



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

数学分析

第四版（下册）

复旦大学数学系

欧阳光中 朱学炎 金福临 陈传璋 编

非
外
借

高等教育出版社



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

数学分析


第四版（下册）

复旦大学数学系

欧阳光中 朱学炎 金福临 陈传璋 编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书在 2007 年出版的第三版的基础上作了全面修订。这次修订,主要在文字上作了不少修改,使概念的表述和定理的论证更清晰,读起来也更通顺流畅,适当补充了数字资源(以符号标识)。

本书分上下两册,上册内容为极限初论、极限续论、单变量微分学、单变量积分学;下册内容为数项级数和反常积分、函数项级数、多元函数的极限与连续、多变量微分学、多变量积分学。

本书可作为一般院校数学类专业的教材,也可作为工科院校以及经济管理类院系中数学要求较高的专业的数学教材。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析. 下册 / 欧阳光中等编. --4 版. --北京:
高等教育出版社, 2018.8

ISBN 978-7-04-049885-1

I. ①数… II. ①欧… III. ①数学分析-高等学校-
教材 IV. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 120351 号

项目策划	李艳馥 兰莹莹 李蕊				
策划编辑	兰莹莹	责任编辑	张晓丽	封面设计	张志奇 版式设计 杜微言
插图绘制	于博	责任校对	刘丽娟	责任印制	刘思涵

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印 刷	河北鹏盛贤印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开 本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印 张	18.5	版 次	1978 年 5 月第 1 版
字 数	380 千字		2018 年 8 月第 4 版
购书热线	010-58581118	印 次	2018 年 8 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	37.60 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 49885-00

数学分析

第四版(下册)

复旦大学数学系

欧阳光中 朱学炎 金福临 陈传璋 编

1. 计算机访问<http://abook.hep.com.cn/127965>, 或手机扫描二维码、下载并安装 Abook 应用。
2. 注册并登录, 进入“我的课程”。
3. 输入封底数字课程账号(20 位密码, 刮开涂层可见), 或通过 Abook 应用扫描封底数字课程账号二维码, 完成课程绑定。
4. 单击“进入课程”按钮, 开始本数字课程的学习。



课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制, 部分内容无法在手机端显示, 请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题, 请发邮件至 abook@hep.com.cn。



扫描二维码
下载 Abook 应用



数学分析简史(上)



数学分析简史(下)

第三篇 级 数

第一部分 数项级数和反常积分

第九章 数项级数	3
§ 1 预备知识:上极限和下极限	3
习题	5
§ 2 级数的收敛性和基本性质	6
习题	11
§ 3 正项级数	11
习题	16
§ 4 任意项级数	17
一、绝对收敛和条件收敛	17
二、交错级数	19
三、阿贝尔 (Abel) 判别法和狄利克雷判别法	21
习题	25
§ 5 绝对收敛级数和条件收敛级数的性质	25
习题	31
第十章 反常积分	32
§ 1 无穷限的反常积分	32
一、无穷限反常积分的概念	32
二、无穷限反常积分和数项级数的关系	35
三、无穷限反常积分的收敛性判别法	36
* 四、阿贝尔判别法和狄利克雷判别法	37
习题	41
§ 2 无界函数的反常积分	42
一、无界函数反常积分的概念,柯西判别法	42
* 二、阿贝尔判别法和狄利克雷判别法	45
三、反常积分的主值	45
习题	46

注 带有 * 号的部分,可视教学需要进行取舍.

第二部分 函数项级数

第十一章 函数项级数、幂级数	51
§ 1 函数项级数的一致收敛	51
一、函数项级数的概念	51
二、一致收敛的定义	52
三、一致收敛级数的性质	55
四、一致收敛级数的判别法	57
习题	59
§ 2 幂级数	61
一、收敛半径	61
二、幂级数的性质	64
三、函数的幂级数展开	65
习题	68
第十二章 傅里叶级数和傅里叶变换	70
§ 1 函数的傅里叶级数展开	70
一、傅里叶级数的引进	70
二、三角函数系的正交性	70
三、傅里叶系数	71
四、收敛判别法	72
五、傅里叶级数的复数形式	76
六、收敛判别法的证明	77
七、傅里叶级数的性质	83
习题	84
§ 2 傅里叶变换	85
一、傅里叶变换的概念	85
二、傅里叶变换的一些性质	88
习题	89

