普通高等教育“十三五”规划教材
普通高等教育工程数学系列教材

复变函数与积分变换

主编 徐 勇 李景和 张相梅

科 学 出 版 社

普通高等教育"十三五"规划教材

普通高等教育工程数学系列教材

复变函数与积分变换

主　编　徐　勇　李景和　张相梅

副主编　马秀娟　赵娇云　吴梦虹　孙光坤

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是高等工科院校“复变函数与积分变换”的教材. 内容包括：复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、解析函数的级数表示、残数及其应用、保形映射、傅里叶变换、拉普拉斯变换. 本书内容丰富，选材适当，重点放在加强基本理论与基本方法以及它们的基本应用上，叙述严谨，并力求做到深入浅出，通俗易懂.

本书可以作为高等工科院校“复变函数与积分变换”课程的教材，也可供工程技术人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

复变函数与积分变换 / 徐勇，李景和，张相梅主编. —北京：科学出版社，2018.9

普通高等教育“十三五”规划教材　普通高等教育工程数学系列教材

ISBN 978-7-03-058448-9

Ⅰ. ①复…　Ⅱ. ①徐…②李…③张…　Ⅲ. ①复变函数-高等学校-教材 ②积分变换-高等学校-教材　Ⅳ. ①O174.5②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 178134 号

责任编辑：滕亚帆　李　萍 / 责任校对：郭瑞芝
责任印制：霍　兵 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2018 年 9 月第　一　版　开本：787 × 1092　1/16
2018 年 9 月第一次印刷　印张：12 1/2
字数：300 000

定价：34.00 元

前　　言

本书是编者为高等工科院校编写的“复变函数与积分变换”课程配套教材，是工科数学教学中继高等数学、线性代数和概率论与数理统计等课程之后开设的另一门重要的数学基础课程. 该课程是工科院校的计算机、电气、自动化、信息、机械等学院下属各专业的重要基础类课程，本书根据该课程教学大纲的要求，删去了一些繁难理论证明的内容，增添和修改了部分内容，使本书更具系统性、科学性和严谨性. 根据学习该课程的专业学生特点，本书把重点放在加强基本概念、基本理论与基本方法以及它们的基本应用上，并力求做到深入浅出，通俗易懂.

全书共 8 章. 第 1 章着重介绍复变函数的研究对象与研究方法. 第 2～4 章，介绍解析函数的基本理论，分别用一对实二元函数、复闭路积分和幂级数来刻画解析函数的特征，并由此推出解析函数极为深刻的重要性质. 第 5，6 章，介绍解析函数理论的深入运用，为处理实际问题时出现的数学问题，提供了有力的工具. 第 7，8 章介绍积分变换中常见的傅里叶变换和拉普拉斯变换以及它们在工程技术中的应用实例.

本书的主要内容是在于慎根先生等编写的《复变函数与积分变换》教材基础上，不断调整、修改完善而成的. 第 1，2 章由李景和编写，第 3 章由马秀娟编写，第 4 章由吴梦虹编写，第 5 章由赵娇云编写，第 6 章由张相梅编写，第 7，8 章由徐勇编写，习题参考答案及附录由孙光坤编写. 全书由徐勇、李景和统稿. 本书配有相应的学习指导书供读者参考.

本书出版过程中，得到了科学出版社和河北工业大学的大力支持. 科学出版社滕亚帆编辑为本书的出版做了大量艰苦细致的工作，对此表示感谢. 河北工业大学理学院何华教授、杨永发教授、金大勇教授对本书的编写都提出了很好的建议，在此一并感谢.

希望使用本书的读者对本书的内容、体系的不当之处提出批评和建议，以使本书不断完善.

编　者

2018 年 1 月于天津

目　录

第 1 章　复数与复变函数 ······ 1

1.1　复数及其运算 ······ 1

1.2　复平面上的点集 ······ 8

1.3　复变函数的概念 ······ 11

1.4　复变函数的极限和连续性 ······ 15

1.5　复球面与扩充复平面 ······ 19

习题 1 ······ 21

第 2 章　解析函数 ······ 23

2.1　解析函数的概念与柯西-黎曼条件 ······ 23

2.2　初等函数 ······ 31

习题 2 ······ 39

第 3 章　复变函数的积分 ······ 41

3.1　积分及其性质 ······ 41

3.2　柯西定理 ······ 44

3.3　柯西公式 ······ 50

3.4　调和函数 ······ 56

习题 3 ······ 59

第 4 章　解析函数的级数表示 ······ 61

4.1　复数项级数 ······ 61

4.2　复变函数项级数 ······ 63

4.3　幂级数 ······ 66

4.4　泰勒级数 ······ 69

4.5　洛朗级数 ······ 75

习题 4 ······ 83

第 5 章　残数及其应用 ······ 86

5.1　残数的一般理论 ······ 86

5.2　利用残数计算实积分 ······ 91

5.3　辐角原理及其应用 ······ 96

习题 5 ······ 102

第 6 章　保形映射 ······ 104

6.1　保形映射的概念 ······ 104

6.2　关于保形映射的黎曼存在定理和边界对应原理 ······ 107

6.3　线性映射 …… 108
6.4　初等保形映射 …… 117
习题 6 …… 121
第 7 章　傅里叶变换 …… 123
7.1　傅里叶变换的概念 …… 123
7.2　傅里叶变换的性质 …… 129
7.3　卷积与相关函数 …… 133
7.4　δ-函数的傅里叶变换 …… 137
习题 7 …… 143
第 8 章　拉普拉斯变换 …… 146
8.1　拉普拉斯变换的概念及其存在定理 …… 146
8.2　拉普拉斯变换的性质 …… 149
8.3　拉普拉斯逆变换 …… 154
8.4　卷积 …… 156
8.5　微积分方程的拉普拉斯变换解法 …… 158
习题 8 …… 161
部分习题参考答案 …… 165
参考文献 …… 175
附录 …… 176
附录Ⅰ　MATLAB 在复变函数中的应用 …… 176
附录Ⅱ　傅里叶变换简表 …… 184
附录Ⅲ　拉普拉斯变换简表 …… 187

