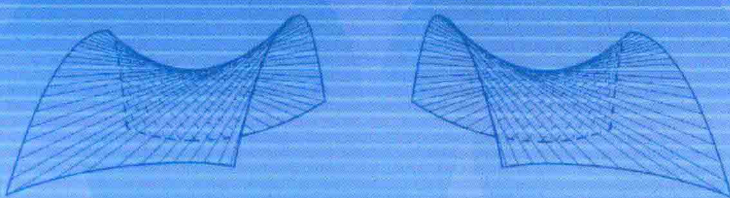
育“十三五”规划教材

类课程整体规划系列教材



高等代数与解析几何

朱富海　陈智奇　编著

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

南开大学代数类课程整体规划系列教材

高等代数与解析几何

朱富海　陈智奇　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是南开大学代数类课程整体规划系列教材的第一本，是在编者多年从事代数类课程及后续代数课程的教学过程中逐渐完成的. 在国内外已有的同类教材的基础上，编者根据自己对代数学的理解，按照代数学发展的主要脉络来安排本书的内容. 全书分为 8 章，包括多项式、行列式、矩阵、线性空间、线性变换、线性函数与双线性函数、Euclid 空间和二次曲面等. 本书的编写原则是关注数学概念的起源，遵循数学理论的发展历程，强调理论的整体性和内在联系. 书中配有大量编者精心挑选的习题和训练与提高题，既有助于强化读者对课程内容的理解，也为后续的代数学课程埋下了大量伏笔.

本书可供数学各专业的本科教学使用，尤其是国内高水平的本科学校的教学，也可供数学爱好者自学或数学工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数与解析几何/朱富海，陈智奇编著. —北京：科学出版社，2018.8

普通高等教育“十三五”规划教材 · 南开大学代数类课程整体规划系列教材

ISBN 978-7-03-058556-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①朱… ②陈… Ⅲ.①高等代数–高等学校–教材 ②解析几何–高等学校–教材 Ⅳ. ①O15 ②O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 192421 号

责任编辑：张中兴 梁 清 李香叶 / 责任校对：张凤琴
责任印制：吴兆东 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 8 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5
2018 年 8 月第一次印刷 印张：19 1/2
字数：393 000

定价：52.00 元

《南开大学代数类课程整体规划系列教材》
丛书编委会名单

前言

本书是南开大学代数类课程整体规划系列教材的第一本, 主要讲述多项式、线性代数和解析几何三个部分. 在出版业繁荣发展的今天, 同类教材即使称不上浩如烟海, 也可谓汗牛充栋了 [1-11]. 套用罗素的一句话, 我们的目的并不仅仅是在它们之中再增加一部, 更希望结合代数学的发展史从一个新的视野给读者以启发, 其构思可以追溯到十五年前.

2002 年 7 月, 我进入北京大学数学科学学院做博士后. 9 月被安排给蓝以中老师做助教讲授高等代数习题课. 接下来的两个学期中, 我们几乎每周都会在蓝老师办公室碰面. 他提前把下一次习题课的题目与要点工整地抄写在一张纸条上, 然后和我谈一谈讲解这些问题时需要注意的地方. 我们也会就上一次主讲课、习题课或者作业中遇到的学生的问题交流意见, 既欣喜于学生们的进步, 也会对学生们出现的一些莫名其妙的问题感叹. 他偶尔也会去听我的课, 课后我去找他聊, 他会分析我的课的优缺点, 并分享他的教学经验. 在这短短的一年中, 我深深地感受到了蓝老师在教学中的一丝不苟. 他对高等代数的理解及教学理念和我有很多契合之处, 而他多年的教学经验对我这个初次走上讲台的新手来说更是一笔宝贵的财富, 使我受益至今. 可以说那段时间是编写本书的起点. 如今, 我也在讲台上站了十余年了, 其间看到了不少主讲课和习题课脱节的现象, 才发现自己能在恰当的时间遇到蓝老师是多么值得庆幸的事. 2003 年 7 月之后, 蓝老师因为身体原因不再承担教学工作, 后来也一直没有机会再见面, 唯有将感激之情埋在心里.

