辗转相截法

张仁达　著

◆公度，辗转相截求公度
◆用辗转相截法说实数
◆研究无限辗转相截而研究无理数
◆祖冲之辗转相截（缀）圆考
◆辗转相截法于f(x)= a 方程的数值解

甘肃文化出版社

辗转相截法

- ◆公度，辗转相截求公度
- ◆用辗转相截法说实数
- ◆研究无限辗转相截而研究无理数
- ◆祖冲之辗转相截（缀）圆考
- ◆辗转相截法于$f(x)=a$方程的数值解

张仁达　著

甘肃文化出版社

图书在版编目（CIP）数据

辗转相截法 / 张仁达著. -- 兰州 : 甘肃文化出版社, 2017.11
ISBN 978-7-5490-1494-1

Ⅰ. ①辗… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①圆周率 Ⅳ. ①O123.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第294213号

辗转相截法
张仁达 | 著

责任编辑 | 甄惠娟
封面设计 | 苏金虎

出版发行 | 甘肃文化出版社
网　　址 | http://www.gswenhua.cn
投稿邮箱 | press@gswenhua.cn
地　　址 | 兰州市城关区曹家巷 1 号 | 730030(邮编)

营销中心 | 王　俊　　贾　莉
电　　话 | 0931-8454870　　8430531(传真)

印　　刷 | 甘肃新华印刷厂
开　　本 | 787 毫米×1092 毫米 1/16
字　　数 | 93 千
印　　张 | 7.75
版　　次 | 2017 年 11 月第 1 版
印　　次 | 2017 年 12 月第 1 次
书　　号 | ISBN 978-7-5490-1494-1
定　　价 | 38.00 元

绪　论

无理数是怎么让人避不了地进入人们的生活，进入数学的？

“无限不循环小学称为无理数”是老师说的，从中学到大学，什么时间简单明白清晰地讲过？“实数系是连续数系”该是“自然结论”还是要证的“假设”？

人生“识数”也是糊涂始啊！要弄清楚这些问题，还得捡起这“辗转相截法”，说“捡起”就是说历史上有过，而又丢了！

人们从 0，1 起经+，-，×，÷，数（shǔ）出了有理数（shù）。这是对离散个体的数（shǔ）行为。然可以沿袭此道走到“实数”吗？似乎是行不通的。无理数，历史地讲，人们是几何地遇到！

当人们确定了一个单位长度的线段，要以此为尺度去度量任一线段的长度时，不是所有线段都可让这尺度 E 或 10^{-1}E，10^{-2}E，……等十进十分刻度准确量出长度。1957 年刚上高中时，几何老师在几何课中给我们插讲了“公度”和“辗转相截法”：①a，b 二线段有公度线段 c，即 a=pc，b=qc，p，q 是二正整数，则有 a/b=p/q，c 被约掉，而两线段之比是两整数比；②二线段 a,b 的公度，用辗转相截法求得；③存在二线段无公度情形，并几何作图地例举了等腰直角三角形直角边和斜边间的辗转相截，呈现为层层相似的无限过程，永远找不到这二线段

的公度！这时，还有二线段的“比”而言么？若直角边就是单位长，我们还可说斜边的长度么？至2014年，我认这是“无理数”之渊源！开始了我的以辗转相截法研究实数，尤其打开研究无理数的大门。

吾首先是沿高中几何老师举的等腰直角三角形入，试将其几何作图辗转相截过程以等式形式表出，这是费了不少周折的！$\sqrt{2}$ 是坚决不能在等式中出现的！最后还是几何式表。以 E 表直角边，以 X 表斜边，以 $C_0>C_1>C_2>\cdots\cdots$ 表步步整截之余线段，规范了辗转相截过程之等式表达：$X=E+C_0$，$E=2C_0+C_1$，$C_0=2C_1+C_2$，$C_1=2C_2+C_3$，$C_2=2C_3+C_4$，……。并依此，讨论了 $\sqrt{2}$ 的亏盈序列。因题目小了，没有向外露，有关公度和辗转相截法等概念和基本算法详见§1，这就是本册最基础最简单的工具。

翻京华出版社2007年第7次版车纪坤、李斯编著《自然与科学之谜》，书言祖冲之是怎么得到密率355/113（此为世界称之祖率）的，因祖冲之《缀术》丢了，祖冲之之方法至今是谜。书中讲了后来人之探求，不是套“割圆术”便是“连分数术”等，都没结果。就是没人去细究《隋书·律历志》之载录：