第 1 章　复数与复变函数

复变函数的主要研究对象是解析函数. 由于在中学阶段已经学过复数的一些基本知识，因此本章先对复数的相关知识作简要的复习和补充，然后介绍复数集、复变函数的概念以及复变函数的极限和连续性，为进一步研究解析函数的理论和方法奠定必要的基础.

1.1　复数及其运算

1.1.1　复数及其几何表示

设 x,y 是两个实数，$\mathrm{i}^2=-1$，称形如 $x+\mathrm{i}y$ 或 $x+y\mathrm{i}$ 的数为一个**复数**，记为 z，即

$$z=x+\mathrm{i}y \quad 或 \quad z=x+y\mathrm{i},$$

其中，i 称为**虚数单位**，x 称为复数 z 的**实部**，记为 $\mathrm{Re}\,z$；y 称为复数 z 的**虚部**，记为 $\mathrm{Im}\,z$.

当虚部 $y=0$ 时，复数 z 就是实数 x．当实部 $x=0$，而虚部 $y\neq 0$ 时，复数 $z=\mathrm{i}y$ 称为**纯虚数**. 显然，实数集是复数集的一个子集.

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 与 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 相等，当且仅当 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$；一个复数 $z=x+\mathrm{i}y=0$，当且仅当 $x=0$ 且 $y=0$．与实数不同，任意两个复数不能比较大小.

一个复数由它的实部和虚部，即由一对有序实数所唯一确定；而在平面上取直角坐标系后，在坐标平面上的任一点，也由一对有序实数所唯一确定. 把复数 $z=x+\mathrm{i}y$ (以后在不作特殊声明的情况下，形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数中的 x 和 y 均指实数)与平面上的坐标为 (x,y) 的点相互对应，于是在一切复数所组成的集合与平面上的一切点组成的集合之间，构成一一对应关系. 一切实数所组成的集合，与横轴上一切点组成的集合相对应；一切纯虚数所组成的集合，与纵轴上的一切点(除去原点外)所组成的集合相对应. 因此把横轴称为实轴，纵轴称为虚轴. 实轴在原点右方及左方的部分，分别称为正实轴及负实轴；在实轴的上方及下方的半平面，分别称为上半平面及下半平面；虚轴的左方及右方的半平面，分别称为左半平面及右半平面；如果用平面上的点表示复数，那么这个平面就称为**复平面**，或按照表示复数的字母 $z,w,\cdots$ 称为 z 平面，w 平面等. “复数 $z=x+\mathrm{i}y$ ”与“点 $x+\mathrm{i}y$ ”用作同义语，“复数集”与“平面集”也作同义语.

在复平面上，从原点出发到点 $z=x+\mathrm{i}y$ 所引的向量与该复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 也构成一一对应关系(复数零对应着零向量). 因此，有时也把“复数”与“二维向量”，“复数集”与“向量集”用作同义语. 向量 $z=x+\mathrm{i}y$ 的长度称为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的**模**，记为

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}\ . \tag{1-1}$$

显然，一个复数为 0，当且仅当它的模为 0.

当 $z\neq 0$ 时，实轴的正向与向量 z 之间的夹角称为复数 z 的**辐角**，记为 $\mathrm{Arg}\,z$．显然 $\mathrm{Arg}\,z$

有无穷多个值，其中每两个值相差 2π 的整数倍，但 $\operatorname{Arg} z$ 中只有一个值 α 满足条件 $-\pi < \alpha \leqslant \pi$，称为 z 的**辐角主值**，记为 $\arg z$．显然，

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{1-2}$$

$\arg z$ 与反正切 $\operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x}$ 的主值 $\arctan\dfrac{y}{x}$ 有如下的关系：

$$\underset{z\neq 0}{\arg z} = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & z\text{在第一象限}, \\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & z\text{在第二象限}, \\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & z\text{在第三象限}, \\ \arctan\dfrac{y}{x}, & z\text{在第四象限}. \end{cases}$$

零没有确定的辐角，或说零没有辐角．

例 1.1　写出复数 $z=2\mathrm{i}$，$z=-5$，$z=-3+4\mathrm{i}$ 的模、辐角主值及辐角．

解　$|2\mathrm{i}|=2$，$\arg(2\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{2}$，$\operatorname{Arg}(2\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$．

$|-5|=5$，$\arg(-5)=\pi$，$\operatorname{Arg}(-5)=\pi+2k\pi=(2k+1)\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$．

$|-3+4\mathrm{i}|=\sqrt{9+16}=5$，因为 z 在第二象限，故

$$\arg(-3+4\mathrm{i}) = \arctan\frac{4}{-3}+\pi = \pi-\arctan\frac{4}{3},$$

$$\operatorname{Arg}(-3+4\mathrm{i}) = \arg(-3+4\mathrm{i})+2k\pi = (2k+1)\pi-\arctan\frac{4}{3} \quad (k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

复数 z 的实部和虚部可用它的模和辐角表出：

$$\operatorname{Re} z = |z|\cos\theta, \quad \operatorname{Im} z = |z|\sin\theta,$$

其中 $\theta = \operatorname{Arg} z$，于是 z 又可表示为

$$z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta), \tag{1-3}$$

这个式子称为 z 的**三角表示式**.

