高等学校经济管理类数学基础课程系列教材

微积分（下册）

（第二版）

杨淑辉　冯　艳　卢立才　编著

科学出版社

高等学校经济管理类数学基础课程系列教材

微积分（下册）

（第二版）

杨淑辉　冯　艳　卢立才　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书是高等院校经济管理类数学基础课程系列教材之一，根据作者多年的教学实践经验，结合经济、管理等专业对微积分课程的基本要求，同时参照教育部最新颁布的研究生入学考试数学三的考试大纲编写而成.

本书主要内容包括：定积分及其应用、无穷级数、多元函数微积分学、微分方程及其应用、差分方程及其应用. 每节都有相应的练习题，每章都有总习题和自测题并配有答案，各章末都有小结. 本书结构严谨，逻辑清晰，注重应用，文字流畅，例题丰富，便于学生自学.

本书可作为经济、管理、会计、旅游管理等专业的本科生或高职生教材，也可用作学生自学考试、报考硕士研究生的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分. 下册/杨淑辉，冯艳，卢立才编著.—2版.—北京：科学出版社，2018.2

高等学校经济管理类数学基础课程系列教材

ISBN 978-7-03-056473-3

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①杨… ②冯… ③卢… Ⅲ. ①微积分—高等学校—教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 019271 号

责任编辑：王胡权 刘艳华/责任校对：彭珍珍
责任印制：吴兆东/封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

*

北京九州迅驰传媒文化有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

2011 年 1 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2018 年 2 月第 二 版 印张：14 1/2
2018 年 2 月第八次印刷 字数：292 000

定价：39.00 元

第二版前言

《微积分》教材面世已经六年了. 在此期间, 不少高等院校的同行使用此教材并提出了许多宝贵的意见和建议, 在此对大家的关心和支持表示衷心的感谢. 结合过去六年来我们使用本书的教学实践经验和近年来数学教学改革的一些新动态, 我们对第一版教材进行了大量修订, 主要包含以下几个方面:

(1) 修正了原有教材的疏漏以及排版印刷方面的错误.

(2) 调整了部分内容的顺序, 使其更加符合学生的认知规律.

(3) 每节增加了习题, 用以熟练掌握基础知识和基本概念, 同时丰富了题型.

(4) 每章有总复习题, 以对整章的内容进行巩固和提高.

(5) 突出了数学应用的广泛性, 提高数学应用的深度和技巧.

本教材编写分工如下: 第 6 章、第 9 章和第 10 章由杨淑辉编写, 第 7 章由卢立才编写, 第 8 章由冯艳编写.

本教材在修订过程中, 我们广泛地搜集了读者对第一版的建议, 同时得到了数学同仁和科学出版社的大力支持和帮助, 在此表示由衷的感谢. 希望通过这次修订, 使得本教材在第一版的基础上能够更加完善.

由于编者水平有限, 教材中的不当之处, 敬请读者批评指正.

编　者

2017 年 10 月

第一版前言

本书是作者根据多年的教学实践经验，结合经济、管理等专业对微积分课程的基本要求，并参照教育部最新颁布的研究生入学数学考试的考试大纲编写而成. 本书在编写过程中，着重介绍微积分的基本概念、基本理论和基本方法. 在编写过程中尽量体现以下特点:

(1) 本书作为一门数学基础课的教材，首先保持数学学科本身的科学性和系统性，教材尽量用实际生活中的例子或经济例子来引入数学中的基本概念，用通俗的深入浅出的语言，展示本学科的主要教学重点和难点，教材内容层次分明，通俗易懂.

(2) 在教学内容及讲解方法上我们进行了必要的调整，适当淡化运算上的一些技巧，降低了一些理论要求，删除了一些不必要的推理论证过程，突出了理论的应用，强化理论与实际的结合.

(3) 本书结构清晰，每章最后均有本章小结，将本章的主要知识点、教学重点和难点进行简明扼要的总结和归纳，并附有知识体系图，更好地帮助学生复习巩固整章的内容.

