“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

数学分析

第四版（下册）

复旦大学数学系
欧阳光中 朱学炎 金福临 陈传璋 编

高等教育出版社

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

数学分析

第四版（下册）

复旦大学数学系
欧阳光中 朱学炎 金福临 陈传璋 编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书在2007年出版的第三版的基础上作了全面修订。这次修订，主要在文字上作了不少修改，使概念的表述和定理的论证更清晰，读起来也更通顺流畅，适当补充了数字资源（以符号▣标识）。

本书分上下两册，上册内容为极限初论、极限续论、单变量微分学、单变量积分学；下册内容为数项级数和反常积分、函数项级数、多元函数的极限与连续、多变量微分学、多变量积分学。

本书可作为一般院校数学类专业的教材，也可作为工科院校以及经济管理类院系中数学要求较高的专业的数学教材。

图书在版编目（CIP）数据

数学分析．下册／欧阳光中等编．--4版．--北京：高等教育出版社，2018.8
ISBN 978-7-04-049885-1

Ⅰ．①数…　Ⅱ．①欧…　Ⅲ．①数学分析-高等学校-教材　Ⅳ．①O17

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第120351号

项目策划　李艳馥　兰莹莹　李　蕊
策划编辑　兰莹莹　　责任编辑　张晓丽　　封面设计　张志奇　　版式设计　杜微言
插图绘制　于　博　　责任校对　刘丽娴　　责任印制　刘思涵

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市西城区德外大街4号
邮政编码　100120
印　　刷　河北鹏盛贤印刷有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　18.5
字　　数　380千字
购书热线　010-58581118
咨询电话　400-810-0598
网　　址　http://www.hep.edu.cn
　　　　　http://www.hep.com.cn
网上订购　http://www.hepmall.com.cn
　　　　　http://www.hepmall.com
　　　　　http://www.hepmall.cn
版　　次　1978年5月第1版
　　　　　2018年8月第4版
印　　次　2018年8月第1次印刷
定　　价　37.60元

物 料 号　49885-00

数学分析

第四版（下册）

复旦大学数学系

欧阳光中　朱学炎　金福临　陈传璋　编

1. 计算机访问http://abook.hep.com.cn/127965，或手机扫描二维码、下载并安装Abook应用。
2. 注册并登录，进入“我的课程”。
3. 输入封底数字课程账号（20位密码，刮开涂层可见），或通过Abook应用扫描封底数字课程账号二维码，完成课程绑定。
4. 单击“进入课程”按钮，开始本数字课程的学习。

课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制，部分内容无法在手机端显示，请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题，请发邮件至abook@hep.com.cn。

扫描二维码
下载Abook应用

数学分析简史（上）

数学分析简史（下）

http://abook.hep.com.cn/127965

目 录

第三篇　级　　数

第一部分　数项级数和反常积分

注　带有 * 号的部分，可视教学需要进行取舍.

第二部分　函数项级数

第四篇　多变量微积分学

第一部分　多元函数的极限论

第二部分 多变量微分学

第三部分　含参变量的积分和反常积分

第四部分　多变量积分学

第三篇 级 数

第一部分 数项级数和反常积分

第九章 数项级数

§1 预备知识:上极限和下极限

先来叙述本篇的一个预备知识,即数列的上极限和下极限. 就其内容来说,这属于极限论的范围.

对于一个有界数列$\{a_n\}$,去掉它的最初k项以后,剩下来的仍旧是一个有界数列,记这个数列的上确界为β_k,下确界为α_k,亦即

$$\beta_k=\sup_{n>k}\{a_n\}=\sup\{a_{k+1},a_{k+2},a_{k+3},\cdots\},$$

$$\alpha_k=\inf_{n>k}\{a_n\}=\inf\{a_{k+1},a_{k+2},a_{k+3},\cdots\},$$

可见$\alpha_k\leqslant\beta_k$. 令$k=1,2,3,\cdots$,于是得到一列$\{\beta_k\}$和一列$\{\alpha_k\}$. 显然数列$\{\beta_k\}$是单调减少的,$\{\alpha_k\}$是单调增加的,所以这两个数列的极限都存在. 我们称$\{\beta_k\}$的极限是$\{a_n\}$的上极限,记它是H. $\{\alpha_k\}$的极限是$\{a_n\}$的下极限,记它是h. 并分别将上极限和下极限记为$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$和$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$. 也就是