第四篇 多变量微积分学

第一部分 多元函数的极限论

第十三章 多元函数的极限和连续	93
§ 1 平面点集	93
一、邻域、点列的极限	93
二、开集、闭集、区域	94
三、平面点集的几个基本定理	95
习题	96
§ 2 多元函数的极限和连续性	97
一、多元函数的概念	97
二、二元函数的极限	98
三、二元函数的连续性	99

四、有界闭区域上连续函数的性质	100
五、二重极限和二次极限	101
习题	103

第二部分 多变量微分学

第十四章 偏导数和全微分	107
§ 1 偏导数和全微分的概念	107
一、偏导数的定义	107
二、全微分的定义	109
三、高阶偏导数与高阶全微分	111
习题	113
§ 2 复合函数偏导数的链式法则	114
习题	118
§ 3 由方程(组)所确定的函数的求导法	119
一、一个方程 $F(x, y, z) = 0$ 的情形	119
二、方程组的情形	120
习题	124
第十五章 偏导数的应用	127
§ 1 空间曲线的切线和法平面	127
习题	129
§ 2 曲面的切平面和法线	130
习题	132
§ 3 方向导数和梯度	132
一、方向导数	132
二、梯度	135
习题	137
§ 4 泰勒公式	138
习题	139
§ 5 极值	139
习题	143
§ 6 最小二乘法	144
习题	146
§ 7 条件极值	146
习题	151
第十六章 隐函数存在定理	153
§ 1 隐函数存在定理	153
一、 $F(x, y) = 0$ 情形	153
二、多变量情形	157
三、方程组情形	157
习题	159
§ 2 函数行列式的性质	160
习题	162

第三部分 含参变量的积分和反常积分

第十七章 含参变量的积分	165
习题	169
第十八章 含参变量的反常积分	171
一、一致收敛的定义	171
二、一致收敛积分的判别法	172
三、一致收敛积分的性质	172
四、阿贝尔判别法、狄利克雷判别法	175
五、欧拉积分, B 函数和 Γ 函数	178
习题	180

第四部分 多变量积分学

第十九章 积分(二重、三重积分, 第一类曲线、曲面积分)的定义和性质	185
§ 1 二重积分、三重积分、第一类曲线积分、第一类曲面积分的概念	185
§ 2 积分的性质	188
习题	189
第二十章 重积分的计算和应用	191
§ 1 二重积分的计算	191
一、化二重积分为二次积分	191
二、用极坐标计算二重积分	196
三、二重积分的一般变量替换	198
习题	203
§ 2 三重积分的计算	205
一、化三重积分为三次积分	205
二、三重积分的变量替换	208
习题	211
§ 3 积分在物理上的应用	212
一、质心	212
二、矩	214
三、引力	215
习题	216
§ 4 反常重积分	216
习题	219
§ 5 外积和重积分的变量替换	220
一、外积	220
二、重积分的变量替换	223
第二十一章 曲线积分和曲面积分的计算	225
§ 1 第一类曲线积分的计算	225
习题	227
§ 2 第一类曲面积分的计算	228
一、曲面的面积	228

二、化第一类曲面积为二重积分	231
习题	234
§ 3 第二类曲线积分	235
一、变力作功与第二类曲线积分的定义	235
二、第二类曲线积分的计算	237
三、两类曲线积分的联系	239
习题	241
§ 4 第二类曲面积分	242
一、曲面的侧	242
二、第二类曲面积分的定义	244
三、两类曲面积分间的联系	246
四、第二类曲面积分的计算	246
习题	250
第二十二章 各种积分间的联系和场论初步	252
§ 1 各种积分间的联系	252
一、格林 (Green) 公式	252
二、高斯 (Gauss) 公式	254
三、斯托克斯 (Stokes) 公式	257
习题	260
§ 2 曲线积分和路径的无关性	261
习题	266
§ 3 场论初步	267
一、场的概念	267
二、向量场的散度与旋度	268
三、保守场	273
习题	273
附录 向量值函数的导数	275
索引	281

第三篇 级 数

第一部分 数项级数和反常积分

§ 1 预备知识:上极限和下极限

先来叙述本篇的一个预备知识,即数列的上极限和下极限.就其内容来说,这属于极限论的范围.