(4) 本书每章后面编入了比较丰富的两类习题，一类是基础练习题，体现了教学的基本要求，供学生平时的练习和巩固，同时也加入一些研究生入学考试中的部分优秀试题；二类是自测题，供学生进行一章的复习与检验.

本书主要内容包括：函数、极限和连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、无穷级数、多元函数微积分学及应用、微分方程与差分方程初步，共九章内容. 每章都有习题和自测题并配有答案，各章末都有小结.

本书在编写过程中，参考了众多的国内外教材；科学出版社的领导和编辑对本书的出版给予了热情的支持和帮助，在此表示致谢!

由于编者水平有限，书中难免有疏漏和不妥之处，恳请同行、读者指正.

编　者

2011 年 5 月

目　　录

第 6 章　定积分及其应用

在第 5 章我们研究了求导问题的逆问题, 即不定积分问题. 本章我们将研究微小量的无限累加问题, 即定积分问题.

微积分基本定理是本章的重要内容, 该定理建立了定积分与原函数之间的关系, 使得第 5 章的知识在第 6 章中得到进一步的运用.

6.1　定积分的概念及性质

本节首先由几何问题与经济问题的实例引出定积分的概念, 然后探讨定积分的性质.

6.1.1　定积分的概念

1. 引例

用初等数学的知识可以计算多边形、圆形和扇形等规则图形的面积, 但对于计算不规则图形的面积却无能为力. 由于生产、生活的需要, 人们对不规则图形的面积一直抱有浓厚的兴趣. 尤其是到了 17 世纪——文艺复兴时期, 随着天文学的发展, 天文学家开始对行星矢径扫过的面积等问题进行深入研究. 正是对这些问题的深入研究, 加快了积分学诞生的历程.

下面介绍德国数学家黎曼求曲边梯形面积的思想方法.

例 1　曲边梯形的面积.

设 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x)\geqslant 0$, 则由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=a$ 与 $x=b$, x 轴所围成的图形称为**曲边梯形**(图 6-1). 其中曲线弧称为**曲边**.

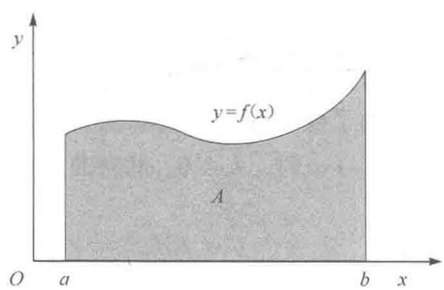

图 6-1

分析　(1) 若函数 $f(x)\equiv c$ (常数), 则该曲边梯形实际上是个矩形, 面积 $A=(b-a)c$.

(2) 若函数 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 则曲边梯形对于底边上各点处的高 $f(x)$ 在一段极小区间上的变化很小. 因此, 将区间 $[a,b]$ 划分为许多小区间, 相应地将大曲边梯形划分为许多小曲边梯形. 在每个小区间上取某一点处的高来近似代替

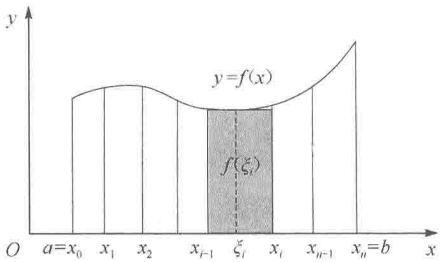

图 6-2

同一小区间上各点处小曲边梯形的高. 于是将每个小曲边梯形近似看成窄矩形. 把所有窄矩形面积之和近似看作曲边梯形的面积. 当把区间[a,b]无限划分, 以至于任意一个小区间的长度都趋于零, 此时所有窄矩形面积的极限就是曲边梯形的面积(图 6-2).

上述方法可分为四步, 不妨称其为**四步法**, 其具体步骤如下:

1) 分割

在区间$[a,b]$内任意插入 $n-1$ 个分点:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b,$$

将区间$[a,b]$划分成 n 个小区间

$$[x_0,\ x_1],\ [x_1,\ x_2],\ \cdots,\ [x_{n-1},\ x_n],$$

长度依次为

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0,\ \Delta x_2 = x_2 - x_1,\ \cdots,\ \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

经过每个分点作平行于 y 轴的直线段, 将曲边梯形分成 n 个小曲边梯形.

