

壳体热屈曲理论

李忱 著

非外借



中国工信出版集团



电子工业出版社

<http://www.phei.com.cn>

壳体热屈曲理论

李 忱 著



電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书包括两部分内容：第一部分为绪论和张量初步，主要介绍了张量的概念、代数运算、张量函数及其导数和微分，这部分内容相对独立，可以作为第二部分内容的研究基础；第二部分研究了任意坐标系下壳体的几何方程、本构方程、稳定性方程，并对典型壳体热屈曲问题进行了分析计算。本书重点从张量函数出发，用含有高阶弹性张量的多项式，推导了弹性体非线性热本构方程，包括：构造了一种新的关于各向同性、横观各向同性和正交各向异性张量函数不变量表示形式，导出超弹性各向同性材料、横观各向同性材料二次、三次、四次非线性热本构方程及正交各向异性材料二次、三次非线性热本构方程；用张量方法推导并得到任意坐标系下壳体统一的稳定性方程，退化得到正交曲线坐标系下壳体的稳定性方程，指出并修正了经典著作中球壳稳定性方程的缺陷；将球壳、锥壳、柱壳等特殊壳体作为特例进行了计算研究。

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有，侵权必究。

图书在版编目 (CIP) 数据

壳体热屈曲理论 / 李忱著. —北京：电子工业出版社，2018.11

ISBN 978-7-121-33779-6

I. ①壳… II. ①李… III. ①壳体-热屈曲-研究 IV. ①TH136

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 038985 号

策划编辑：刘小琳

责任编辑：刘小琳 特约编辑：白天明

印 刷：天津千鹤文化传播有限公司

装 订：天津千鹤文化传播有限公司

出版发行：电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编：100036

开 本：787×1092 1/16 印张：10.25 字数：256 千字

版 次：2018 年 11 月第 1 版

印 次：2018 年 11 月第 1 次印刷

定 价：49.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010) 88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：(010) 88254538，liuxl@phei.com.cn。

前 言

壳体热屈曲是当前变形体力学研究中的热点之一。特别是近几十年来,它已经成为多学科交叉的核心课题,引起了力学、材料学、应用数学研究者的极大关注。大多数研究基于温度线性假设,然而,温度非线性是热屈曲研究中不容忽视的重要因素。本书研究了温度非线性情况下的热屈曲问题。首先,用含有高阶弹性张量的多项式系统地研究了弹性体非线性热本构关系,构造了一种新的在温度影响下的各向同性、横观各向同性和正交各向异性张量函数不变量表示形式,给出了各向同性、横观各向同性和正交各向异性张量函数的表示定理;直接从张量函数出发,导出超弹性各向同性材料、横观各向同性材料二次、三次、四次非线性热本构方程及正交各向异性材料二次、三次非线性热本构方程,并根据积分关系导出相应的应变能函数。其次,用张量方法推导出了统一的任意形状薄壳弹性稳定性方程,退化得到正交曲线坐标系下以张量的物理分量表示的方程,进而可以将圆锥壳、球壳、圆柱壳、椭圆壳、椭圆板、矩形板等形式的壳和板作为特例来研究,指出并修改了以 S. P. Timoshenko、W. Flugge 为代表作者的一系列著作中球壳线性稳定性方程的错误。最后,将二次非线性本构方程应用到球壳热屈曲研究中,得到以位移表示的球壳热屈曲方程。运用最小势能原理推导出考虑均布外压和温度耦合作用以位移表示的势能泛函,采用里兹法研究了简支各向同性球壳、圆锥壳、功能梯度球壳的热屈曲问题,分析了温度变化引起的临界压力变化趋势及温度非线性对临界压力的影响。

本书第一部分内容为绪论和张量初步,主要参考了李松年、黄执中编著的《非线性连续统力学》,黄克智、薛明德、陆明万编著的《张量分析》(第2版),黄义、张引科编著的《张量及其在连续介质力学中的应用》及黄筑平编著的《连续介质力学基础》(第2版);第二部分主要内容为作者近年来的研究成果,也部分参考了参考文献中其他作者的研究成果,在此表示感谢。

本书得到国家自然科学基金项目(11372207)的资助。

太原科技大学、山西广播电视大学对本书的出版给予了大力支持。

特别感谢赵子龙教授对本书提出了许多宝贵的意见。

研究生苗亚男同学对本书中的算例进行了计算,冯启隆、廖宇飞同学为本书文字内容进行了录入、校对,在此表示衷心感谢。

完成著作过程中虽然尽全力避免出现公式、数据错误,但是由于水平所限,错误和疏漏在所难免,希望读者批评指正。

作 者

2018年2月

目 录

第一部分

第 1 章 绪论	1
1.1 薄壳屈曲理论	1
1.2 基本概念	4
1.2.1 稳定性的定义及基本概念	4
1.2.2 分支点失稳的判别准则	5
1.3 基本假设	6
第 2 章 张量初步	7
2.1 张量的概念	7
2.2 张量的代数运算	11
2.2.1 张量的相等	11
2.2.2 张量的相加	11
2.2.3 标量与张量的相乘	11
2.2.4 张量与张量的并乘	12
2.2.5 张量的缩并	12
2.2.6 张量的点积	12
2.2.7 张量的叉积	13
2.3 二阶张量	13
2.3.1 二阶张量的矩阵	13
2.3.2 二阶张量的迹	15
2.3.3 二阶张量的不变量	15
2.3.4 转置张量	17
2.3.5 对称张量与反对称张量	18
2.3.6 逆张量	19
2.3.7 几种特殊的二阶张量	19
2.3.8 二阶张量的乘法分解（极分解）	21