我与陈智奇老师合作于 2006 年 9 月至 2010 年 7 月给南开大学数学试点班连续教了四年高等代数与解析几何课程, 一直使用的是孟道骥老师的教材 [7], 当然也会根据从蓝以中老师那里获得的经验以及个人的理解对教学安排做一定的调整. 孟老师的书给我们的教学提供了很大启发, 其中对不少问题的处理方式也为本书提供了很有价值的参考. 国外一些相关书籍也给了我们很大启发 [12-19].

2011 年以后, 我主要讲授代数学方向的本科生选修课和研究生课程. 在教学过

程中, 一个深刻的体会是学生们的代数学功底薄弱, 分析问题和解决问题的能力不足, 其根源是他们在大学低年级所受到的代数学的训练不够, 对代数学整体理解有很大欠缺. 这些问题的产生一方面是教学过程的问题, 另一方面是教材的问题. 因为很多问题的背景在教学过程和教材中都没有被提及, 学生们常常会在 "知其然, 不知其所以然" 中度过学业生涯. 这种体会越深越让我觉得有必要花时间好好写一本书, 把代数学的问题的来龙去脉交代清楚.

从内容上讲, 本书与大部分现行教材相差不大. 内容涵盖多项式、行列式、矩阵、线性空间、线性变换、线性函数与双线性函数、Euclid 空间和二次曲面等. 那么本书的特别之处是什么呢? 有一定研究经历的学者知道, 包括高等代数与解析几何在内的代数学课程, 甚至是大学数学类的任何一门课程, 其内容应该是一个整体, 每个章节之间有很好的联系, 而不是各自为政, 随意地堆砌在一起. 而这些联系放在学科发展的历史进程中来看会让人一目了然. 因此, 我们本着遵循历史发展规律这一原则来安排本书的主要内容. 当然完全遵照历史发展规律是不现实的, 我们会利用现代数学的思想和工具在一些地方稍作调整, 力求做到每一个数学概念的引出都是自然而然的, 并针对初学者的特点, 由浅入深, 由具体到抽象, 以尽可能自然和直观的方式来引入代数学中一系列抽象的概念和处理问题的方法, 帮助读者洞察问题的本质, 不致被众多的概念、定理、命题所压倒. 我们也希望本书可以帮助读者了解代数学的问题和历史发展, 增加对代数学的兴趣, 从而为深入的代数学研究打下基础.

鉴于以上的想法, 我们希望给本书的读者提供一些建议.

首先, 数学理论不是仅仅用来学的, 这些理论都是前人在多年的研究中积累而来的. 定义、定理及其证明都有其历史背景和来龙去脉, 一门数学课程就是一部鲜活的历史, 了解这个历史和前人的思路对我们是不无裨益的. 所以我们可能需要经常问一问为什么要提出一些定义? 要解决的主要问题是什么? 自己是否有解决问题的想法? 书中的引理、命题和定理在解决问题的过程中起什么作用? 又是如何想到和证明的? 是否还有其他更好的思路?

其次, 很多问题是有关联的. 在书后的名词索引可以看到一个名词在很多地方出现, 例如 Lagrange 插值公式就出现了六次之多. 这一方面可以方便读者查阅, 更主要的是提示同一个问题或知识点是可以用不同的观点来处理的, 从而便于理解全书整体的联系. 我们不希望读者过于追求技巧, 而是通过各环节的联系理解其中的内涵.

再次, 尽量独立思考本书中的习题. 在本书的写作过程中, 习题编写是一个事倍功半的过程 —— 耗时巨大却难言满意. 本书中的习题大致可以分为三类. 第一类是经典的陈题, 它们出现在大部分相关书籍或者网络中, 见参考文献. 第二类来源于代数类的后续课程 (如抽象代数、有限群表示论、数论、Lie 代数及 Lie 群等)