$$H=\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\lim_{k\to\infty}\sup_{n>k}\{a_n\}=\lim_{k\to\infty}\beta_k,$$

$$h=\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\lim_{k\to\infty}\inf_{n>k}\{a_n\}=\lim_{k\to\infty}\alpha_k,$$

由于$\alpha_k\leqslant\beta_k$,得$h\leqslant H$.

如果数列$\{a_n\}$无上界,我们就说$H=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=+\infty$;如果数列$\{a_n\}$无下界,就说$h=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=-\infty$.

下面给出上极限和下极限的重要性质.

定理1 设$H=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$,则

(i) 当H为有限时,对于H的任何ε邻域$(H-\varepsilon,H+\varepsilon)$,在数列$\{a_n\}$中有无穷多个项属于这个邻域,而在$(H+\varepsilon,+\infty)$中最多只有有限多个项(包括一项也没有)(如图9-1);

(ii) 当$H=+\infty$时,对任何数$N>0$,在$\{a_n\}$中必有无穷多个项大于N;

(iii) 当$H=-\infty$时,数列$\{a_n\}$以$-\infty$为极限.

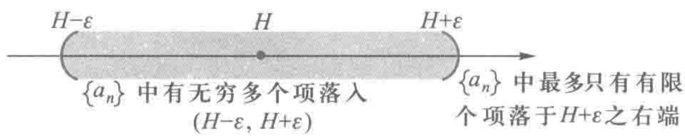

图 9-1

证明　(i) 当$-\infty<H<+\infty$时,假设存在某一正数ε_0,使得在$\{a_n\}$中只有有限多个项大于$H-\varepsilon_0$,那么必存在n_0,当$n>n_0$时,一切a_n皆有$a_n\leqslant H-\varepsilon_0$. 于是上确界

$$\beta_n=\sup\{a_{n+1},a_{n+2},\cdots\}\leqslant H-\varepsilon_0\quad(n>n_0),$$

因此
$$H=\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\lim_{n\to\infty}\beta_n\leqslant H-\varepsilon_0,$$

这与定理的假设矛盾,这就证明了对任何$\varepsilon>0$,在$\{a_n\}$中必有无穷多个项大于$H-\varepsilon$.

再来证明,在$\{a_n\}$中最多只有有限多个项大于$H+\varepsilon$. 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=H$,故存在$N$,当$n>N$时有$\beta_n<H+\varepsilon$,而$\beta_n$又是$\{a_{n+1},a_{n+2},a_{n+3},\cdots\}$的上确界,所以当$n>N$时,对一切正整数$k$成立$a_{n+k}\leqslant\beta_n<H+\varepsilon$,这样就证明了大于$H+\varepsilon$的$a_n$只可能有有限多个(包括一个也没有).

(ii) 当$H=+\infty$时,数列$\{a_n\}$无上界,由此便获得所要的结论.

(iii) 当$H=-\infty$时,对任何$G>0$,存在n_0,当$n>n_0$时

$$a_{n+1}\leqslant\beta_n<-G,$$

这表明$\{a_n\}$的极限为$-\infty$.

到此定理全部证毕.

定理 2　设$h=\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n$,则

(i) 当h为有限时,对h的任何ε邻域$(h-\varepsilon,h+\varepsilon)$,在数列$\{a_n\}$中有无穷多个项属于这个邻域,而最多只有有限多个小于$h-\varepsilon$(包括一项也没有);

(ii) 当$h=-\infty$时,对任何数$N>0$,在数列$\{a_n\}$中有无穷多个项小于$-N$;

(iii) 当$h=+\infty$时,数列$\{a_n\}$的极限为$+\infty$.

