高等数学

上册

主　编　唐晓文
副主编　唐燕贞　李林　兰友发

高等教育出版社

高等数学

上册

主　编　唐晓文
副主编　唐燕贞　李　林　兰友发

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是以教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制定的“大学数学课程教学基本要求(2014年版)”为指导，结合应用型本科院校数学教学的特点编写的。全书分上、下两册，上册主要内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用。全书结构严谨、理论系统、案例丰富、实用性强。主要章节都配有A组和B组两组习题，每章配有综合题，题型齐全，难易适中，并将数学建模的思想方法融入教材。

本书纸质教材与数字课程一体化设计，配合紧密。数字课程涵盖小结、应用案例、数学建模概述、数学实验概述、数学家故事、期末考试试卷等栏目，希望提升应用型本科院校高等数学课程的教学效果，同时为学生的学习提供思维与探索的空间。

本书可作为应用型本科院校非数学类专业的高等数学教材，也可作为相关专业学生考研的资料，还可供科技工作者和广大师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上册/唐晓文主编.--北京:高等教育出版社,2018.9

ISBN 978-7-04-050484-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①唐… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第203316号

策划编辑 李晓鹏　责任编辑 李晓鹏　特约编辑 安 琪　封面设计 张申申
版式设计 于 婕　插图绘制 于 博　责任校对 陈 杨　责任印制 田 甜

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	三河市吉祥印务有限公司		http://www.hepmall.com
开　　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	13.5		
字　　数	280千字	版　　次	2018年9月第1版
购书热线	010-58581118	印　　次	2018年9月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	28.70元

物 料 号　50484-00

高等数学

上册

唐晓文 唐燕贞

李 林 兰友发

连广鑫 张代清

王明锋

1 计算机访问http://abook.hep.com.cn/1250751，或手机扫描二维码、下载并安装Abook应用。

2 注册并登录，进入“我的课程”。

3 输入封底数字课程账号（20位密码，刮开涂层可见），或通过Abook应用扫描封底数字课程账号二维码，完成课程绑定。

4 单击“进入课程”按钮，开始本数字课程的学习。

课程绑定后一年为数字课程使用有效期。受硬件限制，部分内容无法在手机端显示，请按提示通过计算机访问学习。

如有使用问题，请发邮件至abook@hep.com.cn。

http://abook.hep.com.cn/1250751

前言

高等数学是普通高等院校理工类与经济管理类各专业必修的公共基础课程。它的理论和方法已广泛地渗透到各个学科领域,在国民经济与科学技术中的地位与作用也被越来越多的人们所认同。本书是以教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制定的“大学数学课程教学基本要求(2014版)”为指导,结合应用型本科院校数学教学的特点编写的。

在编写过程中,我们总结了多年的教学实践成果,汲取了国内外优秀教材的特点,结合了信息化教学的新趋势,以“简明扼要+注重应用”为基本原则,以“纸质教材+数字课程”为设计理念,分10章系统地讲解了函数、极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分及其应用,向量代数与空间解析几何,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数,常微分方程等内容。全书具有以下几方面的特点:

1. 内容形式科学合理

以“纸质教材+数字课程”的形式对内容进行整体设计。纸质教材内容简明精炼,通过正文设置旁白的方式对正文内容进行解释说明、归纳总结,数字课程对纸质教材内容进行巩固提高、补充拓展,形成以纸质教材为核心,数字课程为配合的综合知识体系。数字课程涵盖小结、应用案例、数学建模概述、数学实验概述、数学家故事、期末考试试卷等栏目。

2. 注重大学中学衔接

为了使大学知识与中学知识更好地衔接,在第1章前给出了常用初等代数公式、常用的三角函数和反三角函数等式等预备知识;同时,因为平面极坐标是积分中经常用到的重要内容,因此,在第5章中比较详细地介绍了平面极坐标与直角坐标的关系,给出了一些常用曲线的极坐标方程,为后面的学习奠定了一定的理论基础。

3. 淡化理论加强训练

有些章节中淡化了定理证明的推导过程。既简明易懂,又解决了课时少内容多的矛盾。同时,本书配备了相当丰富的习题,包括填空、选择、计算、应用等多种题型。目的是使学生理解基本概念和基本定理的实质,掌握重要的解题方法和应用技巧。主要章节配有A组和B组两组习题,A组题是基础题,可作为课后作业选用;B组题是提高题,可作为对数学有兴趣的学生进一步学习及考研训练使用。