甚至其他数学分支的课程 (如数学分析、微分几何等). 这类习题对于读者今后在代数学领域的继续深入学习和研究是非常有帮助的. 实际上高等代数和解析几何中的很多问题是后续的抽象理论的原型也是它们的基础. 第三类是编者在教学过程中思考过的一些有意思的问题包括一些典型问题的深入探讨. 根据编者的体会, 真正理解了一门学科应该是在能够熟练运用所学的工具解决问题之后. 对于高等代数与解析几何的熟练的检验是运用这些基础理论研究群环域论、群表示论、数论和 Lie 理论等方向的问题. 因此, 书中的很多习题是有背景的, 自然也有一定的难度. 读者不能很快做出来是正常的, 不断的思考不仅对于本课程还将对后续课程的学习产生良好的影响. 当然, 我们并不希望看到有本书的习题解答出现. 一些自以为是的解答往往只能看到题目本身, 并不能理解其中的内涵, 给读者带来更多的是误导.

最后, 代数学功底的打造不是短时间能实现的, 需要持久的思考与探索, 用一段较长的时间反复思考一个有趣的问题比做大量重复性的习题要好得多. 同时也需要适量的阅读和交流, 吸收他人的经验. 正如 Abel 所说, 要读大师的著作, 学习大师的思想. 在现阶段, 建议读者们多读一些代数学发展史方面的文献, 了解代数学的概念的由来、理论的发展过程, 尤其需要体会数学家们在解决问题的过程中的闪光的思想.

本书的大部分内容都在南开大学数学试点班讲授过, 也适用于国内高水平大学的数学与应用数学专业高等代数与解析几何课程的教学, 欢迎国内同行使用. 当然根据各学校的课时情况对内容可做一些增减, 不过需要尽可能保持内容的连贯性和完整性. 我们的处理方式是否合理有效, 也有待在今后的教学过程中的检验. 在过去的两年中, 我们也开设了面向数学学院本科生的讨论班, 讨论过部分书稿. 在这个过程中, 不少同学 (尤其是 2015 级的徐襟) 帮忙找出了书中的各种笔误, 在此表示感谢. 特别要感谢的是我的同事白晓棠老师, 她在百忙之中阅读了全书, 找出了数以百计的各类错误, 并提出了很多中肯的建议. 科学出版社的工作人员如责任编辑张中兴和文字编辑李香叶等在本书出版过程中做了大量的排版和校对工作, 在此一并表示感谢. 尽管如此, 书中的不足之处也在所难免. 期待读者对于本书提出建议或意见. 联系方式: zhufuhai@nankai.edu.cn.

本书在写作过程中得到了南开大学数学学院的资助, 校对过程中得到了基础学科拔尖学生培养实验计划 2018 年课题资助.

朱富海

2017 年 12 月

目录

引　言

高等代数和解析几何这一课程主要分为多项式、线性代数和解析几何三个部分. 我们简要介绍一下本书的主要内容. 对于初学者, 这部分内容可以稍作了解, 大体知道我们今后学习的主要内容. 等到学习相关知识时再回过头来看, 相信会更有启发.

代数学起源于人类对于方程的探索. 小学的时候, 我们知道了如何解一元一次方程. 而一元一次方程的历史久远, 早在大约 4000 年前, 古埃及人已经在纸草书上记录了他们对于一元一次方程的探索. 被誉为"代数学之父"的 Diophantus 在其墓志铭上就留下了一道有趣的一元一次方程的问题. 同样在 4000 年前, 古巴比伦人用楔形文字在泥板上给出了一元二次方程的解法, 这是我们在中学的时候学会的. 当然中学生们也知道如何解二元一次方程组; 目前已知的对方程组的最早记录是成书于汉朝的《九章算术》. 这两个问题可以看作一元一次方程在两个不同方向的推广: 方程的次数增加; 未知量个数增加, 方程的个数也适当增加.

第一个推广即可发展出高次方程和**一元多项式**理论. 其核心内容是因式分解, 这是高等代数课程中多项式理论的主要部分, 也是大家比较熟悉的. 至少在小学, 我们就知道了整数的因式分解 (分解质因数)、公因数等, 多项式理论与整数理论极为相似 (它们的共性是抽象代数研究的重要内容). 在因式分解中, 求多项式的一次因式实际上就是我们熟知的方程的求根问题, 而高次方程是否有求根公式也是抽象代数所要解决的问题.