2) 近似代替

在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点 $\xi_i(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$. 以$[x_{i-1},\ x_i]$为底, $f(\xi_i)$为高的小矩形面积 $f(\xi_i)\Delta x_i$ 近似代替小曲边梯形的面积 ΔA_i, 即 $\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$ ($i=1, 2,\cdots,n$).

3) 求和

n 个小矩形的面积和是原曲边梯形面积的一个近似值, 即有

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

4) 取极限

为了保证每个小区间的长度都无限小, 我们记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$. 要求当 $n \to \infty$ 时, $\lambda \to 0$. 此时曲边梯形的面积

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

例 2　收益问题.

设某商品的价格 P 是销售量 x 的函数 $P=P(x)$, 设 x 为连续变量. 求当销售量从 a 变动到 b 时的收益 R 为多少?

实际上, 商品的价格不是一成不变的, 而是随销售量x的变动而变动的, 但是

当销售量变化不大时，其价格的变化也不大，我们也可以用上述的四步法来解决这个问题，其具体步骤如下:

1) 分割

在区间$[a,b]$内任意插入 $n-1$ 个分点:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b,$$

将区间$[a,b]$分成 n 个小区间，每个小区间上的销售量为

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

2) 近似代替

在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点 $\xi_i\,(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$, 把 $P(\xi_i)$ 作为该段的近似价格，则收益近似为 $\Delta R_i \approx P(\xi_i)\Delta x_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$.

3) 求和

n 段销售量所对应的收益的和，是销售量从 a 变动到 b 时的收益 R 的近似值，即

$$R = \sum_{i=1}^{n} \Delta R_i \approx \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i)\Delta x_i .$$

4) 取极限

记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$. 要求当 $n \to \infty$ 时，$\lambda \to 0$. 此时销售量从 a 变动到 b 时的收益为

$$R = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i)\Delta x_i .$$

四步法除了适用于求曲边梯形的面积和经济学上的收益问题，还可以解决许多其他问题，如求变速直线运动的路程、求函数的均值等.

抛开这些问题的具体意义，我们要抓住它们在数量关系上的共同本质:

(1) 解决问题的方法步骤相同——分割、近似代替、求和、取极限;

(2) 所求量极限结构式相同——特殊乘积和式的极限.

由此引出下述定积分的定义.

2. 定积分的定义

定义 1　设 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上有界，在$[a,b]$内任意插入 $n-1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b,$$

把$[a,b]$分成 n 个小区间$[x_{i-1},x_i]\,(i=1,2,\cdots,n)$，在每个小区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点 $\xi_i\,(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$，记 $\lambda = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n\}$，若存在一个数 I, 使得不论如何划分区间$[a,b]$, 不论 ξ_i 如何选取，都有

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = I$$

存在，则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是**可积**的，而称 I 为 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，将 I 记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i, \tag{6.1.1}$$

其中符号 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 读作"**从 a 到 b, $f(x)$ 对于 x 的积分**". 其中各个组成部分名称如下：$\int$ 称为积分号，a 是积分下限，b 是积分上限，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为被积表达式，x 是积分变量.

注 (1) 定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示一个数值，只与被积函数 $f(x)$ 和积分区间 $[a,b]$ 有关，而与积分变量用什么字母表示无关. 如

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u.$$

(2) 定义中区间 $[a,b]$ 的划分方法和 ξ_i 的取法是任意的.

定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的这种符号表示是德国数学家莱布尼茨首创的. 他把极限形式下的希腊字母"$\sum$"换成了拉长的罗马字母"$\int$"(Sum 的首字母)，这样 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 体现了定积分等于"和"这一意义. 在极限过程中 ξ_i 挤在一起，我们可以认为 ξ_i 是 a 到 b 之间的一个连续取样，x 是 a 到 b 之间的任意一点. 而 Δx 在微分中可以记作 $\mathrm{d}x$. 如此看来，莱布尼茨将定积分记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 绝对是恰如其分的.