4. 案例教学提高兴趣

每章配有比较丰富的应用案例,这也是本书的特色之一。例如在讲定积分时,给出了火箭飞行速度问题;在讲二重积分时,给出了通信卫星的信号覆盖率问题;在讲曲线积分时,给出了变力所做的功的问题,以此提高学生学习数学的兴趣,调动学生学习数学的积极性。

5. 建模思想渗透始终

将数学建模和数学实验的思想渗透到高等数学的教学中,一直是高等数学教育改

革的努力方向。本书将与高等数学课程各章节紧密呼应的数学建模和数学实验内容作为数字资源,它既可以供学生自学,也可以供教师参考,着重培养学生分析问题和解决问题的能力。

本书的编写大纲由唐晓文提出,并经过编者充分讨论而确定。具体分工如下:预备知识、第1章至第5章由唐燕贞编写,第7章、第8章及数学建模概述、数学实验概述由李林编写,第6章、第9章及第10章由唐晓文编写,全书的习题及参考答案由兰友发编写,连广鑫、张代清、王明锋分别做了应用案例、数学家故事、习题的编写和订正工作,全书最后由唐晓文统稿定稿。

在编写过程中编者参考了书后所列的参考文献,对参考文献的作者表示衷心的感谢。本书的出版还得到高等教育出版社和福建工程学院领导及高等数学课程团队的大力支持,在此一并表示感谢。

虽然编者力求本书通俗易懂、简明流畅、突出应用、便于教学,但由于水平有限,能否达到这一目的,还期待得到专家、同行和读者的批评指正。

编　者

2018年5月

目　　录

预备知识

一、常用初等代数公式

1. 对数的运算性质($a>0$ 且 $a\neq1$)

(1) $\log_a(x\cdot y)=\log_a x+\log_a y$　　(2) $\log_a\dfrac{y}{x}=\log_a y-\log_a x$

(3) $\log_a x^b=b\cdot\log_a x$　　(4) $a^{\log_a x}=e^{\ln x}=x$

2. 指数的运算性质($a>0$ 且 $a\neq1$)

(1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$　　(2) $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

(3) $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$　　(4) $(a\cdot b)^m=a^m\cdot b^m$

3. 常用二项展开式及分解公式

(1) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$　　(2) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(3) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$　　(4) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

(5) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$

(6) $(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ma^{n-m}b^m+\cdots+C_n^nb^n$

其中组合系数 $C_n^m=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$, $C_n^0=1$, $C_n^n=1$

二、一些常用的三角函数和反三角函数等式

1. 同角三角函数的基本关系式

倒数关系:$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$, $\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$, $\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$

商的关系:$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

平方关系:$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$, $1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$

2. 两角和与差的三角函数公式

(1) $\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$　　(2) $\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$

(3) $\tan(x\pm y)=\dfrac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}$

3. 三角函数的倍角公式

(1) $\sin 2x=2\sin x\cos x$

(2) $\cos 2x=\cos^2x-\sin^2x=2\cos^2x-1=1-2\sin^2x$

(3) $\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2x}$

4. 三角函数的和差化积公式

(1) $\sin x+\sin y=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$　　(2) $\sin x-\sin y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$

(3) $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ (4) $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

5. 三角函数的积化和差公式

(1) $\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$

(2) $\cos x\sin y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$

(3) $\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$

(4) $\sin x\sin y=-\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$

6. 万能公式

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}},\quad \cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

7. 反三角函数有关等式

(1) $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}, x\in[-1,1]$

(2) $\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}, x\in(-\infty,+\infty)$

8. 三角函数的基本不等式

(1) 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时,有 $\sin x<x<\tan x$

(2) 对于一切 x(x 为弧度),有 $|\sin x|\leqslant x$

第1章　函数、极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象,也是高等数学中最重要的基本概念之一.极限的概念是微积分的理论基础,极限的方法是研究变量的一种基本方法.连续是函数的一个重要性态.本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质.

1.1　函数

1.1.1　集合

"集合"是数学中的一个重要概念,现代数学各个分支几乎都构筑在严格的集合理论上.为今后学习的需要,本节从介绍微积分所涉及的有关集合的一些基本知识开始.

1. 集合与元素

所谓集合,就是具有某种特定性质的事物的全体,简称集,组成这个集合的事物称为该集合的元素,简称元.通常用大写字母 $A,B,X,Y,\cdots$ 表示集合,用小写字母 $a,b,x,y,\cdots$ 表示元素.若集合不含任何元素,则称为空集,记为 $\varnothing$.仅含有限个元素的集合称为有限集,否则,称为无限集.