对于一个有界数列 $\{a_n\}$,去掉它的最初 k 项以后,剩下的仍旧是一个有界数列,记这个数列的上确界为 β_k ,下确界为 α_k ,亦即

$$\beta_k = \sup_{n > k} \{a_n\} = \sup \{a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \dots\},$$

$$\alpha_k = \inf_{n > k} \{a_n\} = \inf \{a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \dots\},$$

可见 $\alpha_k \leq \beta_k$. 令 $k=1, 2, 3, \dots$, 于是得到一列 $\{\beta_k\}$ 和一列 $\{\alpha_k\}$. 显然数列 $\{\beta_k\}$ 是单调减少的, $\{\alpha_k\}$ 是单调增加的, 所以这两个数列的极限都存在. 我们称 $\{\beta_k\}$ 的极限是 $\{a_n\}$ 的上极限, 记它是 H . $\{\alpha_k\}$ 的极限是 $\{a_n\}$ 的下极限, 记它是 h . 并分别将上极限和下极限记为 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ 和 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$. 也就是

$$H = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n > k} \{a_n\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_k,$$

$$h = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{n > k} \{a_n\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k,$$

由于 $\alpha_k \leq \beta_k$, 得 $h \leq H$.

如果数列 $\{a_n\}$ 无上界, 我们就说 $H = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$; 如果数列 $\{a_n\}$ 无下界, 就说 $h = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

下面给出上极限和下极限的重要性质.

定理 1 设 $H = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$, 则

(i) 当 H 为有限时, 对于 H 的任何 ε 邻域 $(H-\varepsilon, H+\varepsilon)$, 在数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多个项属于这个邻域, 而在 $(H+\varepsilon, +\infty)$ 中最多只有有限多个项 (包括一项也没有) (如图 9-1);

(ii) 当 $H = +\infty$ 时, 对任何数 $N > 0$, 在 $\{a_n\}$ 中必有无穷多个项大于 N ;

(iii) 当 $H = -\infty$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 以 $-\infty$ 为极限.

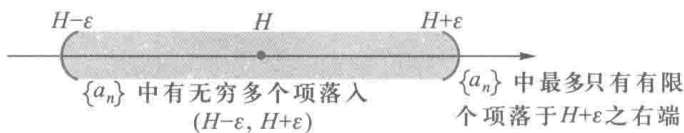


图 9-1

证明 (i) 当 $-\infty < H < +\infty$ 时, 假设存在某一正数 ε_0 , 使得在 $\{a_n\}$ 中只有有限多个项大于 $H - \varepsilon_0$, 那么必存在 n_0 , 当 $n > n_0$ 时, 一切 a_n 皆有 $a_n \leq H - \varepsilon_0$. 于是上确界

$$\beta_n = \sup \{a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} \leq H - \varepsilon_0 \quad (n > n_0),$$

因此

$$H = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n \leq H - \varepsilon_0,$$

这与定理的假设矛盾, 这就证明了对任何 $\varepsilon > 0$, 在 $\{a_n\}$ 中必有无穷多个项大于 $H - \varepsilon$.

再来证明, 在 $\{a_n\}$ 中最多只有有限多个项大于 $H + \varepsilon$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = H$, 故存在 N , 当 $n > N$ 时有 $\beta_n < H + \varepsilon$, 而 β_n 又是 $\{a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}, \dots\}$ 的上确界, 所以当 $n > N$ 时, 对一切正整数 k 成立 $a_{n+k} \leq \beta_n < H + \varepsilon$, 这样就证明了大于 $H + \varepsilon$ 的 a_n 只可能有有限多个 (包括一个也没有).

(ii) 当 $H = +\infty$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 无上界, 由此便获得所要的结论.