> 以圆径一亿为一丈。圆周盈数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒七忽，朒数三丈一尺四寸一分五厘九毫二秒六忽。正数在盈朒二限间。密率：圆径一百十三，圆周三百五十五；约率：圆径七，圆周二十二。

中国人言度量长度为“丈量”，工具“丈”定“丈量”中之“单位长”。这里，以圆径 D 为单位长线段度量圆周 L，这便为祖冲之之基本为！将 L 直化也可（如车迹），将 D 丝线柔化也可。依祖冲之是“缀”，

故吾断言，是将 D 柔化而在圆弧上“缀”。再看，有“圆径一百十三”言，也有“圆径七”言，显然密率、约率是在不同公度下说的。故祖冲之是辗转相截法也。吾用一兆峰瓷碗扣出一圆，其径恰 113mm，辗转截而缀，得此册§8 中之缀圆图。三缀而记：$L=3D+C_0$，$D=7C_0+C_1$，$C_0=15C_1+C_2\approx16C_1$，于图中明明白白出！依“舍”“入”其余而得 $\frac{25}{8}<\frac{L}{D}<\frac{22}{7}$（约掉的是 C_0），$\frac{333}{106}<\frac{L}{D}<\frac{355}{113}$（约去的是 C_1），老祖宗之密率、约率自然出！“以圆径为一丈”是说以什么为单位长，而“以一亿为一丈”则是分数化小数时之小数点定位。在何处，算盘会计都会在算盘上贴示个、十、百、千、万、十万、百万、千万、亿！而“丈量”之“丈”应定在“亿”位，从“千万”到“十”，是尺、寸、分、厘、毫、秒、忽，末空之“个位”是计算时的四舍五入位，故“以一亿为一丈”实际为“计算技术”限制语！再高精度分式，这样化小数，都只能有七位有效小数！

在直观截得的 $L=3D+C_0$，$D=7C_0+C_1$，$C_0=15C_1+C_2$，$C_1=C_2+C_3$（$C_0=15C_1+C_2\approx16C_1$，便有 $C_1=C_2+C_3$）后，我们用了“待定 K”法。这不是“试算法”，而是由辗转相截法构造未知而确定的无理数（也包括有理数）的辗转相截构成的行之有效方法（于§7，我们专讲“待定 K”法）。也动用了计算机，验证了只有取 10 位小数，才可依 $C_2=KC_3$，逐 K 计算 $\frac{L}{D}(K)$，从一大数表前后比较，确定

$$K=292,\ \frac{L}{D}=3.1415926530,\ K=293,\ \frac{L}{D}=3.1415926539,$$

恰为 $\frac{L}{D}(K)$ 的亏、盈变！从而定 $C_2=292C_3+C_4$，并定 $\frac{103993}{33102}<\frac{L}{D}<$

$\frac{104348}{33215}$为二精率!

推想，“待定 K”法老祖宗也该是可为的，祖冲之是“专政数术”者，《隋书》中不是有“助教”二字？以 K 记人之编号，组织几百人“算盘比赛”完全办得到。问题就在“以一亿为一丈”的只能报七位小数的技术限制，致使 $K=211 \sim K=457$ 的几百人答出 $\frac{L}{D}=3.1415926$ 或 $\frac{L}{D}=3.1415927$，故《隋书》文中也只能以此言盈、朒二长度数值，而无其分式率表达。

2014 年谷雨时节，我们以一页快讯《揭示老祖宗冲之法（辗转相截法)》（见影印件（一））报捷，托在北京的陆浩向科学院备案，表明祖冲之谜中国人自己解决了！陆浩索要考证文章，五一节吾赶出《祖冲之辗转相截圆率考》（由于解古人句而轻了辗转相截法之述)，而现今人们对辗转相截法普遍陌生，吾六一又赶《再谈辗转相截法》，七月又有“待定 K”法解方程。连续几文陆浩转请科学院同志审。

科学院朱尧辰老先生是认真审阅吾之几文者，朱老评审意见（见影印件（二））中肯定了我的一些东西然而似乎回避了直言辗转相截法，将几何的辗转相截法与数论里的连分数法“比”，说是“一致的”而又有“不够准确”语！