若元素 x 在集合 A 中,则称 x 属于 A,记为 $x\in A$;若元素 x 不在集合 A 中,则称 x 不属于 A,记为 $x\notin A$.

设 A,B 是两个集合,若集合 A 中的元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的子集,记为 $A\subseteq B$(读为 A 包含于 B),或 $B\supseteq A$(读为 B 包含 A).

若集合 A 和 B 互为子集,即 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则称集合 A 和集合 B 相等,记为 $A=B$.

若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$,则称 A 是 B 的真子集,记为 $A\subsetneq B$.

有时我们在表示数集的字母的右上角标上"∗"来表示该数集内排除0后,剩余元素组成的集合,标上"+"来表示该数集内排除0与负数后,剩余元素组成的集合.

例如,一般用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集,$\mathbf{N}^+$ 表示正整数集,$\mathbf{Z}$ 表示整数集,$\mathbf{Q}$ 表示有理数集,$\mathbf{R}$ 表示实数集,则 $\mathbf{N}^+\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.另外,通常用 $\mathbf{R}^*$ 表示非零实数集,$\mathbf{R}^+$ 表示正实数集.

2. 集合的表示方法

表示集合的方法有两种,一种是枚举法,即把集合中的元素一一列举出来,如

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},\quad \mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\};$$

另一种是描述法,即把元素的特性描述出来,如

$$\mathbf{R}^+=\{x\mid x>0\};$$

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}^+,\text{且 } p \text{ 和 } q \text{ 互质}\right\}.$$

3. 集合的运算

集合的基本运算有并、交、差三种.

设 A,B 是两个集合,由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的并集(简称并),记为 $A\cup B$,即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$.

一般地,n 个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并集记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$,即

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{x\mid x\in A_1\text{ 或 }x\in A_2\cdots\text{ 或 }x\in A_n\}.$$

由所有属于 A 又属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的交集(简称交),记为 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

一般地,n 个集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交集记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$,即

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\{x\mid x\in A_1\text{ 且 }x\in A_2\cdots\text{ 且 }x\in A_n\}.$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的差集(简称差),记为 $A\backslash B$,即 $A\backslash B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$.

有时我们仅把问题限于某一个确定的集合 X 中进行,所研究的其他集合 A 是它的子集,这时称集合 X 为全集或基本集,称 $X\backslash A$ 为 A 的余集或补集,记为$\complement_X A$. 即

$$\complement_X A=\{x\mid x\in X\text{ 且 }x\notin A\}.$$

集合的并、交、差三种运算满足下列法则:设 A,B,C 为任意三个集合,则有

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$;

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(2) 分配律 $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$,

$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$;

(3) 对偶律$\complement_X(A\cup B)=\complement_X A\cap\complement_X B$,

$\complement_X(A\cap B)=\complement_X A\cup\complement_X B$.

这些法则都可根据集合相等的定义验证.

为了表达的方便,引入逻辑记号"$\forall$"表示"对于任意给定的"或"对于每一个";引入记号"$\exists$"表示"存在".

此外,我们还可以定义两个集合的笛卡儿乘积.

设 A,B 是任意两个集合,$\forall x\in A,y\in B$,组成一个有序对(x,y),把这样的有序对作为新元素,它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的笛卡儿乘积或直积,记为 $A\times B$,即 $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A$ 且 $y\in B\}$.

例如,$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $y\in\mathbf{R}\}$ 即为 xOy 面上全体点的集合,$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

直积可以推广到多个集合,例如:$\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y,z)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R},z\in\mathbf{R}\}$ 即为空间上全体点的集合. $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记为 $\mathbf{R}^3$.

4. 区间和邻域

区间是一类用得较多的数的集合. 设 a 和 b 为实数,且 $a<b$.

数集$\{x\mid a<x<b\}$称为开区间,记为(a,b),即$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$.

数集$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$称为闭区间,记为$[a,b]$,即$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

数集$\{x \mid a<x \leqslant b\}$和$\{x \mid a \leqslant x<b\}$均称为半开区间,分别记为$(a,b]$和$[a,b)$.

a,b 称为上述各区间的端点,数 $b-a$ 称为区间长度,由于 a,b 是有限的实数,故上述各区间均称为有限区间. 此外引进记号$+\infty$(读为正无穷大)和$-\infty$(读为负无穷大),则可类似地表示无限区间,例如$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$和$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$等均为无限区间. 全体实数的集合 **R** 也可记作$(-\infty,+\infty)$,它也是无限区间.