(iii) 当 $H = -\infty$ 时, 对任何 $G > 0$, 存在 n_0 , 当 $n > n_0$ 时

$$a_{n+1} \leq \beta_n < -G,$$

这表明 $\{a_n\}$ 的极限为 $-\infty$.

到此定理全部证毕.

定理 2 设 $h = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$, 则

(i) 当 h 为有限时, 对 h 的任何 ε 邻域 $(h - \varepsilon, h + \varepsilon)$, 在数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多个项属于这个邻域, 而最多只有有限多个小于 $h - \varepsilon$ (包括一项也没有);

(ii) 当 $h = -\infty$ 时, 对任何数 $N > 0$, 在数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多个项小于 $-N$;

(iii) 当 $h = +\infty$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 的极限为 $+\infty$.

证明与定理 1 完全相仿.

定理 3 设 H 为 $\{a_n\}$ 的上极限, 那么, 在 $\{a_n\}$ 中必存在一个子列, 其极限为 H , 并且 H 是 $\{a_n\}$ 中所有收敛子列的极限中的最大值. 设 h 为 $\{a_n\}$ 的下极限, 那么, 在 $\{a_n\}$ 中必存在一个子列, 其极限为 h , 并且 h 是 $\{a_n\}$ 中所有收敛子列的极限中的最小值.

证明 仅以上极限 H 来证明如下. 分三种情形来考察:

(i) $-\infty < H < +\infty$, 由定理 1 知道, 必有一个子列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛于 H . 此外, 对任意 $\varepsilon > 0$, 在 $\{a_n\}$ 中只可能有有限多个项大于 $H + \varepsilon$, 这就表明所有收敛子列的极限绝不会大于 $H + \varepsilon$, 再由 ε 的任意性, 便得到所有收敛子列的极限必不大于 H .

(ii) 当 $H = +\infty$ 时, 按定理 1, 存在子列 $a_{n_k} \rightarrow +\infty$, 而其他一切收敛子列的极限当然不会大于 $+\infty$.

(iii) 当 $H = -\infty$ 时, 此时 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, 故数列 $\{a_n\}$ 的一切子列都以 $-\infty$ 为极限.

这样便证明了定理.

这一定理表明,在一个有界数列 $\{a_n\}$ 中,它的所有收敛子列的极限所组成的数集必有最大值和最小值,并且这个最大(小)值正是 $\{a_n\}$ 的上(下)极限.

推论 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ (有限或无穷大)的充要条件为

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A.$$

这个推论容易从定理 3 得到.

例 1 $a_n = n + (-1)^n n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

它只有两个具有极限的子数列(包括极限为 ∞ 的情形): a_{2k} 和 a_{2k+1} ($k = 1, 2, 3, \dots$). 前者极限为 $+\infty$, 后者极限为 0, 于是

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

例 2 $a_n = \cos \frac{n}{4} \pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

由于 $-1 \leq \cos \frac{n}{4} \pi \leq 1$, 当 $n = 8k$ ($k = 1, 2, \dots$) 时, $a_{8k} \rightarrow 1$ ($k \rightarrow \infty$), 当 $n = 4(2k+1)$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) 时, $a_{4(2k+1)} \rightarrow -1$ ($k \rightarrow \infty$), 于是有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1.$$

习 题

1. 证明:

$$(1) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$(2) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

2. 设 $x_n \geq 0, y_n \geq 0$, 证明:

$$(1) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$(2) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

3. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 则对任何数列 $\{y_n\}$ 成立:

$$(1) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$(2) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n, \text{ 若 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n > 0.$$

4. 求下列数列的上极限与下极限:

$$(1) a_n = \frac{1}{2^{-n} + (-1)^n} \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$(2) a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (n = 1, 2, \dots);$$

$$(3) a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad (n = 1, 2, \dots);$$

(4) $a_n = \sin \frac{n\pi}{5} \quad (n=1, 2, \dots)$.

5. 证明: 若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$, 则 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{k_0+n}|} = a$, 此处 k_0 是任意固定的整数.