第二个推广即为线性方程组 (即多元一次方程组) 理论. 在解线性方程组的过程中, 整个线性代数理论得以逐渐发展起来. 中学时接触的二元一次方程组通常只有唯一解, 求解方法主要是消元 (代入消元、加减消元). 一个容易忽略的问题是: 这类方程组有没有求解公式? 而在历史上, 正是因为对这个问题的探索, **行列式**的概念才被日本数学家关孝和与德国数学家 Leibniz 在 17 世纪末几乎同时发掘出来, 并经过一批欧洲数学家的深入研究发展为系统的行列式理论. 其中, Cramer 在 1750

年发现了方程组有唯一解时的求解公式, 即 Cramer 法则.

对于一般的方程组, 解未必是存在的; 即使存在也不一定是唯一的. 对此问题的研究发展了在数学乃至物理、经济等领域都有重要应用的**矩阵**理论. 矩阵理论的关键在于其中的运算: 加、减、乘、除 (求逆). 其中的乘法是 Cayley 在 1857 年利用变量替换得到的, 这是一种与我们熟知的四则运算不同的运算方式, 主要体现在矩阵乘法不具有交换律. 比较奇怪的是, 矩阵理论出现得相当晚, 比行列式晚了 170 年左右, 甚至比 Galois 的群论还要晚. 矩阵理论的出现为代数学打开了新的大门, 代数学理论才变得更加丰富多彩. 有趣的是多项式、行列式和矩阵这三者有很多内在的联系.

随着矩阵的引入, 我们的研究对象会越来越多, 而它们的共性是我们关注的重点. 矩阵、多项式、数域以及中学已学过的向量等都有加法和数乘的运算, 它们的性质都是类似的, 如加法的性质和小学时的整数加法的性质是一样的. 我们将把这些共性提炼出来, 在一个集合中定义加法和数乘, 从而得到所谓的**线性空间**. 这样做的好处是, 当我们把抽象的线性空间的性质研究清楚后, 就可以直接应用到具体的例子如矩阵、多项式中, 对于其他的具体例子也不用再逐一讨论. 对于抽象的线性空间, 我们将发展一整套语言和工具, 并利用它们来研究矩阵的各种性质.