用符号 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 表示 $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，就有

$$z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \tag{1-4}$$

它称为 z 的**指数表示式**，或**欧拉(Euler)表示式**.

复数的各种表现形式可以相互转换，以适应讨论不同问题时的需要.

例 1.2　写出下列复数的三角表示式和指数表示式.

(1) $z=-\sqrt{12}-2\mathrm{i}$;　　(2) $z=\sin\dfrac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\dfrac{\pi}{5}$.

解　(1) $|z|=\sqrt{12+4}=4$，因为 z 在第三象限，故

$$\arg z = \arctan\left(\frac{-2}{-\sqrt{12}}\right)-\pi = \arctan\frac{\sqrt{3}}{3}-\pi = -\frac{5}{6}\pi.$$

因此，z 的三角表示式为

$$z=4\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right].$$

z 的指数表示式为

$$z=4\mathrm{e}^{-\frac{5}{6}\pi\mathrm{i}}.$$

(2) 题中所给的复数的实部为正弦，虚部为余弦，所以不是它的三角表示式，显然 $|z|=1$，又有

$$\sin\frac{\pi}{5}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{3}{10}\pi,\quad \cos\frac{\pi}{5}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\frac{3}{10}\pi,$$

因此，z 的三角表示式为

$$z=\cos\frac{3}{10}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{3}{10}\pi.$$

z 的指数表示式为

$$z=\mathrm{e}^{\frac{3}{10}\pi\mathrm{i}}.$$

实部相等而虚部绝对值相等，符号相反的两个复数称为**共轭复数**，记复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的共轭复数为 $\overline{z}=x-\mathrm{i}y$. 显然，$z$ 与 $\overline{z}$ 关于实轴对称(图 1-1). 因此有

$$|\overline{z}|=|z|,\quad \operatorname{Arg}\overline{z}=-\operatorname{Arg}z,\quad \operatorname{Re}\overline{z}=\operatorname{Re}z,\quad \operatorname{Im}\overline{z}=-\operatorname{Im}z.$$

这里的等式 $\operatorname{Arg}\overline{z}=-\operatorname{Arg}z$ 应理解为：对于左边 $\operatorname{Arg}\overline{z}$ 的任一个值，右边的 $-\operatorname{Arg}z$ 必有一个对应值使等式成立，反之亦然.

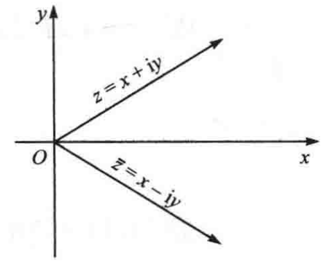

图 1-1

1.1.2　复数的运算

两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的加法和乘法运算由下列等式定义：

$$z_1+z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)+(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2),\tag{1-5}$$

$$z_1z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1).\tag{1-6}$$

减法和除法定义为加法和乘法的逆运算，于是有

$$z_1-z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)-(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1-x_2)+\mathrm{i}(y_1-y_2),\tag{1-7}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{(x_2+\mathrm{i}y_2)(x_2-\mathrm{i}y_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\quad x_2+\mathrm{i}y_2\neq 0.\tag{1-8}$$

可以证明，复数的加、减、乘、除(除数不为零)运算与实数的加、减、乘、除运算满足同样的一些法则，如交换律、结合律、分配律.

据式(1-5)可知，复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 及 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 相加与向量 z_1 及 z_2 相加的规律一致，在物理学中，力、速度、加速度等都可用向量来表示，这说明了复数可用来表示某些实际的物理量. 当非零向量 z_1, z_2 不共线时(图 1-2)，作起点在原点的向量 z_1 及 z_2，以 z_1 及 z_2 为边作平行四边形，从原点出发沿对角线所作的向量就表示 z_1+z_2，当 z_1 及 z_2 的方向相同或相反

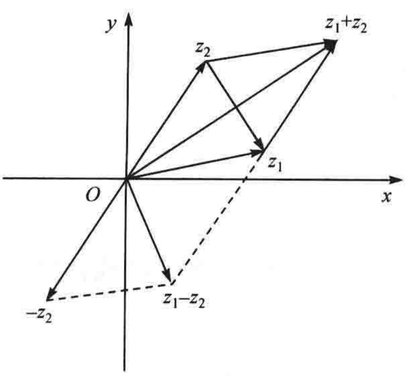

图 1-2

时，z_1+z_2 也容易作出. 由于$-z_2$表示与z_2长度相同，方向相反的向量(称为z_2的**反向量**)，而且$z_1-z_2=z_1+(-z_2)$，可以仿照z_1+z_2的情形作出z_1-z_2(图 1-2). 显然，复数相减与向量相减的法则也一致.