毛院长是与我直接电话、短信者，第一次她来电问我之文章是说代数的还是几何的，我回答，我的文章是说中国人怎么讲实数的。

我的文章点睛点就在，$X=nE+C_0$ 是几何丈量记，为原点到 x 点的线段，而 $x=\frac{X}{E}=n+\frac{C_0}{E}$是数！我是表实数为：

$$x=\frac{X}{E}=n+\frac{C_0}{E}$$

而开实数之新论。由 C_0 与 E 的辗转相截是有限步便整截无余而终止，

还是为无限不休的辗转相截过程，区分$\frac{C_0}{E}$是“有理”还是“无理”。在无理数的无限辗转过程 $E=m_0C_0+C_1$，$C_0=m_1C_1+C_2$，$C_1=m_2C_2+C_3$，$\cdots$，$C_{i-1}=m_iC_i+C_{i+1}$，……中任一步，都可对该步之余作“舍”，“入”而于该步“中止”辗转而由此返回得无理数$\frac{C_0}{E}$的有理数近似值，由“舍”与“入”，可得的实为一盈一亏两个值。随 i 变，便得无理数$\frac{C_0}{E}$的盈、亏二有理数序列逼近，详见§2 述。事实上，以 p/q 表有理数，以有理数序列 p_i/q_i 逼近无理数，全世界人都如此，然而无理数$\frac{C_0}{E}$是连续数轴上确凿点的用长度表示的数坐标！有理序列只是数字表达的“手段”。

影印件（三）为吾从解恩泽、赵树智二老编著的《数学思想方法纵横论》摘出的一页，他们以度量中的“不可公度”情形之存在，回答“无理数是怎么引入的”。这与我以 $X=nE+C_0$ 说“丈量”，以 $x=\frac{X}{E}=n+\frac{C_0}{E}$说长度数，以 C_0 与 E 间“有公度”“无公度”言$\frac{C_0}{E}$是“有理数”“无理数”是完全一致的。解老、赵老是可敬的先吾之师！然而，不知他二老为何也言及了“公度”却又回避了“辗转相截求公度”，也是要先将有理数（整数、分数、零）“转”为整数、有限小数、无限循环小数，尔后再以“无限不循环小数”来说“无理数”（这样的“转”也是够费力的，现行的教育就是这样从中学讲到大学，然讲清楚了么?）。

以无限辗转相截说无理数，无理数有“理”可理了，就在理其无限辗转相截的规律，而逐一地得新结果。2014 年，吾理了“K 等比截”，2015 年又理了“(1，K) 循环截”，这两类无限辗转截合之，在 (0，1) 的如下：

$$(0,\ \cdots,\ \frac{1}{K+1},\ \frac{1}{K},\ \cdots,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4}\cdots\frac{K}{K+1},\ \frac{K+1}{K+2},\ \cdots,\ 1)$$

各子区间中，各嵌入了一个无理数，有$\frac{C_0}{E}$的准确根式表达，而逼近$\frac{C_0}{E}$的有理数序列可递推生成。还得了从$\sqrt{x}$得$\sqrt{x+1}$（或反向）的步进开平方公式序列。2016 年，就在整理此册时，又得更一般的关于“循环截”的结果：一个无限循环辗转相截过程，如循环节长是 l，则极限地看，一定有$\frac{C_0}{E}=\frac{C_L}{C_{L-1}}$，只要记 E 长为 1，C_0 长为 x，则 C_1 长便为（$1-m_0x$），往后逐一代之，各 C_i 都可表为 x 的一次式。应等式$\frac{C_0}{E}=\frac{C_L}{C_{L-1}}$，则有关于 x 的一个二次方程，由此，$\frac{C_0}{E}=X$ 便为此二次方程的根。而任意一个无限辗转相截过程（m_0，m_1，m_2，……），总可以 L=1，2，3，…的循环截（m_0，m_0，…），（m_0，m_1；m_0，m_1；…），（m_0，…，m_{L-1}；m_0，…，m_{L-1}；…），…，逼近（付里叶思想法）。由此便知，任一个无理数可依此思路用二次方程根式表达的无理数序列逼近。这些便为本册§3、§4、§5、§6。

从§2 起到这几节的讨论，我们不是在表实数为 $x=n+\frac{C_0}{E}$后，以讨论 C_0 与 E 的辗转相截，而开了实数的新论么!