2.4 张量函数..... 22

2.4.1 张量函数的定义..... 22

2.4.2 各向同性张量及各向同性张量函数..... 22

2.4.3 张量函数的导数..... 25

2.4.4 向量的协变导数..... 27

2.4.5 张量的微分..... 28

2.5 张量函数的微分..... 29

2.6 张量方程的曲线坐标分量表示方法..... 31

第二部分

第3章 几何方程..... 35

3.1 壳体几何..... 35

3.2 壳体几何张量方程..... 38

3.2.1 壳体的几何变形..... 38

3.2.2 中面应变及中面曲率..... 40

3.3 正交曲线坐标系下的壳体几何方程..... 40

3.4 典型壳体的几何方程..... 41

3.4.1 球壳的几何方程..... 41

3.4.2 圆锥壳的几何方程..... 42

3.4.3 圆柱壳的几何方程..... 43

第4章 本构方程..... 44

4.1 各向同性材料非线性热本构方程和应变能函数..... 44

4.1.1 非线性热本构方程..... 44

4.1.2 非线性应变能函数..... 47

4.1.3 实验分析..... 48

4.1.4 正交曲线坐标系下的热本构方程..... 50

4.2 横观各向同性材料非线性热本构方程和应变能函数..... 51

4.2.1 非线性热本构方程..... 51

4.2.2 非线性应变能函数..... 52

4.3 正交各向异性材料非线性热本构方程和应变能函数..... 53

4.3.1 非线性热本构方程..... 53

4.3.2 非线性应变能函数..... 54

第5章 稳定性方程..... 55

5.1 体元的弹性稳定性方程..... 55

5.1.1 弹性稳定性方程..... 55

5.1.2 平衡方程与稳定性方程的比较..... 57

5.2 任意形状薄壳的稳定性方程	58
5.2.1 x^1 、 x^2 方向的稳定性方程	58
5.2.2 x^3 方向的稳定性方程	59
5.2.3 x^1 、 x^2 方向的力矩平衡	60
5.2.4 稳定性方程	60
5.3 正交曲线坐标系下薄壳的弹性稳定性方程	62
5.3.1 正交曲线坐标系下的几何量	62
5.3.2 正交坐标系下的稳定性方程	63
5.4 正交曲线坐标系下弹性稳定性方程的几个特例	68
5.4.1 正圆锥壳的稳定性方程	68
5.4.2 球壳的稳定性方程	69
5.4.3 圆柱壳的稳定性方程	70
5.4.4 椭圆板的稳定性方程	71
5.4.5 圆板的稳定性方程	72
5.4.6 矩形板的稳定性方程	72
5.4.7 示例	73
5.5 经典著作中稳定性方程的错误	74
第 6 章 常温状态屈曲问题	78
6.1 球壳屈曲问题	78
6.1.1 概述	78
6.1.2 屈曲状态最小势能函数	80
6.1.3 临界载荷	83
6.2 正交各向异性层合球壳屈曲问题	87
6.2.1 几何方程	87
6.2.2 本构方程	88
6.2.3 弹性稳定性方程	89
6.2.4 屈曲方程	90
6.3 正交各向异性薄锥壳屈曲问题	92
6.3.1 几何方程	92
6.3.2 本构方程	93
6.3.3 稳定性方程	94
6.3.4 屈曲方程	95
6.3.5 临界荷载	96
6.4 正交各向异性层合锥壳屈曲问题	97
6.4.1 几何方程	97
6.4.2 本构方程	98
6.4.3 稳定性方程组	99
6.4.4 屈曲方程	99

6.5 斜板屈曲问题	101
6.5.1 物理方程	101
6.5.2 几何关系	103
6.5.3 屈曲方程	104
第7章 热屈曲问题	105
7.1 圆锥壳线性热屈曲问题	105
7.1.1 几何方程	105
7.1.2 热本构方程	106
7.1.3 稳定性方程组	107
7.1.4 临界载荷	110
7.2 薄球壳非线性热屈曲问题	117
7.2.1 几何方程	118
7.2.2 热本构方程	118
7.2.3 稳定性方程	120
7.2.4 势能泛函	121
7.2.5 屈曲方程	123
7.2.6 计算与分析	131
7.3 功能梯度材料球壳热屈曲问题	135
7.3.1 功能梯度材料简介	135
7.3.2 基本公式	137
7.3.3 热屈曲分析	139
附录A 常用符号表	152
参考文献	153

第一部分

第1章 绪论

1.1 薄壳屈曲理论

自从 Euler 第一次提出并解决压杆横向屈曲的弹性稳定性问题以来，在长达 200 年的时间里，人们陆续对杆、板、壳及其组合结构的稳定性问题进行了广泛的研究，提出了各种载荷下的临界载荷，并创立和发展了一系列稳定性理论。

薄壳稳定性理论起步于“小挠度线性理论”，该理论假设挠度 w 与壁厚 t 相比较是小量，亦即 $w_{\max}/t \approx 20\% \sim 25\%$ 。由于挠度是小量，故可以推出应变是位移的线性函数，应力也是位移的线性函数。除了在数学上做线性化处理外，它还假设结构 (Structure) 是“完善”的，所谓“完善”结构是指：载荷系统是理想的（无偏心）；结构在几何上无初始缺陷。在这一假设下，结构的失稳属于分支点 (Bifurcation Point) 失稳。应用上述假设可以导出一个线性稳定平衡的微分方程组，进而可以确定临界载荷。然而，人们通过对圆柱薄壳受轴压这一传统的经典问题的研究发现，实验结果只有线性预测值的 $1/5 \sim 1/2$ 。巨大的差别，引起了许多学者的兴趣，在他们卓有成效的努力下，推演出了一系列各有千秋的稳定性理论。