以下导出两复数的和及差的模的几个不等式，如图 1-2 所示，从点z_1出发到z_1+z_2的向量是z_2，于是z_1, z_2及z_1+z_2构成一个三角形，故有

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|, \tag{1-9}$$

$$|z_1+z_2| \geqslant \big||z_1|-|z_2|\big|. \tag{1-10}$$

在式(1-9)及式(1-10)中，用$-z_2$代替z_2就得到

$$|z_1-z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|, \tag{1-11}$$

$$|z_1-z_2| \geqslant \big||z_1|-|z_2|\big|. \tag{1-12}$$

也可直接证明式(1-11)及式(1-12). 其实在图 1-2 中，从z_2出发到z_1的向量就是z_1-z_2，考虑向量z_1, z_2及z_1-z_2所构成的三角形，就可推出这两个不等式. 从图 1-2 还可看出：$|z_1-z_2|$表示点z_1到点z_2的距离，此外不难证明，即使向量z_1, z_2及z_1+z_2共线，式(1-9)及式(1-10)仍然成立.

关于复数$z=x+\mathrm{i}y$的模，还有下列关系：

$$|z| \geqslant |\mathrm{Re}\,z|, \tag{1-13}$$

$$|z| \geqslant |\mathrm{Im}\,z|, \tag{1-14}$$

$$|z|^2 = z\overline{z}. \tag{1-15}$$

共轭复数有以下简单性质：

$$z+\overline{z}=2\mathrm{Re}\,z, \tag{1-16}$$

$$z-\overline{z}=2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,z, \tag{1-17}$$

$$\overline{z_1 \pm z_2}=\overline{z}_1 \pm \overline{z}_2, \tag{1-18}$$

$$\overline{z_1 z_2}=\overline{z}_1\overline{z}_2, \tag{1-19}$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} \quad (z_2 \neq 0). \tag{1-20}$$

例 1.3 设$z_1=1-2\mathrm{i}$，$z_2=-3+4\mathrm{i}$，求$\dfrac{z_1}{z_2}$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}$.

解 $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{1-2\mathrm{i}}{-3+4\mathrm{i}}=\dfrac{(1-2\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}{(-3+4\mathrm{i})(-3-4\mathrm{i})}=\dfrac{-11+2\mathrm{i}}{25}=-\dfrac{11}{25}+\dfrac{2}{25}\mathrm{i}$，

$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=-\dfrac{11}{25}-\dfrac{2}{25}\mathrm{i}$.

例 1.4 设z_1, z_2是两个复数，求证

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2).$$

证 $|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=(z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)$

$$=z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2+z_1\overline{z}_2+z_2\overline{z}_1$$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\overline{z}_2+\overline{z_1\overline{z}_2}=|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2).$$

把非零复数 z_1 及 z_2 写成三角表示式：

$$z_1=|z_1|(\cos\operatorname{Arg}z_1+\mathrm{i}\sin\operatorname{Arg}z_1),$$

$$z_2=|z_2|(\cos\operatorname{Arg}z_2+\mathrm{i}\sin\operatorname{Arg}z_2),$$

由乘法定义可推得

$$z_1z_2=|z_1||z_2|[\cos(\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2)+\mathrm{i}\sin(\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2)],$$

据此得

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2| \tag{1-21}$$

及

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2. \tag{1-22}$$

式(1-22)应理解为：对于 $\operatorname{Arg}(z_1z_2)$ 的任一值，一定有 $\operatorname{Arg}z_1$ 及 $\operatorname{Arg}z_2$ 的某一值与之对应，使得等式成立；反之亦然. 又由除法的定义可推得

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2)+\mathrm{i}\sin(\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2)],$$

据此得

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\quad(z_2\neq 0) \tag{1-23}$$

及

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2\quad(z_2\neq 0). \tag{1-24}$$

等式(1-24)应与等式(1-22)类似地理解. 由此知：

(1) 两个非零复数的乘积是一个复数，其模等于它们模的乘积，其辐角等于它们辐角的和；

(2) 两个非零复数的商是一个复数，其模等于它们模的商，其辐角等于它们辐角的差.

因此，当用向量表示复数时，可以说两个非零向量 z_1，z_2 的积 z_1z_2 是一个向量，它是由向量 z_1 旋转一个角度 $\operatorname{Arg}z_2$ 并伸长(或缩短)到 $|z_2|$ 倍得到的(图 1-3). 特别地，当 $|z_2|=1$ 时，乘法变成了只是旋转；当 $\arg z_2=0$ 时，乘法变成了仅仅是伸长(或缩短). 如 $\mathrm{i}z_1$ 是相当于 z_1 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 而得到的复数，见图 1-3，$-z_1$ 是相当于 z_1 顺时针旋转 π 而得到的复数.

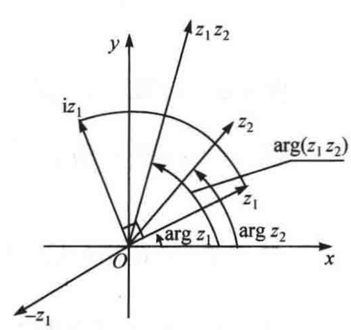

图 1-3

类似地，可描述两个非零复数商的几何意义.

例 1.5 已知正三角形的两个顶点为 $z_1=1$ 和 $z_2=2+\mathrm{i}$，求它的另一个顶点.

