数学归纳法证明的步骤如下:

(1) 证明 $n=1$(或为其他某个正整数) 时命题成立,即 $P(1)$ 成立;

(2) 对任意正整数 $n(n \geqslant 2)$,假设 $P(2),P(3),\cdots,P(n)$ 成立;

(3) 从(2) 中的假设出发,证明 $P(n+1)$ 一定成立,

则有结论:命题 $P(n)$ 对一切正整数成立.

例 1 证明**二项式定理**:设 $a,b \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}^*$,则

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

证 记 $C_n^0 = 1$,则上式可写为

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i \tag{1.1.1$_n$}$$

当 $n=1$ 时,左边 $=a+b$,右边 $=a+b$,所以式$(1.1.1)_1$ 成立. 归纳假设式$(1.1.1)_n$ 成立,则此式两边乘以$(a+b)$ 得

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)\sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n+1-i} b^i + \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^{i+1} \quad \text{(将第 2 式中 } i \text{ 改为 } j\text{)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n+1-i} b^i + \sum_{j=0}^{n} C_n^j a^{n-j} b^{j+1} \quad (\text{在第 2 式中令 } j+1=i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n+1-i} b^i + \sum_{i=1}^{n+1} C_n^{i-1} a^{n-i+1} b^i \\
&= a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} C_n^i a^{n+1-i} b^i + \sum_{i=1}^{n} C_n^{i-1} a^{n-i+1} b^i + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} (C_n^i + C_n^{i-1}) a^{n+1-i} b^i + b^{n+1} \\
&= a^{n+1} + \sum_{i=1}^{n} C_{n+1}^i a^{n+1-i} b^i + b^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i a^{n+1-i} b^i
\end{aligned}
$$

因此式$(1.1.1)_{n+1}$成立. 于是 $\forall n \in \mathbf{N}^*$,式$(1.1.1)_n$成立.

1.1.5 不等式

1) 有关绝对值的不等式

实数 a 的绝对值

$$
|a| \xlongequal{\text{def}} \begin{cases} a & (a \geqslant 0); \\ -a & (a < 0) \end{cases}
$$

且 $|a|$ 在几何上表示数轴上坐标为 a 的点到坐标原点的距离.

绝对值有下列不等式性质:

(1) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$;

(2) $|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$, $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$;

(3) $|x| \geqslant a \Leftrightarrow x \geqslant a$ 或 $x \leqslant -a$, $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ 或 $x < -a$;

(4) $||x| - |y|| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|$.

2) 三个常用的不等式

(1) **伯努利[①]不等式**:设实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n (n \in \mathbf{N}^*)$ 皆大于 -1,且符号相同,则

$$
(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n \qquad (1.1.2)_n
$$

证 当 $n=1$ 时,显然式$(1.1.2)_1$取等号成立. 归纳假设式$(1.1.2)_n$成立,又因 $1+x_{n+1}>0$, 则

$$
\begin{aligned}
&(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)(1+x_{n+1}) \\
&\geqslant (1+x_1+x_2+\cdots+x_n)(1+x_{n+1}) \\
&= (1+x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}) + (x_1x_{n+1}+x_2x_{n+1}+\cdots+x_nx_{n+1}) \\
&\geqslant 1+x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1} \quad (\text{因 } x_ix_{n+1} \geqslant 0, i=1,2,\cdots,n)
\end{aligned}
$$

①伯努利(Jacob Bernuolli),1654—1705,瑞士数学家.

因此式$(1.1.2)_{n+1}$成立.于是$\forall n\in\mathbf{N}^*$,式$(1.1.2)_n$成立. □

特别的,当$x_1=x_2=\cdots=x_n=x>-1(n\in\mathbf{N}^*)$时,伯努利不等式化为

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx \tag{1.1.3}$$

(2) **AG不等式**:设$a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$,则有

$$(a_1a_2a_3\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n} \qquad (1.1.4)_n$$

***证** 当$n=1$时,左边$=a_1$,右边$=a_1$,所以式$(1.1.4)_1$成立.归纳假设式$(1.1.4)_{n-1}$成立,即假设任意$n-1$个正数的几何平均小于或等于其算术平均.记

$$\overline{x}=\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}$$

不妨设$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$,则$a_1\leqslant\overline{x}\leqslant a_n$,于是

$$(a_n-\overline{x})(\overline{x}-a_1)\geqslant 0\Leftrightarrow\overline{x}(a_1+a_n-\overline{x})\geqslant a_1a_n$$