针对小挠度线性理论，先驱们首先对薄壳失稳后的情形（后屈曲）进行了研究。放松了数学上的线性化处理及结构在几何上无初始缺陷的限制后，提出了大挠度非线性理论（该理论对结构挠度仍假设是小量，但与小挠度理论中的挠度值相比较，它要大得多）。这一假设的研究开始于卡门-佟聂耳（1934 年）。1941 年，卡门-钱学森（简称卡门-钱）在解卡门-佟聂耳大挠度方程的基础上提出了后屈曲分析的一般方法。他们首先指出，载荷—位移（挠度）的非线性关系在薄壳稳定性理论中的重要作用，说明在远低于临界压力的情况下，存在一种后屈曲大挠度平衡位形，由此提出了非线性“跳跃”理论。他们认为这种后屈曲平衡位形很接近实验中所观察到的现象，因此壳体定会由前屈曲平衡位形跳跃到后屈曲平衡位形，这种变形突然变化将造成壳体结构的破坏。他们定义后屈曲平衡位形的最小载荷为“下临界载荷”，建议将以此最小载荷作为设计载荷。这个“下临界载荷”值相当于经典线性临界载荷的 $1/2$ ，接近当时许多实验结果的平均值，因此，在当时看来是合理和可信的。

科学体系就是在不断认识、不断发展的基础上形成的。

随着卡门-钱开创性的工作，三十多年来人们围绕着后屈曲平衡位形问题进行了深入的研究，终于弄清楚了后屈曲大挠度平衡位形的基本性质，研究结果表明，在后屈曲阶段即使

可能存在一种对应于最小载荷的平衡位形,但是这个最小载荷也不是临界载荷。将后屈曲最小载荷定义为“下临界载荷”是不正确的。当然更不适宜将这个最小载荷作为一个设计极限载荷。对于后屈曲平衡位形的深入研究,虽然搞清了圆柱壳轴压屈曲后的基本性质,但对解释理论和实验在临界压力之间的分歧仍然显得平淡无力。

从 20 世纪 60 年代后,斯坦因、菲肖等人从另一途径来解决这一问题,他们详细研究了“非线性壳体前屈曲性质”(放松数学上的线性化条件,但仍然假设结构是完善的)及对屈曲方程和临界压力的影响。斯坦因称之为“非线性前屈曲一致理论”。用电沉积和电解铜等方法制造出“接近完善”的薄壳模型实施实验,有些实验,临界载荷比经典线性值高出 0.82 倍。斯坦因可以用“非线性前屈曲一致理论”比较完美地解释这种实验结果。因此,用精确的非线性前屈曲一致理论和接近完善的模型实验,就可以解释过去经典线性理论与 20 世纪 60 年代以前的圆柱壳轴压实验之间的巨大分歧。扁球壳在外力作用下的失稳问题和圆柱壳轴压问题一样,经典临界压力与实验结果之间有很大差别,布第斯基(Budiansky)等人用非线性前屈曲一致理论处理了周边嵌固和简支的扁球壳的轴对称和非轴对称屈曲,获得的理论临界压力普遍低于经典线性解,而较符合接近完善的扁球壳模型的实验结果。

非线性前屈曲一致理论虽然解释了经典理论和实验结果之间分歧的原因。但是,作为一种理论分析方法,它的处理对象仍然停留在一个理想的完善壳体上,所以应用这一理论仍然难以确定实际壳体结果的临界压力。

实际工程的薄壳结果在几何上不可能是完善的,甚至也不可能接近完善,总是在不同程度上存在各种各样的初始缺陷,因此,必须要寻找一个分析方法以便能够确定由于初始缺陷因素造成的实际结构屈曲强度降低的数量,为了研究初始缺陷对屈曲的影响,荷兰学者柯伊特(W. T. Koiter)早在 1945 年就提出了非完善结构的稳定性一般准则,并由此提出了“缺陷敏感度”的概念。柯伊特理论集中于研究无限临近临界点附近的后屈曲初始阶段的性质,它是将“缺陷敏感度”与理想完善结构的初始后屈曲性能联系起来。一个结构的“缺陷敏感度”是在对于初始后屈曲性质的渐进的准确解意义上求得的,故柯伊特理论称为“初始后屈曲理论”。这种理论解释了各种不同的理想完善结构屈曲后的各种表现的广泛变化,它的实质是证明初始后屈曲性质的变化是由于临界分支点处的平衡位形的稳定和不稳定的差别引起的。然而,如果只限于研究理想的完善结构,就不能解释为什么在实际的结构稳定实验中往往不能获得这一理论的临界分支点。要使实际结构的这种性能获得正确了解就必须进一步研究初始缺陷的影响,这在实际结构中总是存在的。

近年来,人们在研究实际工程结构的稳定性问题中,只要结构是由具有塑性性能金属材料制成的,就可以注意到这些金属结构几乎总是在最低的临界载荷下丧失稳定性,这就表明金属材料的物理非线性往往是影响金属结构稳定性的一个主要因素,就此提出了塑性屈曲理论。

近年来,板壳热屈曲问题越来越受到人们的关注,许多学者对此类问题进行了深入研究。对圆柱壳热屈曲问题的研究主要体现在:1973 年, S. D. Gupta 和 I. C. Wang^[1]研究了在均匀温度场下正交各向异性圆柱壳在简支条件下的热屈曲问题,并考虑膨胀系数的影响,采用里兹法得到了临界温度。1991 年, M. W. Wilcox 等人^[2]根据能量法 Donnell 壳理论,由势能原理用伽辽金法得到简支柱壳的临界温度。1996—2001 年, M. R. Eslami 等人^[3-5]对弹