以 $x=n+\frac{C_0}{E}$表实数，更一般的以 $x=\alpha+(\beta-\alpha)\frac{C_0}{E}$表方程 $f(x)=a$ 在（α、β）内之根，以“待定 K”法构造 C_0，E 间的辗转相截结构，得套住 x 的层层区间套，此法可为其他许多数值解法之难为，要方有方，思想大解放！ §9 我们以较典型例讲明方法要点，读者可随心而用其所欲。

此书中之选例，尤用“待定 K”法开 n 次方，求单极值和解方程的§7、§9 中之例，是求尽可能典型，是辗转相截法可为，而其他方法难为或不能为的。比如 $y=x\sin x$，我们用了观峰（或谷）法，求其在（0，π）中的极大，在（π，2π）中的极小。若用 $y'=0$ 法，$\tan x+x=0$ 这方程也只有用“待定 K”法解方便。

2016 年元月，成渝高铁通，几位内江高中同学聚。都是苍苍白发人，然谈起 1957 年那堂课还是浓浓兴致！清培还讲了他找老师之问，在等腰直角三角形中的辗转相截为什么就是没完没了。现在才方知，只有我们才如此幸运！这也决定了我们在传承辗转相截上有义不容辞之责任。

辗转相截法总算捡起来了，当年老师之滴水，今成涌泉，并出版而得以广传。我们不负师恩，不负祖宗，不负民族，不负国家，不负这伟大的时代！这是“复兴”的一页，这是“振兴”的一贞！

仁达

2016 年 3 月

辗转相截法本身就是最直观简单明白的“收敛”性方法：$E>C_0>C_1>C_2>\cdots\cdots C_{i-1}>C_i>\cdots\cdots$，只要 $C_{i-1}>C_i$ 还是非零长度的二有限长度线段，就会 $C_{i-1}=m_iC_i+C_{i+1}$ 地辗转截下去，所以是无限截则一定有 C_i 的长度 $|C_i|\xrightarrow[i\to\infty]{}0$。“舍” C_{i+1}，“入” C_{i+1} 为一个 C_i，“中止”辗转而以 C_i 为公度返算回去，得 $C_0=P_iC_i$，$E=Q_iC_i$；本质的实为 $P_iC_i\xrightarrow[P_i\to\infty]{|C_i|\to 0}C_0$，$Q_iC_i\xrightarrow[Qi\to\infty]{|C_i|\to 0}E$，曹冲也知道，大石头称不准象时用一船沙子称象！

“待定 K”法是在可判 $\dfrac{C_0}{E}(K)$ 相对于 $\dfrac{C_0}{E}$ 是盈或亏时，将§2 中“舍”“入”得 $\dfrac{C_0}{E}$ 的一盈一亏方法逆过来，而解答问题中也是去构造

E，C_0间的辗转相截式，这还要什么“收敛”证明？辗转相截法就是这样无强条件地给人最大自由！

这本子是仁达模样版本，吾是快走的人了，相信还会有年轻人各人以各人之长再辗转下去，永远！永远！

仁达

2016年9月

2017年是新时代、新征程，从甘肃做起与2016年版比较，这版又有两大亮点：

一、①是理清了“辗转除”与“辗转截”的关系，当a=pc，b=qc，(a>b)为有公度二线数。则由p，q间的辗转除，可决定a、b间的辗转截！详见§1。②a、b辗转截又任二线段都可为的。恰是无限辗转截被人们丢了！只留“不可公度”字。并以“无限不循环小数”以关入牢笼！

二、无循环节已知的无限循环截都可有逼近$\frac{C_0}{E}$的有理序列的递推生成；$\frac{C_0}{E}$都可有带二次根式的确凿式。收敛慢的短循环节者，可以nl构成长循环节而“加鞭”！加速收敛。

仁达

2017年10月于医院

影印件（一）

揭示老祖宗冲之法（辗转相截法）

——谷雨时节一页快讯

D. 直经线段　L. 圆周长线段　Ci 辗转截之余, i 偶. 余在 L 上, i 奇. 余的 D 上（由此决 L/D 亏. 盈）

序号	辗转相截式	中止辗转公度	L/D 亏值序列	L/D 盈值序列
①	$L=3D+C_0$	D	3	4
②	$D=7C_0+C_1$	C_0	25/8	22/7
③	$C_0=15C_1+C_3$	C_1	333/106	355/113
④	$C_1=C_2+C_3$	C_2	688/219	355/113
⑤	$C_2=KC_3$	C_3	103993/33102	104348/33215