证明与定理 1 完全相仿.

定理 3　设H为$\{a_n\}$的上极限,那么,在$\{a_n\}$中必存在一个子列,其极限为H,并且H是$\{a_n\}$中所有收敛子列的极限中的最大值. 设h为$\{a_n\}$的下极限,那么,在$\{a_n\}$中必存在一个子列,其极限为h,并且h是$\{a_n\}$中所有收敛子列的极限中的最小值.

证明　仅以上极限H来证明如下. 分三种情形来考察:

(i) $-\infty<H<+\infty$,由定理 1 知道,必有一个子列$\{a_{n_k}\}$收敛于H. 此外,对任意$\varepsilon>0$,在$\{a_n\}$中只可能有有限多个项大于$H+\varepsilon$,这就表明所有收敛子列的极限绝不会大于$H+\varepsilon$,再由ε的任意性,便得到所有收敛子列的极限必不大于H.

(ii) 当$H=+\infty$时,按定理 1,存在子列$a_{n_k}\to+\infty$,而其他一切收敛子列的极限当然不会大于$+\infty$.

(iii) 当$H=-\infty$时,此时$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$,故数列$\{a_n\}$的一切子列都以$-\infty$为极限.

这样便证明了定理.

这一定理表明,在一个有界数列$\{a_n\}$中,它的所有收敛子列的极限所组成的数集必有最大值和最小值,并且这个最大(小)值正是$\{a_n\}$的上(下)极限.

推论　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$(有限或无穷大)的充要条件为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n=\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n=A.$$

这个推论容易从定理3得到.

例1　$a_n=n+(-1)^n n\ (n=1,2,3,\cdots)$.

它只有两个具有极限的子数列(包括极限为∞的情形):a_{2k}和$a_{2k+1}(k=1,2,3,\cdots)$.前者极限为$+\infty$,后者极限为0,于是

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n=+\infty,\ \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n=0.$$

例2　$a_n=\cos\dfrac{n}{4}\pi\ (n=0,1,2,\cdots)$.

由于$-1\leqslant\cos\dfrac{n}{4}\pi\leqslant1$,当$n=8k\ (k=1,2,\cdots)$时,$a_{8k}\to1\ (k\to\infty)$,当$n=4(2k+1)\ (k=1,2,3,\cdots)$时,$a_{4(2k+1)}\to-1\ (k\to\infty)$,于是有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n=1,\ \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n=-1.$$

习　题

1. 证明:

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$;

(2) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\geqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$.

2. 设$x_n\geqslant0,y_n\geqslant0$,证明:

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_ny_n\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$;

(2) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_ny_n\geqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$.

3. 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,则对任何数列$\{y_n\}$成立:

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$;

(2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n\cdot y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$,若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n>0$.

4. 求下列数列的上极限与下极限:

(1) $a_n=\dfrac{1}{2^{-n}+(-1)^n}\quad(n=1,2,\cdots)$;

(2) $a_n=(-1)^n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\quad(n=1,2,\cdots)$;

(3) $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}\quad(n=1,2,\cdots)$;

(4) $a_n=\sin\dfrac{n\pi}{5}\quad(n=1,2,\cdots)$.

5. 证明:若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=a$,则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_{k_0+n}|}=a$,此处 k_0 是任意固定的整数.

6. 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=a<b$,证明:必存在 N,当 $n>N$ 时,有 $a_n<b$. 又如果 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=a<b$. 情况如何?