性圆柱薄壳、复合材料圆柱壳、缺陷圆柱壳的屈曲和热屈曲进行了研究。2002年, X. Wang等人^[6]分析了复合材料层合圆柱壳表面局部脱层的非线性热屈曲问题。2003年, R. Shahsiah和 M. R. Eslami^[7]研究分析了在简支边界条件下, 在不同类型的热载荷作用下功能梯度圆柱壳的屈曲, 并且运用经典的和改进的混合稳定性方程分析了功能梯度圆柱壳的热屈曲。M. R. Eslami等人^[8]研究了几何缺陷对在热载荷作用下的圆柱壳屈曲的影响。2005年, L. Wu等人^[9]基于 Donnell 壳理论, 应用在热载荷作用下的稳定性方程讨论了功能梯度材料制成的圆柱壳的热屈曲问题。2008年, M. Shariyat^[10]对功能梯度复合材料圆柱壳在组合轴压和外压下动态热屈曲突然加热时的温度依赖性加以研究。2012年, H. S. Shen^[11]对功能梯度材料碳纳米管增强复合材料圆柱壳的热屈曲和后屈曲进行了分析。2014—2015年, D. D. Nguyen等人^[12,13]对金属-陶瓷-金属 s-fgm 薄壁圆柱壳在热环境中的温度依赖性进行了研究。对圆锥壳热屈曲问题的研究体现在: 2006年, K. B. Rajesh等人^[14]研究了功能梯度截锥壳的线性热弹性屈曲和自由振动行为。2015年, A. H. Sofiyev^[15]对功能梯度截锥壳的热弹性稳定性问题进行了分析。2008年, R. Naj等人^[16]基于 Sander 非线性壳体理论研究了去顶圆锥壳在热应力载荷下的屈曲行为。2013年, J. Torabi等人^[17]分析了截断 FGM 混合锥壳线性热屈曲问题, 采用最小势能准则建立稳定性方程, 并用单模伽辽金方法得到临界屈曲温度差。2015年, A. H. Sofiyev等人^[18-19]对功能梯度材料圆锥壳的热屈曲进行了深入分析。

球壳热屈曲问题也得到很多人的关注。2001年, M. R. Eslami^[20]深入地研究了薄球壳的热屈曲问题。2003年, R. Shahsiah 和 M. R. Eslami^[21]对不完美球形帽在均布载荷和热负荷下的屈曲进行了分析。并对功能梯度球形扁壳基于 Donnell-Mushtari-Vlasov 理论热不稳定性进行了说明。2003年, R. Shahsiah等人^[22]研究了各向同性材料扁球壳在均匀、径向线性均匀变化和径向非线性均匀变化三种不同温度载荷作用下的稳定性热屈曲问题。2010年, M. R. Eslami等人^[23]研究了功能梯度材料扁球壳在边界简支条件下的热屈曲问题, 分别得到了扁球壳在均匀外压、温度及均匀外压和温度耦合作用下的临界温度。2012年, B. M. Sabzikar等人^[24]研究了功能梯度材料扁球壳的热屈曲问题, 考虑温度均匀、沿径向线性均匀变化及沿径向非线性均匀变化三种温度载荷的作用时, 扁球壳的临界温度。2015年, T. T. A. Vu等人^[25]对薄环球壳的非线性稳定性进行了研究, 分析了功能梯度材料 (FGM) 在外部压力和温度作用下的热屈曲问题, 应用伽辽金法分析了弹性基础、外压和温度对环向球面非线性稳定性的影响。

统观薄壳的各种稳定理论, 不外乎是围绕三个主题: 物理线性与非线性, 几何线性与非线性, 结构完善与非完善。这些理论, 由这三环扣成了密切相关的锁链, 形成了和谐统一的整体。

薄壳失稳问题属于非线性范畴, 但是一些重要的、基本的结果却仍然是从线性理论获得的, 无缺陷的、完善薄壳的经典小挠度解, 对于许多类型的壳体仍然是分支点临界载荷。非线性大挠度理论曾经企图寻求一种“下临界载荷”以取代“上临界载荷”(小挠度线性解)来解释当时理论与实验的巨大分歧。但是, 后来的理论分析和实验研究指出“下临界载荷”实际并不存在。前屈曲一致理论虽然以否定小挠度线性解作为开始, 但是最后仍然在一定条件下肯定了小挠度线性解。初始后屈曲理论集中于研究无限邻近分支性临界点附近的初始后

屈曲的各种性质。所以这些近代稳定理论虽然对于分支性载荷前后的平衡路线有各种不同的观点,但是他们对于肯定小挠度解作为分支性临界载荷值的价值是统一的。

本书从张量函数出发,用含有高阶弹性张量的多项式系统地研究了弹性体非线性热本构关系:构造了一种新的在温度影响下的各向同性、横观各向同性和正交各向异性张量函数不变量表示形式,给出了各向同性、横观各向同性和正交各向异性张量函数的表示定理;直接从张量函数出发,导出超弹性各向同性材料及横观各向同性材料二次、三次、四次非线性热本构方程,正交各向异性材料二次、三次非线性热本构方程,根据积分关系导出相应的应变能函数。在以往的研究中采用先假设应变能与不变量的关系,再根据微分关系导出本构方程的办法。虽然两种方法对于弹性体是等价的,但本书的方法更直接、更能精确地描述材料的物理本质,可以直接适用于工程实际中常见的非保守系统问题。