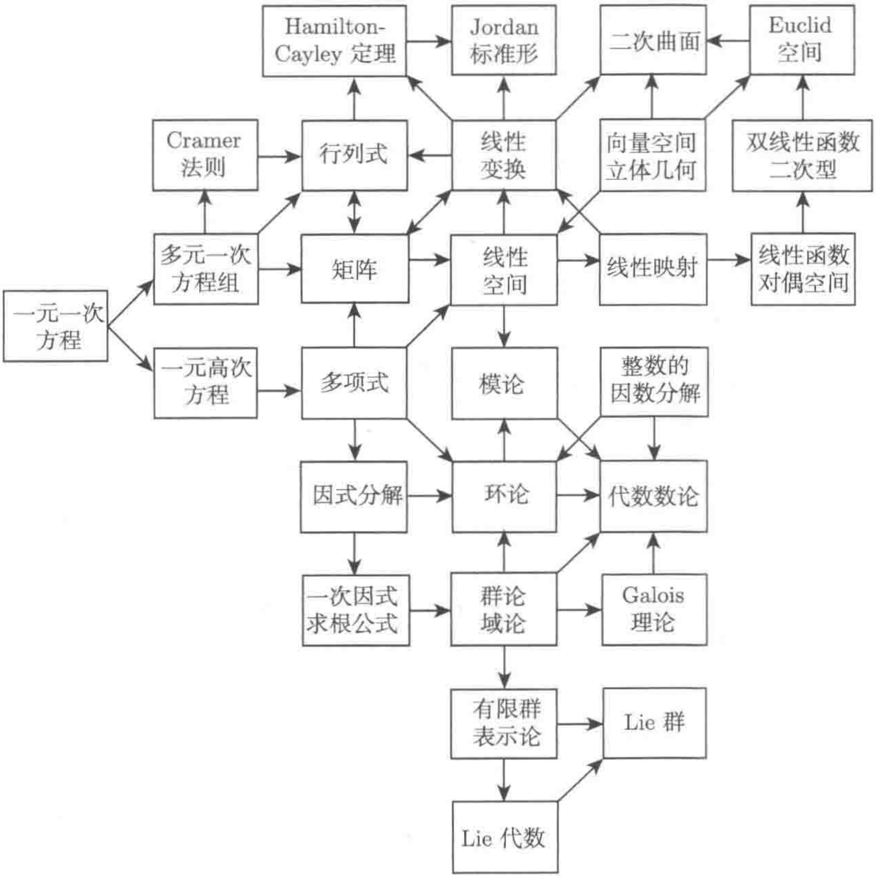
随着对线性空间的基本知识的了解, 我们发现很多线性空间本质上是一样的 (即同构). 哪些空间是同构的? 哪些空间不同构? 它们的联系是什么? 线性映射则可以很好地回答这些问题. 我们将对其中两种特殊的线性映射做深入研究. 一类特殊的线性映射是**线性变换**. 有趣的是线性变换在一组基下自然地对应于一个矩阵, 反之亦然; 不同基下的矩阵之间的关系引入了一个很重要的概念 —— 相似. 选择什么样的基使得矩阵简单一些是实际操作中必然要遇到的问题. 一个自然的想法是能否选择一组基使得线性变换的矩阵成为对角形, 这就引入了特征值、特征向量和特征多项式以及最小多项式的概念, 并由此可得到矩阵相似对角形的一些充要条件. 对于一般情形, 不能对角化, 只能化为准对角形, 这又需要引入不变子空间的概念. Hamilton-Caylay 定理在此发挥了很大的作用, 可以得到空间第一分解定理 (根子空间分解). 在根子空间上, 线性变换的特征值是相同的, 简单处理可以得到幂零线性变换, 循环子空间以及空间第二分解定理 (循环子空间分解), 由此得到 Jordan 标准形. 多项式矩阵可以用来解释标准形的存在唯一性, 它将相似这一难题化为相对容易的相抵问题.

另一类特殊的线性映射是线性空间的**线性函数**, 由此发展出多重线性函数、主要是**双线性函数**的研究. 其中重要的是对称和反对称双线性函数, 它们与对称矩阵和反对称矩阵是对应的. 在对双线性函数的标准形的研究中自然引入了合同的概念. 对称双线性函数又对应于二次型, 其中的特例是半正定尤其是正定二次型. 正定的对称双线性函数即为实线性空间中的内积, 可以定义向量的长度、夹角等, 具

有内积的实线性空间即为在几何学中有重要应用的 **Euclid 空间**. 内积为我们处理很多问题提供了新的工具. 利用 Euclid 空间的结果, 主要是正交变换, 我们可以得到平面二次曲线和空间**二次曲面**在等距变换下的分类.

我们将本书的主要内容以及南开大学在本科阶段开设的代数类后续课程的框架总结为表 1.

表 1　代数学的结构简表



第1章 多项式

多项式理论是在研究高次方程的基础上发展而来的, 它是高等代数的一个重要组成部分. 中学代数课程已涉及一些多项式的运算, 尤其是因式分解理论. 本章将在一个抽象的层面上讨论多项式的一般理论, 其核心仍是因式分解. 可以说, 本章的主要内容都是围绕多项式的因式分解展开的. 值得注意的是, 多项式理论与整数理论如出一辙, 它们的共性是后续的抽象代数课程中的环论所研究的重要内容.

1.1 数 域

公元前 5 世纪, Pythagoras 学派认为 "万物皆数", 而数就是整数和整数的比, 也就是说有理数就足够描述整个世界的各种关系. 自然, 单位正方形的对角线的长度应该是某个有理数 $\dfrac{m}{n}$. 那么就存在一个直角边为 n, 斜边为 m 的等腰直角三角形. 据说 Pythagoras 的学生 Hippasus 对这个等腰直角三角形进行了如下的作图 (图 1.1). 这样, 他得到了一系列等腰直角三角形. 例如, 第二个的直角边长为 $m-n$.