（取十位小数考察，⑤可定为 $C_2=292C_3+C_4$）

祖冲之只在⑤取八位小数计算而七位小数公布小数结果：3.1415926（亏），3.1415927（盈），而确定继续辗转相截 式，需取十位小数，由

K=292　　L/D=103993/33102=3.1415926530

K=293　　L/D=104348/33215=3.1415926539

而定！

附：老祖宗冲之之著《缀术》失传，故史只《隋书•律历志》有其七位小数盈亏结果和密率 355/113、约率 22/7，此表由张仁达考而揭示，其子张舸助以⑤步之机算。祖宗辗转冲之登高峰，吾辈岂能辗转总犹疑？

张仁达（1942-）重庆兵器工业职工大学早年副校长，数学教授。曾任专科、本科、研究生及高级技工工程师继续教育多学科课程，多篇数学、哲学论文核心刊物发表，应用课题获科技进步奖。
联系电话：张仁达　15923972071　张舸：13808362558

-3-

影印件（二）

毛院长：

转去我院资深（已退休）研究员朱尧辰先生对张仁达一组论文的评审意见，**见附件**。

我个人**同意朱尧辰先生对张仁达论文的意见**，文中**结论正确，但这些结论均是**现代数学中**已知的**。

另，个人认为这些论文**不适合在研究性的数学刊物发表**，但可投稿到一些**普及性（供大中学生学习的）数学刊物**，利于学生掌握基础知识。

由于数学院在全力准备并于明天向科学院提交数学院落实"率先行动计划"的实施方案，未能及时提供论文评审意见，抱歉。

祝好！　　潘建中（数学与系统科学研究院）

附件：评审意见

4--7 张仁达的一组论文（计 4 篇）

（1）　《揭示老祖宗冲之法（辗转相截法）》

本文简明地叙述了祖冲之的确定密率和约率（π的近似值）的方法，数学上无误。

（2）　《祖冲之辗转相截圆率考》

本文考证了失传的祖冲之的求圆率的辗转相截方法，并用现在使用的数学记号和公度概念表达，数学上也是无误的。

（3）　《再谈辗转相截法》

本文进一步讨论了辗转相截法，实质上与数论中通过无限连分数定义无理数的思想是一致的。文中所说"无理数的两大类"（第 9 页），实际上是给出两个用无限连分数表示无理数的例子。数学上基本正确（个别地方不够准确）。

（4）　《辗转相截求方程根》

本文应用辗转相截方法求一个正数的平方根，特别，给出了求$\sqrt{\pi}$的例子。数学上正确，与现代数学分析的方法和思想是一致的。

影印件（三）

那么，无理数是怎样引入的呢？

在实际度量中，原先人们认为，只要单位取得充分小，总可以把两个量（如线段长）同时量尽，或令一个量为单位，则另一个量总可表成两个正整数m与n之比：m/n。可是，后来人的发现，像正方形的对角线的长与边长之间就找不到适当小的单位把它们同时量尽。或者说，若令正方形的边长为单位，那么，对角线的长度无法表示成为m/n（m、n均为正整数）的形式。实际上，根据勾股定理，正方形一对角线的长与其边长之比不是一个分数，而是$\sqrt{2}$。亦即正方形边与对角线是两个不可公度线段。[1]

由上面的讨论可知，某量与另一被取做单位的量之比，如果用数来表示，其结果则会出现两种情况：第一，当它们是可公度时，其结果是整数或分数，而此分数可表示为有限小数或无限循环小数；第二，当它们是不可公度时，其结果既不是整数、有限小数，亦不是无限循环小数，而是无限不循环小数。可见，表示可公度线段的长度只要用有理数的概念就可以解决。但是，要表示不可公度线段的长度，用有理数的概念就行不通了。为了解决这个矛盾，人们就把整数、有限小数和无限循环小数称为“有理数”，而把无限不循环小数称为“无理数”。这样便引入了“无理数”的概念。无理数在英文中是“irrational number”，是从拉丁文和希腊文直译过来的，其中“irrational”的字义是“无比值的”。因此，就本来的意义，无理数是表示与测量单位无比值的线段长度之数。当然，无理数的引入，也是突破有理数的局限，解决数学中开方（如$\sqrt{2}$）开不尽矛盾的结果。据史料记载，无理数概念的引入，曾经历了相当长的历史时期。