本书用张量的方法推导出了任意形状薄壳的统一的弹性稳定性方程,并在正交曲线坐标系下化成了以张量的物理分量表示的方程,进而可以将正圆锥壳、球壳、圆柱壳、椭圆壳、斜板、圆板、矩形板等形式的壳和板作为特例来研究。本书指出并修改了以 S. P. Timoshenko 为代表作者的一系列著作^[36-46]中,球壳受均匀外压,在轴向对称干扰时,稳定性方程的错误。

热屈曲问题是固体力学的热点问题之一,大多数研究基于温度线性假设,然而温度非线性是热屈曲研究中不容忽视的重要因素。本书研究了在温度非线性情况下各向同性材料、功能梯度材料球壳、锥壳的热屈曲问题。首先,根据张量的方法推导得到各向同性材料非线性热本构方程、轴对称球壳稳定性方程。将二次非线性本构方程应用到屈曲研究中,得到以位移表示的热屈曲方程。考虑外压和温度的共同作用,运用最小势能原理推导以位移表示的势能泛函,采用里兹法计算了典型壳体的热屈曲问题,分析了温度变化引起的临界压力变化趋势和温度非线性对临界压力的影响。

本书的另一个新意在于使用了张量这一锐利的数学工具,这样就避免了由于空间思维的局限性带来的这样或那样的错误。在近代许多书籍中,使用张量的程度通常是写方程时把张量作为一种方便的速记符号。这样使用虽然是无害的,但是在很大程度上遮掩了张量的简洁性、完美性,而张量的简洁性和完美性在本书中得到了充分体现。

1.2 基本概念

1.2.1 稳定性的定义及基本概念

从结构是否完善出发,可以归纳出两种对稳定的定义。其一,是从工程实际出发,以不完善的系统的压杆为模型,从开始加力,杆件就产生压弯现象,当侧向挠度迅速增大则将失去承载能力,此时的载荷(极限载荷)即为临界载荷,这种失稳称为极值点失稳。其二,是从完善结构出发,给出分支点失稳的定义,该定义突出了平衡状态的改变是失稳的主要特征。例如,当载荷达到某一值时,由于外界干扰的作用,压杆就会由初始直线平衡状态变为由稳定到不稳定的临界状态,此时对应的载荷称为临界载荷,而新的弯曲平衡状态称为屈曲状态,如图 1.1 (b)、(c) 所示,C 点即为分支点。超过此点(属于后屈曲理论研究的范

畴)可能有两种不同的平衡状态,图 1.1 (b) 中直线平衡是不稳定的,弯曲平衡才是稳定的。又如薄板和薄壳的分支点失稳,同样是以平衡状态的改变来定义的,即从初始的薄膜受力状态转变为有矩受力状态。

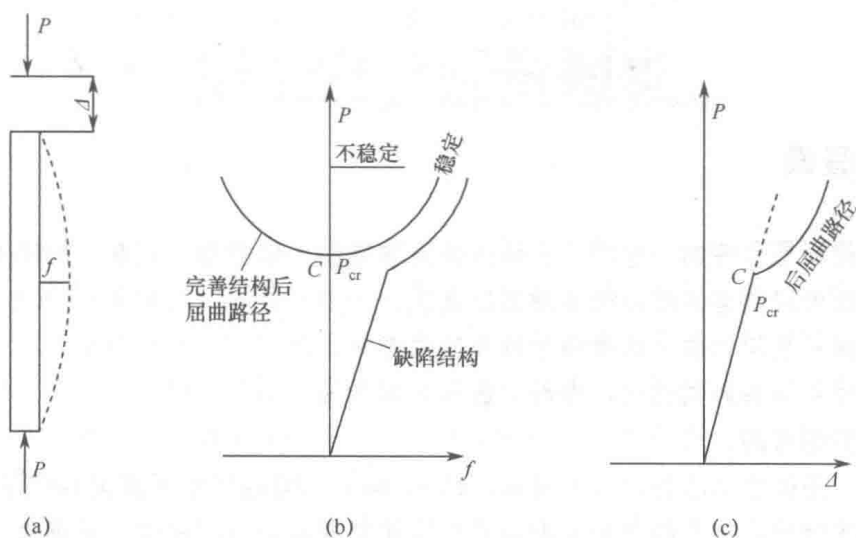


图 1.1 结构屈曲类型

1.2.2 分支点失稳的判别准则

判断平衡稳定性最常用的准则有两个——静力准则和能量准则。

1. 静力准则

满足静力平衡条件的某结构体系,当受微小的扰动使其偏离原来的平衡位置时,若扰动去除后该体系能迅速恢复到原来的平衡位置,则原来的平衡状态是稳定的;若受到微小扰动后该体系偏离原来平衡位置的越来越大,则原来的平衡状态是不稳定的;若去除干扰后该体系在新的位置上平衡,则原来的平衡状态称为随机(或临界)平衡状态。使结构处于临界平衡状态的载荷称为临界载荷(Critical Load),这就是稳定的静力准则。

2. 能量准则

设被考察系统的初始平衡状态总势能为 Π_0 , 邻近状态的总势能为 Π_1 , 将 Π_1 在初始平衡位置上展开成泰勒级数为

$$\Pi_1 = \Pi_0 + \delta\Pi_0 + \frac{1}{2}\delta^2\Pi_0 + \dots$$

则

$$\Delta\Pi = \Pi_1 - \Pi_0 \approx \delta\Pi_0 + \frac{1}{2}\delta^2\Pi_0$$

对于平衡状态有 $\delta\Pi_0 = 0$ 。如果 $\Delta\Pi > 0$, 则系统初始平衡状态稳定;反之,如果 $\Delta\Pi < 0$, 则初始状态不稳定;如果 $\Delta\Pi = 0$, 则初始平衡状态是临界平衡状态。在临界平衡状态特定干扰位置的势能 Π_1 同基本平衡状态的势能相等,可以推出, Π_1 在特定的干扰位置也取得极值,因而有 $\delta\Pi_1 = 0$, $\delta^2\Pi_1 = 0$ 。