6. 若 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a < b$, 证明: 必存在 N , 当 $n > N$ 时, 有 $a_n < b$. 又如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a < b$. 情况如何?

§2 级数的收敛性和基本性质

将一系列无穷多个数 $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ 写成和式, 即

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$$

这个和式就称为无穷级数, 并记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. 这仅仅是一种形式上的相加, 这种加法是不是具有“和数”呢? 这个“和数”的确切意义又是什么呢? 为了回答这个问题, 我们先令

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \dots,$$

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = \sum_{k=1}^n u_k, \dots,$$

这样, 对任何一个无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 总可以作出一个数列 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k (n=1, 2, 3, \dots)$,

并称 S_n 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 n 次部分和 (简称部分和), 称数列 $\{S_n\}$ 为级数的部分和数列. 反之, 从一个数列 $\{S_n\}$, 也可以作出一个级数, 使这个级数的部分和数列恰恰就是 $\{S_n\}$, 实际上这只要取

$$u_1 = S_1, u_2 = S_2 - S_1, u_3 = S_3 - S_2, \dots,$$

$$u_n = S_n - S_{n-1}, \dots,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 就是所要求的级数.

定义 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于有限值 S , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k = S,$$

则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S,$$

并称此值 S 为级数的和数. 若部分和数列 $\{S_n\}$ 发散, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. 当级数收敛时, 又称

$$r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots$$

为级数的余和.

例 1 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 的部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]. \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] = 2,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 收敛, 其和为 2, 亦即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2.$$

例 2 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ 的部分和数列为

$$S_1 = 1, S_2 = 0, \cdots, S_{2n-1} = 1, S_{2n} = 0, \cdots,$$

部分和数列发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ 发散.

由此可见, 研究无穷级数的收敛问题, 实质上就是研究部分和数列的收敛问题, 这就能够应用已经知道的有关数列极限的知识来研究无穷级数.

首先, 给出收敛级数的一些基本性质.

性质 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, a 为任一常数, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} au_n$ 亦收敛, 并且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} au_n = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 S_n , 由假设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S,$$

S 为一有限数. 又设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} au_n$ 的部分和为 S'_n , 显然有 $S'_n = aS_n$, 再按数列极限性质知道

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} aS_n = aS,$$

这就是

$$\sum_{n=1}^{\infty} au_n = aS = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

性质 2 若两个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛, 并且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

利用数列极限的运算法则即可获得证明.

性质 3 一个收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 对其项任意加括号后所成级数

$$(u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + \cdots + u_{i_2}) + \cdots$$

仍为收敛, 且其和不变.

证明 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$, 加括号后的级数的部分和数列为 $\{A_n\}$, 明显有

$$A_1 = u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1} = S_{i_1},$$

$$A_2 = (u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + u_{i_1+2} + \cdots + u_{i_2}) = S_{i_2},$$

...

$$A_n = (u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + u_{i_1+2} + \cdots + u_{i_2}) + \cdots + (u_{i_{n-1}+1} + u_{i_{n-1}+2} + \cdots + u_{i_n}) = S_{i_n},$$

...

可见, $\{A_n\}$ 实际上是 $\{S_n\}$ 的一个子数列, 故由 $\{S_n\}$ 的收敛性立即推得 $\{A_n\}$ 也收敛, 且其极限值相同.

要注意的是: 加括号后的级数为收敛时, 不能断言原来未加括号的级数也收敛, 例如级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

加括号后成为

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots,$$

它收敛于零, 但原来未加括号的级数是发散的.

性质 4 (收敛的必要条件) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则 $u_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. 亦即收敛级数的一般项必趋于 0.

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 由于

$$u_n = S_n - S_{n-1},$$

得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

这一性质告诉我们, 当考察一个级数是否收敛时, 首先应该考察当 $n \rightarrow \infty$ 时, 这个级数的一般项 u_n 是否趋于零, 如果 u_n 不趋于零, 那么立即可以断言这个级数是发散的. 但要注意的是: 一般项 u_n 趋于零只是级数收敛的必要条件, 不是充分条件. 例如级数

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{\text{共2项}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}_{\text{共3项}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{\text{共n项}} +$$