由归纳假设,对于$n-1$个正数$a_2,a_3,\cdots,a_{n-1},a_1+a_n-\overline{x}$有

$$(a_2a_3\cdots a_{n-1}(a_1+a_n-\overline{x}))^{\frac{1}{n-1}}\leqslant\frac{a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+(a_1+a_n-\overline{x})}{n-1}=\overline{x}$$

$$\Leftrightarrow\qquad a_2a_3\cdots a_{n-1}(a_1+a_n-\overline{x})\leqslant(\overline{x})^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow\qquad a_2a_3\cdots a_{n-1}\overline{x}(a_1+a_n-\overline{x})\leqslant(\overline{x})^{n}$$

$$\Rightarrow\qquad a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}a_n=a_2a_3\cdots a_{n-1}a_1a_n\leqslant(\overline{x})^{n}$$

因此式$(1.1.4)_n$成立.于是$\forall n\in\mathbf{N}^*$,式$(1.1.4)_n$成立. □

(3) **柯西[①]-施瓦兹[②]不等式**:设$a_k\in\mathbf{R},b_k\in\mathbf{R}(k=1,2,\cdots,n)$,则

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\Big)^2\leqslant\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\Big) \tag{1.1.5}$$

当且仅当$\forall a_k=0$,或$\forall b_k=0$,或$b_k=\lambda a_k(k=1,2,\cdots,n)$时,式(1.1.5)中等号成立.

***证** 由于$\forall\lambda\in\mathbf{R}$,有

$$\sum_{k=1}^{n}(\lambda a_k-b_k)^2=\lambda^2\sum_{k=1}^{n}a_k^2-2\lambda\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\geqslant 0 \tag{1.1.6}$$

当且仅当$b_k=\lambda a_k(k=1,2,\cdots,n)$时,式(1.1.6)中等号成立.当$\forall a_k=0$或$\forall b_k=$

①柯西(Cauchy),1789—1857,法国数学家.

②施瓦兹(Schwarz),1843—1921,德国数学家.

0 时,式(1.1.5) 中等号成立. 当 $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \neq 0$, $\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \neq 0$ 时,记

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2, \quad B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \quad C = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

式(1.1.6) 化为 $A\lambda^2 - 2B\lambda + C \geqslant 0$,此式表示一元二次方程 $Ax^2 - 2Bx + C = 0$ 无实根或只有二重根,其充分必要条件是

$$\Delta = (2B)^2 - 4AC = \left(2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leqslant 0 \quad (1.1.7)$$

即得式(1.1.5) 成立,且仅当 $b_k = \lambda a_k (k = 1, 2, \cdots, n)$ 时,式(1.1.7) 中等号成立. 故当且仅当 $\forall a_k = 0$,或 $\forall b_k = 0$,或 $b_k = \lambda a_k (k = 1, 2, \cdots, n)$ 时,式(1.1.5) 中等号成立. □

1.1.6 极坐标系

在平面上取一定点 O,从 O 点出发作一条射线 Ox,选定长度单位,这就是**极坐标系**. 称 O 点为**极点**,称 Ox 轴为**极轴**(见图 1.1). 在平面上任取一点 M,点 M 到极点 O 的距离 ρ 称为**极径**,Ox 轴逆时针旋转到 OM 方向的角度 θ 称为**极角**. 我们用有序数组(ρ, θ) 来定义点 M 的**极坐标**,记为$M(\rho, \theta)$,这里 $\rho \geqslant 0$,$0 \leqslant \theta < 2\pi$(或 $-\pi \leqslant \theta < \pi$). $\rho = 0$ 表示极点,其极角取任意值. 这样规定后,平面上除极点外,任一点的直角坐标(x, y) 与极坐标(ρ, θ) 一一对应,它们的关系是

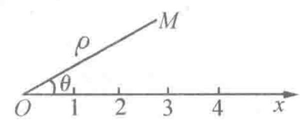

图 1.1

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta$$

注 在极坐标系的上述定义中,我们对 ρ, θ 的取值范围作了规定. 在应用中,有时会遇到 ρ, θ 的取值范围不合上述规定的情况(如下面的例 3). 当 $\rho < 0$ 时,我们规定(ρ, θ) 与$(-\rho, \theta + \pi)$ 为同一点;当 $\theta > 2\pi$ 或 $\theta < 0$ 时,我们规定(ρ, θ) 与$(\rho, \theta + 2k\pi)(k \in \mathbf{Z})$ 为同一点.

下面举例说明如何画极坐标方程的图形.

例 2 分别画出极坐标方程的图形:(1) $\rho = 1$;(2) $\rho = 2\cos\theta$;(3) $\rho = \sin\theta$.

解 (1) $\rho = 1$ 化为直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = 1$,这是半径为 1 的标准圆(见图 1.2).

(2) $\rho = 2\cos\theta$ 化为直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = 2x$,即$(x-1)^2 + y^2 = 1$,这是圆心在$(1,0)$,半径为 1 的圆(见图 1.3).

(3) $\rho = \sin\theta$ 化为直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = y$,即 $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$,这是