§2 级数的收敛性和基本性质

将一系列无穷多个数 $u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n,\cdots$ 写成和式,即

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

这个和式就称为**无穷级数**,并记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$. 这仅仅是一种形式上的相加,这种加法是不是具有“和数”呢?这个“和数”的确切意义又是什么呢?为了回答这个问题,我们先令

$$S_1=u_1,S_2=u_1+u_2,S_3=u_1+u_2+u_3,\cdots,$$
$$S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n=\sum_{k=1}^{n}u_k,\cdots,$$

这样,对任何一个无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,总可以作出一个数列 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(n=1,2,3,\cdots)$,并称 S_n 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的 n **次部分和**(简称**部分和**),称数列 $\{S_n\}$ 为级数的**部分和数列**. 反之,从一个数列 $\{S_n\}$,也可以作出一个级数,使这个级数的部分和数列恰恰就是 $\{S_n\}$,实际上这只要取

$$u_1=S_1,u_2=S_2-S_1,u_3=S_3-S_2,\cdots,$$
$$u_n=S_n-S_{n-1},\cdots,$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 就是所要求的级数.

定义 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于有限值 S,即

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k=S,$$

则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **收敛**,记为

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=S,$$

并称此值 S 为级数的和数. 若部分和数列 $\{S_n\}$ 发散,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **发散**. 当级数收敛时,又称

$$r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots$$

为级数的余和.

例 1　级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 的部分和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right].$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = 2,$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 收敛,其和为 2,亦即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2.$$

例 2　级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1-1+1-1+\cdots$ 的部分和数列为

$$S_1 = 1,\ S_2 = 0, \cdots, S_{2n-1} = 1,\ S_{2n} = 0, \cdots,$$

部分和数列发散,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ 发散.

由此可见,研究无穷级数的收敛问题,实质上就是研究部分和数列的收敛问题,这就能够应用已经知道的有关数列极限的知识来研究无穷级数.

首先,给出收敛级数的一些基本性质.

性质 1　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,a 为任一常数,则 $\sum_{n=1}^{\infty} au_n$ 亦收敛,并且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} au_n = a\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

证明　设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 S_n,由假设

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

S 为一有限数. 又设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} au_n$ 的部分和为 S_n',显然有 $S_n' = aS_n$,再按数列极限性质知道

$$\lim_{n\to\infty} S_n' = \lim_{n\to\infty} aS_n = aS,$$

这就是

$$\sum_{n=1}^{\infty} au_n = aS = a\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

性质 2　若两个级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛,并且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

利用数列极限的运算法则即可获得证明.

性质 3 一个收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，对其项任意加括号后所成级数

$$(u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + \cdots + u_{i_2}) + \cdots$$

仍为收敛，且其和不变.

证明 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$，加括号后的级数的部分和数列为 $\{A_n\}$，明显有

$$A_1 = u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1} = S_{i_1},$$

$$A_2 = (u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + u_{i_1+2} + \cdots + u_{i_2}) = S_{i_2},$$

$$\cdots$$

$$A_n = (u_1 + u_2 + \cdots + u_{i_1}) + (u_{i_1+1} + u_{i_1+2} + \cdots + u_{i_2}) + \cdots + (u_{i_{n-1}+1} + u_{i_{n-1}+2} + \cdots + u_{i_n}) = S_{i_n},$$

$$\cdots,$$

可见，$\{A_n\}$ 实际上是 $\{S_n\}$ 的一个子数列，故由 $\{S_n\}$ 的收敛性立即推得 $\{A_n\}$ 也收敛，且其极限值相同.

要注意的是：加括号后的级数为收敛时，不能断言原来未加括号的级数也收敛，例如级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

加括号后成为

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots,$$

它收敛于零，但原来未加括号的级数是发散的.

性质 4（收敛的必要条件） 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $u_n \to 0\,(n \to \infty)$. 亦即收敛级数的一般项必趋于 0.

证明 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，由于

$$u_n = S_n - S_{n-1},$$

得

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

这一性质告诉我们，当考察一个级数是否收敛时，首先应该考察当 $n \to \infty$ 时，这个级数的一般项 u_n 是否趋于零，如果 u_n 不趋于零，那么立即可以断言这个级数是发散的. 但要注意的是：一般项 u_n 趋于零只是级数收敛的必要条件，不是充分条件. 例如级数

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{\text{共2项}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}_{\text{共3项}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{\text{共}n\text{项}} +$$