微积分自诞生以来，因其逻辑基础的不严密而备受诟病，甚至由此引发了第二次数学危机. 在分析严格化的进程当中，柯西尝试对微积分的基本概念进行定义，用四步法给出了定积分的定义，不过柯西将 ξ_i 固定取在每个小区间的左端点 x_{i-1} 上. 德国数学家黎曼推广了柯西的定义方法，将 ξ_i 取为区间内任意一点处，并进一步给出了定积分的现代化定义. 为了纪念黎曼，把积分和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 称为**黎曼和**，把定积分称为**黎曼积分**.

3. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积的条件

问题　定积分的定义要求函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界，只要积分和的极限存在，则定积分就存在，那么定积分存在的函数应满足哪些条件呢？

定理 1（充分条件）　若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

定理 2（充分条件）　若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上有界，且只有有限个间断点，则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

定理 3（充分条件）　如果函数$f(x)$在$[a,b]$上单调且有界，则$f(x)$在$[a,b]$上可积.

需要注意，函数的可积性和原函数的存在性是两个不同的概念.

可积函数的原函数可能存在. 闭区间上的连续函数既可积又存在原函数；闭区间上的单调有界函数既可积又存在原函数；闭区间上有界且只有有限个既非第一类间断点也非无穷间断点的函数，既可积又存在原函数.

可积函数的原函数也可能不存在. 如函数$f(x)=\begin{cases}0, & x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},1\right], \\ 1, & x=\dfrac{1}{2},\end{cases}$该函数在闭区间$[0,1]$上有界，只有一个间断点$x=\dfrac{1}{2}$，由定理 2 可知，$f(x)$在$[0,1]$上可积. 但点$x=\dfrac{1}{2}$是$f(x)$的第一类跳跃间断点，$f(x)$在$[0,1]$上无原函数. 可在学习变上限函数之后证明.

不可积的函数，原函数可能不存在，也可能存在. 如函数

$$f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0\end{cases}$$

在$[-1,1]$上的原函数为$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & 0<x\leqslant 1, \\ 0, & x=0,\end{cases}$但$f(x)$在$x=0$点附近无界，故在$[-1,1]$上不可积.

定理 4（必要条件）　若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上可积，则$f(x)$在$[a,b]$上有界.

4. 定积分的几何意义

定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$在几何上表示介于x轴、曲线$y=f(x)$、两条直线$x=a$和$x=b$之间各部分面积的代数和. 在x轴上方的面积取正号，在x轴下方的面积取负号（图 6-3）.

本节例 1 曲边梯形的面积，可用定积分表示为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 例 2 收益问题的收益，可用定积分表示为$\int_a^b P(x)\mathrm{d}x$.

例 3 利用定积分的几何意义计算定积分 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 如图 6-4 所示，定积分的值就是图中阴影部分的面积，即四分之一圆的面积. 由圆形面积公式有

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

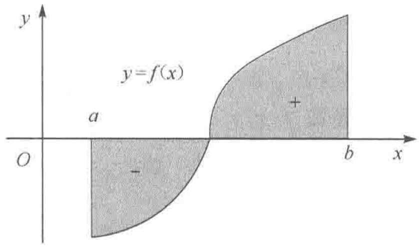

图 6-3

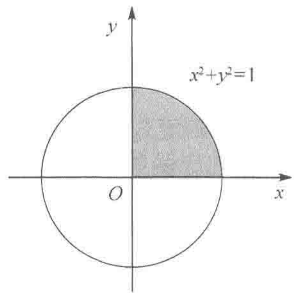

图 6-4

例 4 利用定积分的定义求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}}{n}$.