以后在不需要明确所讨论区间是否包含端点,以及是有限还是无限区间时,就简称为"区间",并且常用字母 I 表示它.

邻域也是常用到的一类集合.设 $\delta>0$,则开区间$(a-\delta,a+\delta)$称为 a 的一个 δ 邻域,记为 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\},$$

其中点 a 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径,如图 1.1 所示. $U(a,\delta)$也可表示为$\{x \mid |x-a|<\delta\}$.

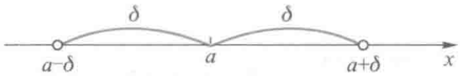

图 1.1

另外,把开区间$(a-\delta,a)$称为 a 的左 δ 邻域,把开区间$(a,a+\delta)$称为 a 的右 δ 邻域.不关心 δ 的大小时,就将 a 的邻域表示为 $U(a)$.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉,由于 $0<|x-a|$ 表示 $x \neq a$,故集合$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$不包含点 a,称为点 a 的去心 δ 邻域,记为$\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

1.1.2 函数

1. 函数概念

在研究实际问题时,常常有几个量同时变化,它们的变化往往不是彼此独立的,而是相互联系着,其间的关系复杂,为了便于研究,我们先考察两个变量之间的关系.下面是一些具体的例子.

例 1.1.1 圆的面积 S 与它的半径 r 的关系,由公式 $S=\pi r^2$ 确定. 当半径 r 取某一正数时,圆的面积 S 相应地有一个确定的数值.

这个例子表达了两个变量之间的依赖关系,这种依赖关系给出了一种对应规律.根据这种对应规律,当其中一个变量在某一范围内取值时,另一个变量就有一个确定的值与之对应,两个变量间的这种对应关系就是函数关系.

定义 1.1.1 设 x 和 y 是两变量,D 是一个给定的非空数集,若存在对应法则 f,使得当变量 x 在其变化范围 D 内任意取定一个数值时,变量 y 按照对应法则 f,总会取到唯一确定的数值和 x 对应,则称 f 是定义在 D 上的函数,记为

$$y=f(x), \quad x \in D.$$

此时 x 称为自变量,y 的值由它所依赖的变量 x 所确定,故称 y 为因变量. 数集 D 称为函数 f 的定义域. 对 $x_0 \in D$,按照法则 f,总有确定的值 y_0(记为 $f(x_0)$)与之对应,称 $f(x_0)$为函数 f 在 x_0 处的函数值. 函数值的集合$\{f(x) \mid x \in D\}$称为函数 f 的值域,用 $f(D)$或 R_f表示.即

$$R_f=f(D)=\{f(x) \mid x \in D\}.$$

函数概念的几点说明：

(1) 表示函数的符号是可以任意选取的，除了常用的 f 外，还可用其他的英文字母或希腊字母，如"g""ϕ""ψ""F"等. 相应地，函数记为 $y=g(x)$，$y=\phi(x)$，$y=\psi(x)$ 或 $y=F(x)$ 等. 有时，还可以用因变量的符号表示函数，即 $y=y(x)$.

(2) 函数的定义中有两个基本要素：定义域与对应法则. 若两个函数的定义域相同，对应法则也相同，则这两个函数是相同的函数，否则就是不同的函数.

(3) 函数定义域的确定通常有两种方式：一种是对有实际背景的函数，根据它的实际意义来确定定义域. 另一种是不考虑函数的实际意义，只抽象地研究用数学式表示的函数，这时约定：函数的定义域就是自变量所能取的使数学式有意义的一切实数值. 这种定义域称为函数的自然定义域. 例如函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的自然定义域是 $[-1,1]$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的自然定义域是 $(-1,1)$.

一般来说，给出一个函数的具体表达式的同时，应该指出它的定义域. 否则默认它的定义域就是自然定义域.

例 1.1.2 求函数 $f(x)=\dfrac{\ln(3-x)}{\sin x}+\sqrt{5+4x-x^2}$ 的定义域.

解 要使函数 $f(x)$ 有意义，必须有 $\begin{cases}3-x>0,\\ \sin x\neq 0,\\ 5+4x-x^2\geqslant 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x<3,\\ x\neq n\pi\,(n\in\mathbf{Z}),\\ -1\leqslant x\leqslant 5,\end{cases}$ 所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $D=\{x\mid -1\leqslant x<3, 且\ x\neq 0\}$.