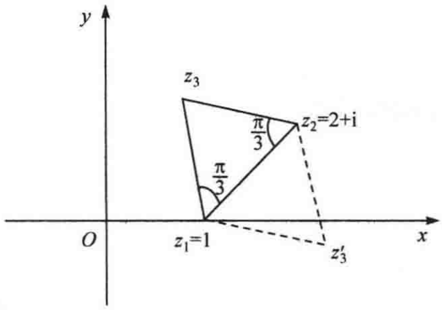

图 1-4

解 如图 1-4 所示，将向量 z_2-z_1 绕 z_1 旋转 $\frac{\pi}{3}\left(或-\frac{\pi}{3}\right)$，得到另一个向量的终点即为所求的顶点 z_3(或 z_3').

根据复数的乘法，有

$$z_3-z_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z_2-z_1)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)(1+\mathrm{i})$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\mathrm{i},$$

得

$$z_3=\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)+z_1=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

类似可得

$$z_3'=\frac{3+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

现在考虑复数的乘幂，设 $z\neq 0$，n 为正整数，z^n 表示 n 个复数 z 的乘积，由乘法运算法则得

$$z^n=|z|^n[\cos(n\operatorname{Arg}z)+\mathrm{i}\sin(n\operatorname{Arg}z)],$$

若规定 $z^0=1$，则这个公式当 $n=0$ 时也成立. 又定义

$$z^{-n}=\frac{1}{z^n}=\frac{1}{|z|^n[\cos(n\operatorname{Arg}z)+\mathrm{i}\sin(n\operatorname{Arg}z)]}$$
$$=|z|^{-n}[\cos(-n\operatorname{Arg}z)+\mathrm{i}\sin(-n\operatorname{Arg}z)],$$

则对任意的整数 m, 有

$$z^m=|z|^m[\cos(m\operatorname{Arg}z)+\mathrm{i}\sin(m\operatorname{Arg}z)]. \tag{1-25}$$

当 $|z|=1$ 时，得**棣莫弗**(De Moivre)**公式**：

$$z^m=\cos(m\operatorname{Arg}z)+\mathrm{i}\sin(m\operatorname{Arg}z). \tag{1-26}$$

例 1.6 计算 $(-1+\mathrm{i})^{10}$.

解 $-1+\mathrm{i}$ 的三角表示式为 $-1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{3}{4}\pi\right)$，故

$$(-1+\mathrm{i})^{10}=(\sqrt{2})^{10}\left(\cos\frac{30}{4}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{30}{4}\pi\right)=32\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=-32\mathrm{i}.$$

设 $n\ (n\geqslant 2)$ 为正整数时，对于给定的非零复数 z，满足 $w^n=z$ 的复数 w 称为 z 的 n **次方根**，记为 $w=\sqrt[n]{z}$. 为求出根 $w=\sqrt[n]{z}$，令

$$z=|z|(\cos\operatorname{Arg}z+\mathrm{i}\sin\operatorname{Arg}z),\quad w=|w|(\cos\operatorname{Arg}w+\mathrm{i}\sin\operatorname{Arg}w).$$

由　$$w^n = |w|^n[\cos(n\operatorname{Arg} w) + \mathrm{i}\sin(n\operatorname{Arg} w)] = |z|(\cos\operatorname{Arg} z + \mathrm{i}\sin\operatorname{Arg} z)$$

知 $|w| = \sqrt[n]{|z|}, \operatorname{Arg} w = \dfrac{1}{n}\operatorname{Arg} z$. 设$\varphi$是 $\operatorname{Arg} z$ 的某一值，则

$$\operatorname{Arg} w = \frac{1}{n}(\varphi + 2k\pi) \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots),$$

故有

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots). \tag{1-27}$$

在式(1-27)中，取 $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$，可得到 z 的 n 个相异的 n 次方根，分别记为 $w_0, w_1, \cdots, w_{n-1}$. 显然 k 还可取其他值，但得不到新的不同根. 当 k 取其他整数时，这些根又重复出现. 读者不难验证，$w_n = w_0, w_{n+1} = w_1, \cdots$，故非零复数 z 的 n 次方根只有 n 个不同的值 $w_0, w_1, \cdots, w_{n-1}$. 显然，这 n 个根在复平面上表示为：以原点为中心，$\sqrt[n]{|z|}$ 为半径的圆内接正 n 边形的 n 个顶点.

例 1.7　求方程 $z^3 + 8 = 0$ 的所有根.

解　$z = \sqrt[3]{-8}$，$-8 = 8(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)$，故

$$z = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right) \quad (k = 0, 1, 2).$$

当 $k = 0$ 时，$z_0 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\left(\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$;

当 $k = 1$ 时，$z_1 = \sqrt[3]{8}(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) = -2$;

当 $k = 2$ 时，$z_2 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{3}\right) = 2\left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$.

故方程 $z^3 + 8 = 0$ 的所有根为 $z_0 = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$，$z_1 = -2$，$z_2 = 1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$.

在实数域中，-8 的立方根是 -2，即 $\sqrt[3]{-8} = -2$，只相当于这里 $k = 1$ 的情形.

例 1.8　求 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$，并说明 $1+\mathrm{i}$ 的 4 次方根的几何意义.