解 定积分定义的本质是 n 项和式的极限，对区间的划分和 ξ_i 的选取都是任意的. 根据该极限的特征，可将其看作闭区间[0,1]上的定积分，将区间均分为 n 个小区间，则每个小区间的长度为 $\frac{1}{n}$，选取每个小区间的右端点作为 ξ_i . 被积函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. 故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}+\cdots+\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}}{n} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

6.1.2 定积分的性质

在探讨定积分的性质的过程中，我们总假定所讨论的函数 $f(x)$ 在给定的闭区间上是可积的. 如不特别指明，对积分区间 $[a,b]$，总假定 $a \leqslant b$. 对于定积分的性质，我们侧重于应用，除积分中值定理外都不加证明.

性质 1 $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

性质 2 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

性质 3　$\int_a^b 1\mathrm{d}x = b-a$.

性质 4（线性性）　$\int_a^b [k_1 f(x) \pm k_2 g(x)]\mathrm{d}x = k_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm k_2\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$（$k_1, k_2$ 为常数）.

性质 5（区间可加性）　$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

例 5　已知定积分 $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = 3$，求

$$\int_2^2 2f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x - \int_4^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^4 5\mathrm{d}x$$

的值.

解　由定积分的性质有

$$\begin{aligned}&\int_2^2 2f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x - \int_4^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^4 5\mathrm{d}x\\ &= 0 + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^4 f(x)\mathrm{d}x + 5\times(4-1)\\ &= \int_1^4 f(x)\mathrm{d}x + 15\\ &= 3+15 = 18.\end{aligned}$$

性质 6（保号性）　如果在区间$[a,b]$上，$f(x)\geqslant 0$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

推论 1（保序性）　如果在区间$[a,b]$上，$f(x)\leqslant g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

推论 2（绝对可积不等式）　$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

例 6　利用保序性比较下列定积分的大小:

(1) $\int_1^2 x\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_0^1 \ln^2(1+x)\mathrm{d}x$.

解　(1) 当 $x\in[1,2]$ 时，$x\leqslant x^2$，由保序性可知

$$\int_1^2 x\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 x^2\mathrm{d}x.$$

(2) 当 $x\in[0,1]$ 时，$\ln(1+x)\geqslant \ln^2(1+x)$，由保序性可知

$$\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \ln^2(1+x)\mathrm{d}x.$$

性质 7（估值定理）　设 M 和 m 分别是 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上的最大值和最小值,

则

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a).$$

例 7 估计定积分 $\int_1^2 x^3\mathrm{d}x$ 的值.

解 因为被积函数 x^3 在闭区间[1,2]上是单调增加函数, 所以其最小值 $m=1^3=1$, 最大值 $M=2^3=8$. 由有界性可知

$$1\times(2-1)\leqslant\int_1^2 x^3\mathrm{d}x\leqslant 8\times(2-1),$$

即

$$1\leqslant\int_1^2 x^3\mathrm{d}x\leqslant 8.$$

性质 8(积分中值定理) 若函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续, 则在$[a,b]$上至少存在一点ξ, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)\quad(a\leqslant\xi\leqslant b).$$

证 由闭区间上连续函数的性质可知, $f(x)$在$[a,b]$上有最大值 M 和最小值 m, 由性质 7 可知

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a),$$

即

$$m\leqslant\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M.$$

根据闭区间上连续函数的介值定理可知, 在$[a,b]$上至少存在一点ξ, 使得

$$\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi),$$

其中 $a\leqslant\xi\leqslant b$, 从而有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a).$$

注 实际上, 积分中值定理中的ξ在开区间中也一定存在, 将在学习了牛顿-莱布尼茨定理之后给予证明.

积分中值定理的几何意义 以闭区间$[a,b]$为底边, 曲线 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积, 等于同底而高为 $f(\xi)$ 的矩形面积, 其中 $a\leqslant\xi\leqslant b$ (图 6-5).

积分中值定理的代数意义 $\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)$, $f(\xi)$ 称为函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的平均值.

例 8　设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，且存在 $c\in(a,b)$，使得

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = f(b)(c-a).$$

证明在开区间(a,b)内存在一点ξ，使得$f'(\xi)=0$.