概而括之

$$\delta \Pi_0 = 0 + \begin{cases} \Delta \Pi > 0 & \text{或} & \delta^2 \Pi_0 > 0 & \text{稳定} \\ \Delta \Pi < 0 & \text{或} & \delta^2 \Pi_0 < 0 & \text{不稳定} \\ \Delta \Pi = 0 & \text{或} & \delta^2 \Pi_0 = 0 & \text{临界} \\ \delta \Pi_1 > 0 & \text{并} & \delta^2 \Pi_1 = 0 & \text{临界} \end{cases}$$

1.3 基本假设

- (1) 壳体材料是连续的。这样，壳体的任何物理量，如应力、应变、位移等才可能是连续变化的，因而可以用坐标的连续函数加以表达。
- (2) 壳体材料是均匀的，即弹性常数与位置无关。
- (3) 壳体材料是各向同性的，弹性常数与方向无关。
- (4) 壳体是完善的。
- (5) 平行于壳体中面的各层互不挤压，即 $\sigma_{33} \approx 0$ ，可以应用平面应力状态的物理方程。
- (6) 直法线假设：变形前垂直于中面的直线在变形后仍保持直线，并仍垂直于变形后的中面，即 $\gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$ 。
- (7) 由于 $w_{\max}/t \leq 25\%$ ，故假设挠度 w 沿壳厚度的变化可以略去。因而认为在同一厚度各点的挠度都等于中面的挠度，记作 $u^3 = w$ 。

这里需要注意，这个论断不是直法线假设的一部分，使用时必须小心。切不可将这个假设包含的推论 $\epsilon_{33} = 0$ 放入胡克定律中；不然，由推断 $\epsilon_{33} = 0$ 就将给出 $\sigma_{33} \neq 0$ 的结果。

规定：弯矩、扭矩、剪应力及薄膜应力的正方向规定如图 1.2 (a)、(b) 所示，图 1.2 中弯矩、扭矩按右手定则用双箭头矢量表示。坐标系为右手系， x^3 规定向上为正。

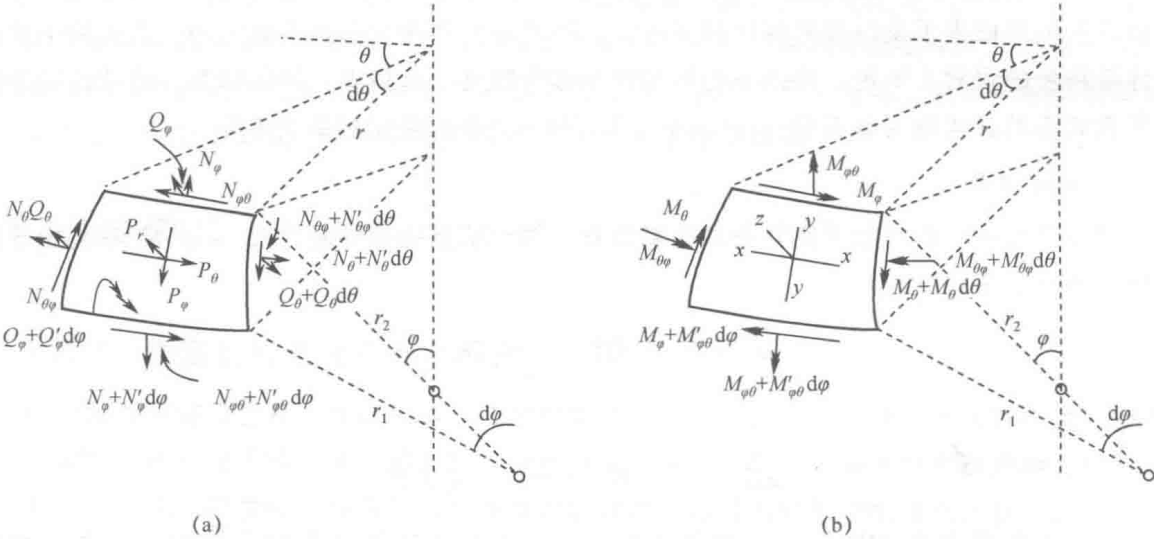


图 1.2 壳体内力及应力正方向

第 2 章 张量初步

用数学方法研究运动规律时,人们通常要选取某一坐标系,坐标系的建立使研究成为可能,但也往往使问题复杂化。运动规律在本质上与坐标系无关,但是运动规律常常在特定坐标系下描述,这就使规律的本质信息与坐标系带来的与规律无关的信息交织在一起。不仅可能影响人们的研究思路,而且可能掩盖问题的实质,破坏规律的普遍性。张量及相关的理论体系解决了这个问题,用张量描述的规律在任意坐标系下形式相同,这就消除了坐标系的影响,使人们对客观规律本质的认识更加深刻。