解　由 $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$，得

$$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{4}\right) \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

于是当 k 分别取 0, 1, 2, 3 时，得到 $1+\mathrm{i}$ 的 4 个根分别为

$$w_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right), \qquad w_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{9\pi}{16}\right),$$

$$w_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{16}\right), \quad w_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{25\pi}{16}\right).$$

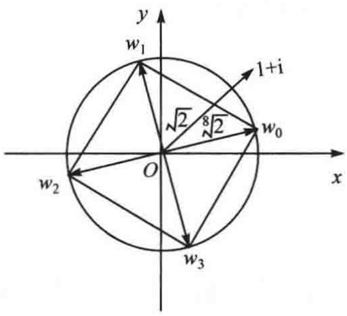

图 1-5

w_0, w_1, w_2, w_3 是内接于中心在原点，半径为 $\sqrt[8]{2}$ 的圆周的正方形的4个顶点. 这4个点均匀分布在圆周之上，每隔 $\dfrac{\pi}{2}$ 分布一个点(图 1-5). 事实上，由

$$\sqrt[4]{1+\mathrm{i}} = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{16}\right)\left(\cos\frac{k\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{2}\right) \quad (k=0,1,2,3)$$

知，w_0, w_1, w_2, w_3 满足 $w_1 = \mathrm{i}w_0, w_2 = -w_0, w_3 = -\mathrm{i}w_0$.

还要特别注意，虽有 $\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2$，但

$$\mathrm{Arg}\, z^2 = \mathrm{Arg}\, z + \mathrm{Arg}\, z \neq 2\mathrm{Arg}\, z .$$

如

$$\mathrm{Arg}\mathrm{i}^2 = \pi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

$$2\mathrm{Arg}\mathrm{i} = 2\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \pi + 4k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

3π 是 $\mathrm{Arg}\mathrm{i}^2$ 的一个值，但 3π 不是 $2\mathrm{Arg}\mathrm{i}$ 的值，可知 $\mathrm{Arg}\mathrm{i}^2 \neq 2\mathrm{Arg}\mathrm{i}$.

1.2 复平面上的点集

满足一定条件的复数 z 的一个集合表示复平面上的一个点集，讨论复变函数及其有关的概念，要涉及一些特殊的点集，本节将介绍这些点集.

在复平面上，方程 $|z - z_0| = r\ (r \geqslant 0)$ 表示到定点 z_0 的距离为 r 的点的集合，即以 z_0 为中心，r 为半径的圆周(图 1-6)，显然，上述圆周还可表示为

$$z - z_0 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

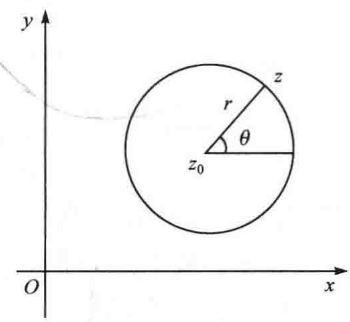

图 1-6

由

$$|z - z_0| = r, \quad 即 |z - z_0|^2 = r^2,$$

得

$$(z - z_0)(\overline{z} - \overline{z}_0) = r^2,$$

$$z\overline{z} - z_0\overline{z} - z\overline{z}_0 + z_0\overline{z}_0 = r^2.$$

令 $\beta = -z_0$，$\alpha = z_0\overline{z}_0 - r^2$，上式成为

$$z\overline{z} + \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + \alpha = 0 .$$

于是圆周 $|z - z_0| = r\ (r \geqslant 0)$ 也可用上述这种形式的方程来表示；反之上边方程也表示以 $-\beta$ 为中心，以 $\sqrt{|\beta|^2 - \alpha}$ (当 $|\beta|^2 - \alpha \geqslant 0$ 时)为半径的圆周.

定义 1.1 满足 $|z - z_0| < \delta\ (\delta > 0)$ 点的全体，称为点 z_0 的一个 δ **邻域**，记为 $N(z_0, \delta)$. 不包括 z_0 自身的 z_0 的邻域，即满足 $0 < |z - z_0| < \delta$ 点的全体称为 z_0 的**去心邻域**.

定义 1.2 给定复平面上的点集 E 及一点 z_0，若 z_0 的任一邻域中至少含有 E 的一个异于

z_0 的点，则称 z_0 为 E 的一个**聚点**或**极限点**.

由定义可以看出，点集 E 的聚点可属于 E，也可不属于 E，若 E 的每个聚点都在 E 内，则称 E 为**闭集**.

定义 1.3　点集 E 中非聚点的点称为 E 的**孤立点**. 若点 z_0 的任一邻域内，既有 E 中的点，又有不属于 E 的点，则 z_0 称为 E 的**边界点**. 点集 E 的全部边界点所组成的集，称为 E 的**边界**.

由定义可以看出，边界点既可属于 E 也可不属于 E.

定义 1.4　给定点集 E，若存在点 z_0 的某个邻域含于 E 内，则称 z_0 为 E 的**内点**；若 E 的每个点都是它的内点，则称 E 为**开集**.

定义 1.5　若对点集 E 中任意两点，总存在属于 E 的折线将这两点连接起来，则称 E 是**连通集**.

定义 1.6　连通的开集称为**区域**. 区域 D 连同其边界称为**闭区域**，记为 $\bar{D}$.