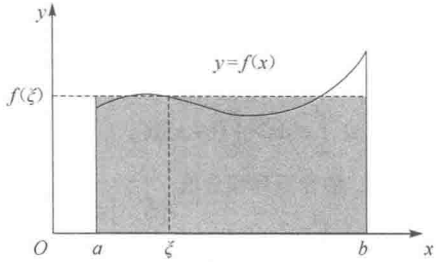

图 6-5

证　由函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，$c\in(a,b)$，可知$f(x)$在$[a,c]$上连续，又由积分中值定理可知，存在$\eta\in[a,c]$，使得

$$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = f(\eta)(c-a).$$

可见$f(\eta)=f(b)$且$\eta\neq b$. 由罗尔中值定理可知，存在一点$\xi\in(\eta,b)\subset(a,b)$，使得$f'(\xi)=0$.

性质 9（对称性）　若$f(x)$是奇函数，那么对任意常数a，在闭区间$[-a,a]$上，

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0;$$

若$f(x)$是偶函数，那么对任意常数a，在闭区间$[-a,a]$上，

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

证　当$f(x)$为奇函数时，曲线$f(x)$关于原点对称，与x轴及$x=\pm a$所围的几何图形的代数和为零，故

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 0;$$

当$f(x)$是偶函数时，$f(x)$关于y轴对称，与x轴及$x=\pm a$所围的几何图形也关于y轴对称，故

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x.$$

在 6.3 节，我们将用换元法再次证明性质 9.

习　题　6.1

1. 利用定积分的几何意义计算下列定积分:

(1) $\int_{-1}^0 (x+1)\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_0^{2\pi}\sin x\mathrm{d}x$.

2. 利用性质计算定积分 $\int_{-\pi}^{\pi} x^4\sin x\mathrm{d}x$.

3. 利用定积分的性质判别下列各式是否成立:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \ln x\mathrm{d}x > 0$；

(3) $\int_0^1 \mathrm{e}^x\mathrm{d}x > \int_0^1 (1+x)\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot \cos^3 x\mathrm{d}x > 0$.

4. 估计下列积分值:

(1) $\int_1^4 (x^2+1)\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^2 \mathrm{e}^{(x^2-x)}\mathrm{d}x$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2} =$ (　　).

A. $\int_1^2 \ln^2 x\mathrm{d}x$　　B. $2\int_1^2 \ln x\mathrm{d}x$　　C. $2\int_1^2 \ln(1+x)\mathrm{d}x$　　D. $\int_1^2 \ln^2(1+x)\mathrm{d}x$

6. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(x) \leqslant g(x)$, 则对任意的 $c \in (0,1)$ 有(　　).

A. $\int_{\frac{1}{2}}^c f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_{\frac{1}{2}}^c g(t)\mathrm{d}t$　　B. $\int_{\frac{1}{2}}^c f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{\frac{1}{2}}^c g(t)\mathrm{d}t$

C. $\int_c^1 f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_c^1 g(t)\mathrm{d}t$　　D. $\int_c^1 f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_c^1 g(t)\mathrm{d}t$

7. 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\mathrm{d}x, J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cot x\mathrm{d}x, K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\mathrm{d}x$, 则 I, J, K 的大小关系是(　　).

A. $I<J<K$　　B. $I<K<J$　　C. $J<I<K$　　D. $K<J<I$

6.2 微积分基本定理

微积分真正诞生的标志是牛顿与莱布尼茨分别独立发现积分与微分是一个互逆过程. 本节我们通过微积分基本定理揭示这种互逆关系, 进而把求定积分的问题转化为求原函数的问题.

6.2.1 积分上限函数及其导数

1. 积分上限函数

定义 1　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, x 是区间 $[a,b]$ 上任意一点, 则以 x 为积分上限的定积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是关于 x 的函数, 记作 $\varphi(x)$, 即

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, \tag{6.2.1}$$

称 $\varphi(x)$ 为**积分上限函数**(**或变上限定积分**).

2. 积分上限函数的导数

定理 1　若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则积分上限函数 $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在