作为弹性介质非线性本构关系的数学基础,本章将对张量的初步知识作简要介绍。

2.1 张量的概念

1. 逆变张量

如果 n 维向量空间的一个向量 $\mathbf{T}$ 在空间任意一组基 $\mathbf{g}_i$ (协变基向量) 下都可以用 k 个指标编号的 n^k 个有序数 $T^{i_1 i_2 \dots i_k}$ 来表示,即 $\mathbf{T} = T^{i_1 i_2 \dots i_k} \mathbf{g}_{i_1} \mathbf{g}_{i_2} \dots \mathbf{g}_{i_k}$, 并且空间基按 $\mathbf{g}^{j'} = \beta_j^{j'} \mathbf{g}^j$ 变换时,有序数组 $T^{i_1 i_2 \dots i_k}$ 按以下规律变换

$$T^{i'_1 i'_2 \dots i'_k} = \beta_{i_1}^{i'_1} \beta_{i_2}^{i'_2} \dots \beta_{i_k}^{i'_k} T^{i_1 i_2 \dots i_k} \quad (2.1)$$

$\mathbf{T}$ 称为 n 维空间向量的 k 阶 (逆变) 张量。有序数 $T^{i_1 i_2 \dots i_k}$ 为张量 $\mathbf{T}$ 在对应基下的坐标分量,也称为张量 $\mathbf{T}$ 的逆变分量,有时亦称为 k 阶逆变张量。

2. 协变张量

如果 n 维向量空间的一个向量 $\mathbf{T}$ 在空间任意一组基 $\mathbf{g}^i$ (逆变基向量) 下都可以用 k 个指标编号的 n^k 个有序数 $T_{i_1 i_2 \dots i_k}$ 来表示,即 $\mathbf{T} = T_{i_1 i_2 \dots i_k} \mathbf{g}^{i_1} \mathbf{g}^{i_2} \dots \mathbf{g}^{i_k}$, 并且在空间基按 $\mathbf{g}_{i'} = \beta_i^{i'} \mathbf{g}_i$ 变换时,有序数组 $T_{i_1 i_2 \dots i_k}$ 按以下规律变换

$$T_{i'_1 i'_2 \dots i'_k} = \beta_{i_1}^{i'_1} \beta_{i_2}^{i'_2} \dots \beta_{i_k}^{i'_k} T_{i_1 i_2 \dots i_k} \quad (2.2)$$

$\mathbf{T}$ 称为 n 维向量空间的 k 阶 (协变) 张量。有序数 $T_{i_1 i_2 \dots i_k}$ 为张量 $\mathbf{T}$ 在对应基下的坐标分量,也称为张量 $\mathbf{T}$ 的协变分量,有时亦称为 k 阶协变张量。

3. 混合张量

如果 n 维向量空间的一个向量 $\mathbf{T}$ 在空间任意一组基下都可以用 k 个上标和 l 个下标的 $n^{(k+l)}$ 个有序数 $T^{i_1 i_2 \dots i_k j_1 j_2 \dots j_l}$ 来表示,即 $\mathbf{T} = T^{i_1 i_2 \dots i_k j_1 j_2 \dots j_l} \mathbf{g}^{i_1} \mathbf{g}^{i_2} \dots \mathbf{g}^{i_k} \mathbf{g}_{j_1} \mathbf{g}_{j_2} \dots \mathbf{g}_{j_l}$, 并且在空间基按 $\mathbf{g}_{i'} = \beta_i^{i'} \mathbf{g}_i$ 和 $\mathbf{g}^{j'} = \beta_i^{j'} \mathbf{g}^i$ 变换时,有序数组 $T^{i_1 i_2 \dots i_k j_1 j_2 \dots j_l}$ 按以下规律变换

$$T_{i_1 i_2 \dots i_l}^{j_1 j_2 \dots j_k} = \beta_{j_1}^{i_1} \beta_{j_2}^{i_2} \dots \beta_{j_k}^{i_k} \beta_{i_1}^{j_1} \beta_{i_2}^{j_2} \dots \beta_{i_l}^{j_l} T_{i_1 i_2 \dots i_l}^{j_1 j_2 \dots j_k} \quad (2.3)$$

T 称为 n 维空间向量的 $(k+l)$ 阶张量。有序数 $T_{i_1 i_2 \dots i_l}^{j_1 j_2 \dots j_k}$ 为张量 T 在对应基下的坐标分量, 有时也称为 $(k+l)$ 阶 (k 阶逆变, l 阶协变) 混合张量。

根据上述定义, 必须强调以下内容:

(1) 如果一个张量的所有分量在某个坐标系中均为零, 则在任何其他坐标系中也必然为零。

(2) 由物理关系得到的方程如果是张量方程, 那它就在所有允许变换的坐标系成立, 这样就能使我们做到在特定的坐标系下处理问题, 得到的张量方程又不依赖于坐标系。

(3) 在 n 维空间中, 一个 r 阶张量分量的数目等于 n^r , 三维空间为 3^r , 二维空间为 2^r 。例如, 三维空间二阶张量分量个数为 3^2 即 9 个分量。标量为零阶张量, 分量数为 $n^0 = 1$, 即只有 1 个分量。矢量为二阶张量, 对于三维空间有 3 个分量 ($3^1 = 3$)。

4. 协变基向量和逆变基向量

任意曲线坐标 $\{x^k\}$, 其任意一点的位置矢量为 r , 则定义自然基向量为 $g_k = \frac{\partial r}{\partial x^k}$ (协变基向量), 对偶基向量 (逆变基向量) 为 g^k 。

(1) 对任意曲线坐标 g_k 中的每一个具体的基向量都可能不是单位向量, 可能具有量纲, 只有当坐标曲线是直线时, 基向量才可能是单位向量。

例如, 笛卡儿坐标系中各点的 g_k 相同, $r = xi + yj + zk$ 则

$$g_1 = \frac{\partial r}{\partial x}, g_2 = \frac{\partial r}{\partial y}, g_3 = \frac{\partial r}{\partial z}, |g_1| = |g_2| = |g_3| = 1$$