注　区域不包含它的边界点，因为边界点不是内点，闭区域不是区域. 例如，$|z|<R$ 是圆形区域，是圆周 $|z|=R$ 的内部；而 $|z|\leqslant R$ 是圆形闭域，不是区域，圆周 $|z|=R$ 是区域 $|z|<R$ 的边界.

定义 1.7　若对点集 E，存在实数 $M>0$，使 E 中任一点 z 满足 $|z|<M$，则称 E 为**有界集**. 非有界集称为**无界集**. 如果区域 D 是有界集，那么称它为**有界区域**，否则称它为**无界区域**.

定义 1.8　设 $x(t)$ 及 $y(t)$ 是实变数 t 的两个实函数，在闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上连续，则由方程组

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t) \end{cases} \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

或由复数方程

$$z=x(t)+\mathrm{i}y(t) \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)\ (\text{简记为 } z=z(t)) \tag{1-28}$$

所确定的点集 C，称为 z 平面上的一条**连续曲线**. 式(1-28)称为 C 的参数方程，$z(\alpha)$ 及 $z(\beta)$ 分别称为 C 的起点和终点. 满足 $\alpha<t_1<\beta$，$\alpha\leqslant t_2\leqslant\beta$，$t_1\neq t_2$ 的 t_1 及 t_2，当 $z(t_1)=z(t_2)$ 成立时，点 $z(t_1)$ 称为 C 的**重点**. 凡无重点的连续曲线，称为**简单曲线**或**若尔当曲线**；满足 $z(\alpha)=z(\beta)$ 的简单曲线称为**简单闭曲线**.

定义 1.9　设简单(或简单闭)曲线 C 的参数方程为

$$z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t) \quad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta).$$

又在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上 $x'(t)$ 及 $y'(t)$ 连续且不全为 0，则 C 称为**光滑曲线**(或**光滑闭曲线**). 由有限条光滑曲线连接而成的曲线称为**逐段光滑曲线**.

简单闭曲线有一个直观上很容易理解的重要性质：任一简单闭曲线 C 将整个复平面唯一地分成三个互不相交的点集，一个是有界区域，称为 C 的内部(图 1-7 中的 $I(C)$)；一个是无界的区域，称为 C 的外部(图 1-7 中的 $E(C)$)；另一个就是 C，它是内部和外部两个区域的公共边界. 这一结果的直观意义是很清楚的，但严格的证明比较复杂，在此不作介绍.

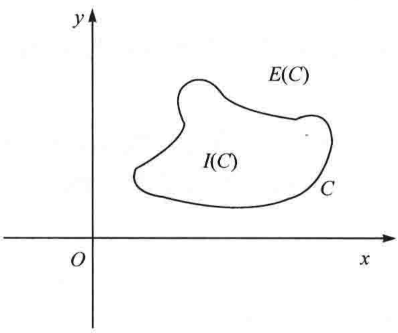

图 1-7

定义 1.10　设 D 为复平面上的一个区域. 若在 D 内无论怎样画简单闭曲线，其内部仍全含于 D，则称 D 为**单连通区域**; 非单连通区域称为**多连通区域**.

显然，任意一条简单闭曲线的内部、整个复平面、半个复平面 $\mathrm{Im}\,z < a$ 等均是单连通区域, 复平面去掉原点和负实轴的区域 $-\pi < \arg z < \pi$ 也是单连通区域. 任意一条简单闭曲线的外部、任意一个去心邻域或环形域均是多连通区域.

例 1.9　设 E 是点集 $z = \dfrac{1}{m} + \mathrm{i}\dfrac{1}{n}$ (m,n是任意自然数)的集合，它是一个无内点集; 它的每一个点都是边界点，但都不是它的聚点(图 1-8).

例 1.10　满足 $|z-1|<1$ 及 $|z+1|<1$ 的所有点 z 和原点组成的点集是连通集，但不是开集，因为原点不是它的内点. $|z-1|=1$ 及 $|z+1|=1$ 是该点集的边界(图 1-9).

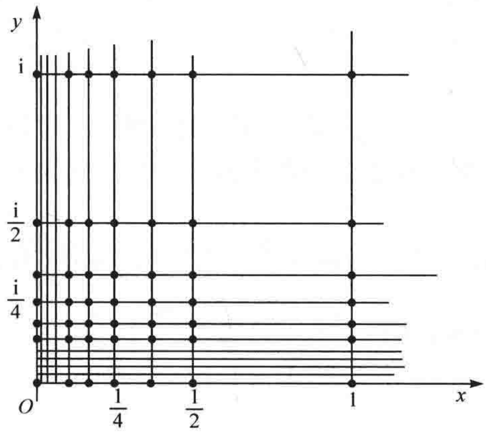

图 1-8

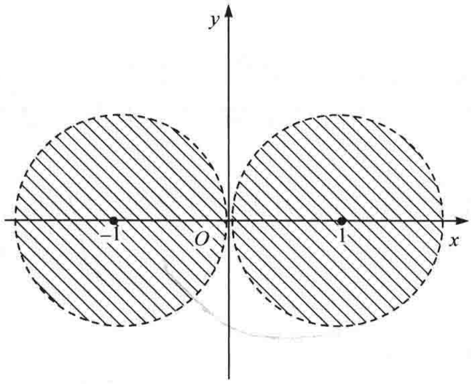

图 1-9

例 1.11　满足 $a < \mathrm{Im}\,z < b$ 的所有点 z 组成的点集为一带形域，它是一个单连通无界区域，其边界为两直线：$\mathrm{Im}\,z = a, \mathrm{Im}\,z = b$ (图 1-10). 显然满足 $a \leqslant \mathrm{Im}\,z \leqslant b$ 的所有点 z 组成的点集是闭区域，不是区域.