1）如果两个线段不存在一个适当的单位线段，可把它们同时量尽，那么就称这两个线段为“不可公度线段”。

目 录

§1　公度与辗转相截法

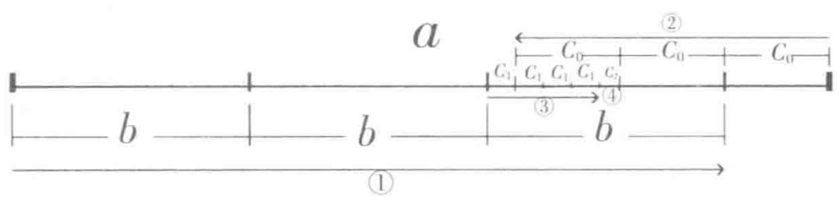
1. 公　度

设 a、b 为二线段，如果存在线段 c，它可同时整截尽 a 和 b，我们则称 c 为 a、b 二线段的的**公度**。用等式表达，即有 $a=pc$，$b=qc$，其中 p、q 皆整数。此时，$a/b=pc/qc=p/q$。二线段比便可表成二整数比，而公度被约掉。如我们说“勾三股四弦五”时，实际是已约去了勾股弦三边的公度。

如果 c 为 a、b 二线段的公度，将 c 再 r（也整数）分得的 $c'=c/r$ 也一定是 a、b 的公度，由 $a=pc$，$b=qc$，显然 $a=prc'$，$b=qrc'$，pr、qr 皆整数但非既约，当我们说 a 与 b 的公度时，一般指其**最大公度**，若 **c 为最大公度，则如上的 p 与 q 一定是既约了的**。

2.　辗转相截求二线段公度

设 $a>b$，我们先以短截长。如图示例：



①b 截 a，　$a=3b+C_0$　　　　返回算：$C_1=2C_2$

②C_0 截 b，　$b=2C_0+C_1$　　　　$C_0=3C_1+C_2=7C_2$

③C_1 截 C_0，　$C_0=3C_1+C_2$　　　　$b=2C_0+C_1=16C_2$

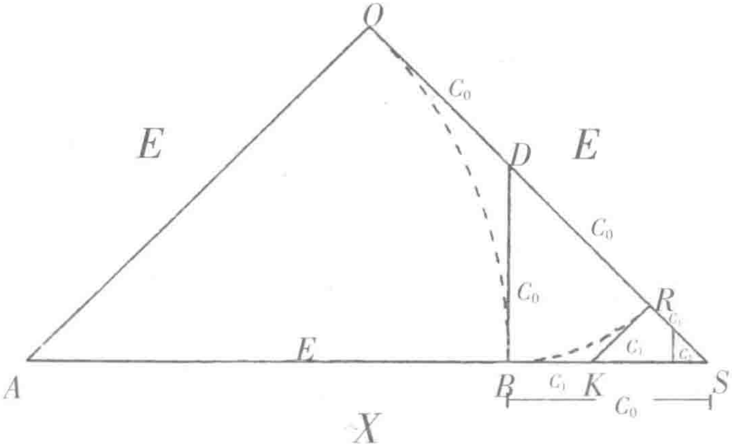
④目测，　$C_1=2C_2$　　　　$a=3b+C_0=55C_2$

故：$\frac{a}{b}=\frac{16C_2}{55C_2}=\frac{16}{55}$公度 C_2 被约去

以短截其长，有余则返而截，这就叫辗转相截。辗转至无余的整截式出现为止；或者是不停地辗转截下去。

3. 存在两线段没公度情形

如等腰直角三角形的直角边与斜边，如图我们用作图法辗转相截：



以 E 表直角边，X 表斜边，依次有：$X=E+C_0$，$E=2C_0+C_1$，而 C_1 与 C_0 的关系又重复 C_0 与 E 的关系，即 $C_0=2C_1+C_2$，且这样的关系可如图作图中的层层相似地无限地继续下去：$X=E+C_0$，$E=2C_0+C_1$，$C_0=2C_1+C_2$，$C_1=2C_2+C_3$，……，没完没了，每截总是有余，总找不到公度。

4. 两点说明

(1) 如果二线段有公度，则此公度一定会在辗转相截的有限步出现。