例 1.1.3 判断下列每对函数是否相同，并说明理由.

(1) $f(x)=|x|$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$；

(2) $f(x)=\dfrac{x}{x}$ 与 $g(x)=1$.

解 (1) 这两个函数的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，且 $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$，故它们为同一函数；

(2) $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，故它们为不同函数.

2. 函数的图形

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，对于任意取定的 $x\in D$，对应的函数值为 $y=f(x)$. 这样，以 x 为横坐标，y 为纵坐标就在 xOy 平面上确定了一点 (x,y). 当 x 取遍 D 上的每一个数值时，就得到点 (x,y) 的一个集合 C，即 $C=\{(x,y)\mid y=f(x), x\in D\}$. 则点集 C 称为函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的图形(图 1.2)，图中的 R_f 表示函数的值域.

3. 函数的表示法

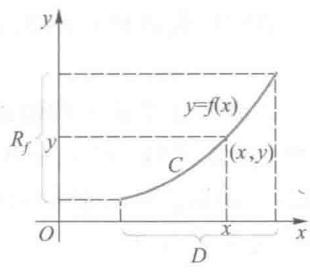

图 1.2

熟知的函数的表示法有三种：表格法、图形法和解析法. 表格法，即变量间的函数关系用列表的方法来表示，这种方法有利于查找函数值. 例如，火车的时刻表、银行的外汇兑换表，等等. 图形法，即在坐标平面上把函数的图形描绘出来. 解析法，即把变量间的函数关系用方程给出，这些方程通常称为函数的解析表达式. 具体地，又分为三种

情形:

(1) 显函数,即函数 y 由 x 的解析式直接表示出来,例如 $y=\arctan x+x^2$.

(2) 隐函数,即 x 和 y 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定,例如 $xy+\ln y=1$.

(3) 分段函数,即一个函数在其定义域的不同范围内具有不同的解析表达式.

下面给出几个分段函数的例子,以及它们的图形表示.

例 1.1.4 函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数,其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{-1,0,1\}$,它的图形如图 1.3 所示.

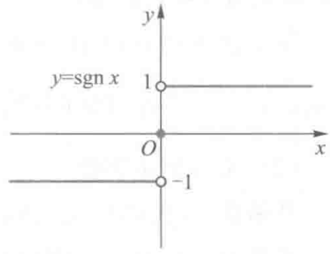

图 1.3

例 1.1.5 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

称为绝对值函数,其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$,它的图形如图 1.4 所示.

例 1.1.6 函数

$$y=f(x)=\begin{cases}-x, & x<0,\\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & x>1\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$.它的图形如图 1.5 所示.

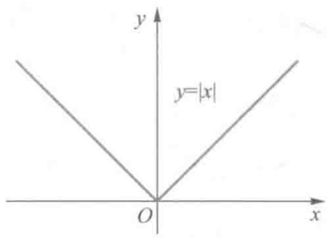

图 1.4

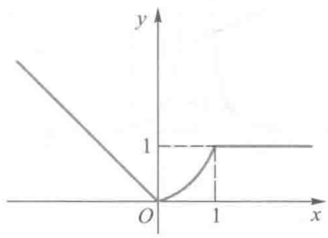

图 1.5

例 1.1.7 函数

$$y=[x]=n,\quad n\leqslant x<n+1, n\in\mathbf{Z}$$

称为取整函数,即 x 是任意实数,y 是不超过 x 的最大整数,记为 $[x]$,如 $\left[\dfrac{3}{2}\right]=1$, $[-2.5]=-3$,其中定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\mathbf{Z}$. 它的图形如图 1.6 所示.

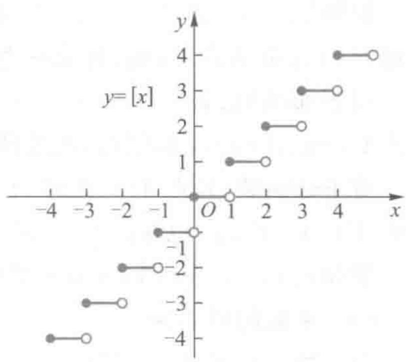

图 1.6

注 分段函数是用几个式子合起来表示一个函数,而不是几个函数.另外,它也可以用无限多个式子来表示一个函数,如例 1.1.7.

4. 函数的几种特性

(1) 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $X\subset D$,如果 $\exists K_1$,使得 $\forall x\in X$,有 $f(x)\leqslant K_1$,则称函数 $f(x)$ 在