例 1.12　满足 $\theta_0 < \arg(z-z_0) < \alpha + \theta_0$ 的所有点 z 组成的点集为一个角形域，它是一个单连通无界区域(图 1-11)，其边界为射线 $\arg(z-z_0) = \theta_0$ 及 $\arg(z-z_0) = \alpha + \theta_0$.

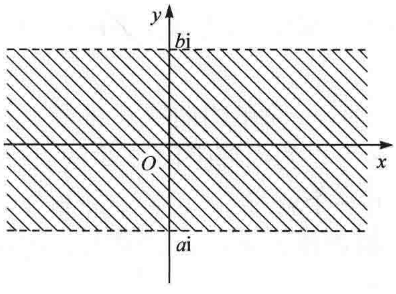

图 1-10

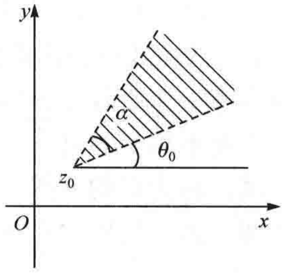

图 1-11

例 1.13 满足 $\mathrm{Re}\,z > a$ 的所有点 z 组成的点集是半平面，它是一个单连通无界区域，其边界是 $\mathrm{Re}\,z = a$(图 1-12).

例 1.14 满足 $|z-(1+\mathrm{i})|<2$ 的所有点 z 组成的点集是圆心在 $1+\mathrm{i}$，半径为 2 的圆的内部，它是一个单连通的有界区域(图 1-13)；而满足 $0<|z-(1+\mathrm{i})|<2$ 的所有点 z 组成的点集是圆心在 $1+\mathrm{i}$，半径为 2 的圆的内部挖掉圆心 $1+\mathrm{i}$ 所得到的区域，它是一个多连通的有界区域(图 1-14).

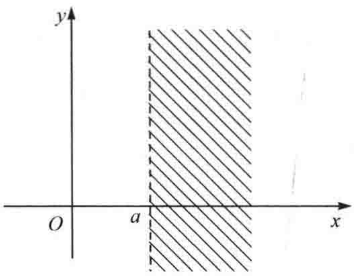

图 1-12

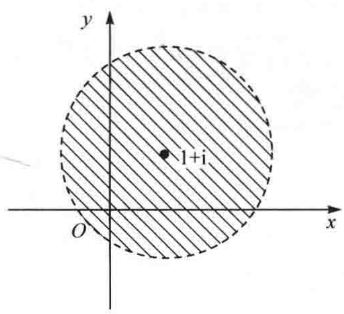

图 1-13

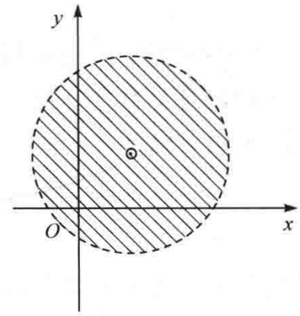

图 1-14

1.3 复变函数的概念

定义 1.11 设 E,F 为两个非空复数集，若有一个法则 f，使得对每个复数 $z\in E$，在 F 中都有确定的复数 w 与之对应，则称 f 为定义在 E 上的**复变函数**，记为 $w=f(z)$． E 称为函数的**定义域**， $A=\{w|w=f(z), z\in E\}\subseteq F$ 称为函数的**值域**， A 也记为 $A=f(E)$．

显然，如果 E 与 A 分别在 z 平面和 w 平面的实轴上，那么 $w=f(z)$ 就是一个实变实值函数，因此实函数可以看成复变函数的一个特例.

定义不排除：

(1) 把 E 中不同的点对应到 F 中的同一个点 w，于是常数可看成是取同一值的函数.

(2) 对 E 中的每一点 z，只有 F 中的一个 w 与之对应，此时称 f 为**单值函数**. 例如，$w=\overline{z}$，$w=z^n$ (n 为正整数)， $w=\dfrac{z+1}{z-1}$ ($z\neq 1$)均为单值函数.

(3) 对 E 中的一些点，在 F 中有多个复数 w 与之对应，此时称 f 为**多值函数**. 例如，$w=\sqrt[n]{z}$ ($z\neq 0, n$ 为整数且 $n\geqslant 2$), $w=\mathrm{Arg}\,z$ ($z\neq 0$)均为多值函数.

(4) 对 E 中任意两个复数 z_1,z_2，若 $z_1\neq z_2$，则在 F 中对应的两个复数 $w_1=f(z_1)$，$w_2=f(z_2)$ 也成立 $w_1\neq w_2$，此时称 f 为**单叶函数**.

今后如无特殊说明，所讨论的函数均指单值函数.

考虑 $w=u+\mathrm{i}v$ 的实部和虚部，“函数 $w=f(z)$ 在 E 上确定”也就是“对 E 中坐标为 (x,y) 的每一点，有实数 u 与 v 与之对应”，即确定了两个定义在 E 上的二元实变函数

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y).$$

于是一个复变函数 $w=f(z)$ 等价于两个二元实变函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$． $u=u(x,y)$ 和