根据平面斜角坐标系中的协变基向量, 求出 $|g_\xi|$ 及 $|g_\eta|$ 。设平面斜角坐标系的坐标参数为 ξ 和 η , 由图 2.1 有

$$x = \xi + \eta \cos \alpha, y = \eta \sin \alpha \quad (2.4)$$

所以

$$r = (\xi + \eta \cos \alpha) e_1 + \eta \sin \alpha e_2 \quad (2.5)$$

所以

$$g_\xi = g_1 = \frac{\partial r}{\partial \xi} = e_1 \quad (2.6)$$

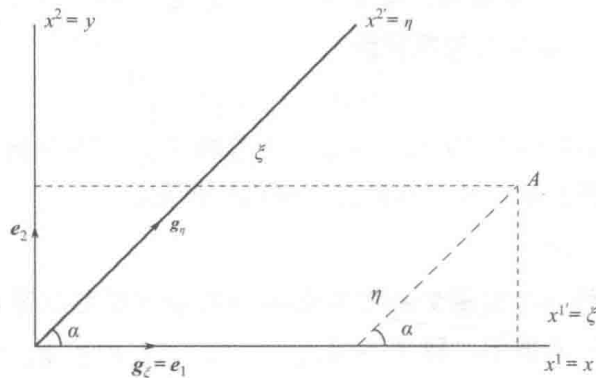


图 2.1 平面斜角坐标系

$$\mathbf{g}_\eta = \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} = \cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_2$$

显然, 这两个向量夹角为 α , 大小分别为 $|\mathbf{g}_\xi| = 1, |\mathbf{g}_\eta| = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}} = 1$ 。

(2) n 维空间中 n 个线性无关的向量可以构成基向量, 对于三维空间, 三个非共面的向量可以构成基向量。

(3) $\mathbf{g}_k$ 的方向是点坐标曲线的切线方向。

(4) 协变基向量 $\mathbf{g}_j$ 和逆变基向量 $\mathbf{g}^i$ 之间满足 $\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$, 统一写成对偶条件: $\mathbf{g}^i \cdot$

$\mathbf{g}_j = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$, 式中 δ_j^i 称为 Kronecker 符号。对于三维空间, $\delta_i^i = \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 = 3$ 。

(5) 将逆变基向量 $\mathbf{g}^i$ 作为矢量对协变基向量 $\mathbf{g}_j$ 分解, $\mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j$ 且有 $\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j = g^{ij}$ 。同样, 将协变基向量 $\mathbf{g}_j$ 作为矢量对逆变基向量 $\mathbf{g}^i$ 分解, $\mathbf{g}_j = g_{ij} \mathbf{g}^i$ 且有 $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = g_{ij}$ 。 g^{ij} 称为度量张量的逆变分量, g_{ij} 为度量张量的协变分量。可以看出, 基向量有指标升降关系, 而起升指标作用的是度量张量的逆变分量 g^{ij} , 起降指标作用的是度量张量的协变分量 g_{ij} , 且有如下关系式

$$\begin{aligned} |\mathbf{g}_k| &= \sqrt{\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}_k} = \sqrt{g_{kk}} \\ g_{*k} g^{km} &= \mathbf{g}_* \cdot \mathbf{g}_k g^{km} = \mathbf{g}_* \cdot \mathbf{g}^m = \delta_*^m \end{aligned} \quad (2.7)$$

写成矩阵形式为

$$[\mathbf{1}] = [\delta_*^m] = [g_{*k}][g^{km}] \quad (2.8)$$

式中, $[\mathbf{1}]$ 为单位矩阵。

还可以证明

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad g^{ij} = g^{ji} \quad (2.9)$$

在正交坐标系中

$$g_{ij} = g^{ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad (2.10)$$

例如, 圆柱坐标系 $x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = z$ 。可以得出: $g_{11} = g_{33} = 1, g_{22} = r^2, g_{12} = g_{21} = g_{13} = g_{31} = g_{23} = g_{32} = 0$ 。

再如, 球坐标系 $x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$ 。可以得出: $g_{11} = \frac{1}{g^{11}} = 1, g_{22} = \frac{1}{g^{22}} = r^2, g_{33} = \frac{1}{g^{33}} = (r \sin \theta)^2, g_{12} = g_{21} = g_{13} = g_{31} = g_{23} = g_{32} = 0$ 。

(6) 逆变基向量与不同指标的协变基向量正交, 也不一定是单位向量, 而且可以具有量纲。对于三维空间, 如果协变基向量 $\mathbf{g}_2 \mathbf{g}_3$ 沿点曲线坐标的切线方向构成切平面, 则 $\mathbf{g}^1$ 的方向沿切平面法线方向。

例 2.1: 求笛卡儿坐标系中的逆变基向量。

因为 $\mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{g}_2 = 0, \mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{g}_3 = 0, \mathbf{g}^1 \cdot \mathbf{g}_1 = 1$

所以 $\mathbf{g}^1$ 是与 $\mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ 垂直的单位向量, $\mathbf{g}^1 = \mathbf{1}$; 同理, $\mathbf{g}^2 = \mathbf{g}^3 = \mathbf{1}$ 。

例 2.2: 求平面极坐标系中的协变基向量和逆变基向量。

设: $\mathbf{r} = r \cos \theta \mathbf{e}_1 + r \sin \theta \mathbf{e}_2$, 取坐标 $x^1 = r, x^2 = \theta$, 得