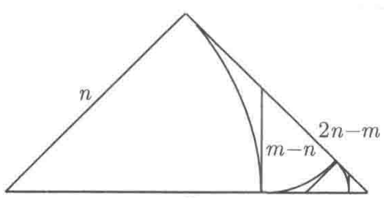


图 1.1

利用平面几何知识或者 Pythagoras 定理 (也称勾股定理, 但有证据表明公元前 1700 年前汉谟拉比时代的古巴比伦人已经知道这个结论) 容易得到斜边长为 $2n-m$. 因此, 这些等腰直角三角形的边长都是整数. 但是这个做法可以无限进行下去，从而得到无穷多个越来越小的整数边长的直角三角形, 这是不可能的! Hippasus 意识到出了大问题: 单位正方形的对角线长不是有理数! 这应该是数学史上光辉的一刻, 以至于人们用第一次数学危机来形容它.

随后, 人们用了两千年的时间来慢慢接受无理数的存在, 并且创造了记号 $\sqrt{2}$ 来表示单位正方形的对角线长, 或者说是方程 $x^2=2$ 的解. 有了新的数, 自然可以作一些加、减、乘、除四则运算. 为了方便, 我们分别记正整数、自然数或非负整数、整数和有理数的全体为 $\mathbb{N}^*, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$. 于是从有理数集 $\mathbb{Q}$ 和 $\sqrt{2}$ 出发, 通过四则运算我们可以得到形如 $a+b\sqrt{2}\ (a,b\in\mathbb{Q})$ 的数. 把这些数的全体记为 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, 于是我们有

引理 1.1.1 集合 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 对四则运算封闭, 即对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, 有 $\alpha\pm\beta, \alpha\beta, \dfrac{\alpha}{\beta}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. 自然, 作为分母的 β 不为 0.

证 设 $\alpha=a+b\sqrt{2}, \beta=c+d\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, 其中 $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$, 则

$$(a+b\sqrt{2})\pm(c+d\sqrt{2})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2}),$$

$$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2}).$$

又设 $c+d\sqrt{2}\neq 0$, 则 $c-d\sqrt{2}\neq 0$. 于是

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{c^2-2d^2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2}). \qquad \square$$

当然, 仅有这些数还是不够的. 利用类似 Hippasus 的几何方法可以证明 $\sqrt{5}$ 也是无理数. 古希腊数学家对于尺规作图很痴迷. 顾名思义, **尺规作图**是指仅用直尺和圆规在平面上作图. 当然, 直尺是没有刻度的但假定可以无限延长, 圆规也可以画出任意给定圆心与半径的圆. 任取平面上点 O 为原点且取定单位长度建立直角坐标系. 从单位长度出发, 平面上可以用尺规作图得到的点称为**可构造点**. 数轴上的可构造点对应的数称为**可构造实数**. 尽管 $\sqrt{2}$ 很 "无理", 不过尺规作图还是很容易得到它的. 古希腊人甚至已经知道可构造实数的和、差、积、商以及平方根也是可构造实数. 当然, 当时对于数的理解仅限于正数.

古希腊人提出了尺规作图三大难题: 三等分角、化圆为方和倍立方问题. 这些问题在其后的两千多年里一直困扰着世间智者, 直到 19 世纪才得到解答. 那么, 利用尺规作图是否可以得到所有足以描述整个世界的数呢? 随着对于实数理论的深入认识, 人们发现不可构造实数要比可构造实数多得多, 比如圆周率 π 就是不可构造的, 从而利用尺规作图化圆为方是不可能的 (其他两大难题的回答也是否定的). 到 19 世纪后半叶, 在 Weierstrass, Dedekind, Cantor 等一批数学家的努力下, 实数理论得以建立, 从而数轴上的点与实数可以一一对应起来.

然而事情还不够完美. 在我们解方程的过程中常常遇到没有实数解的情形, 如 $x^2=-1$. 意大利数学家 Cardano 在 1545 年发表的《重要的艺术》一书中给出了被后人称为 "Cardano 公式" 的三次方程的一般解法, 当然他承认这是 Tartaglia 的工

作. 然而在公式的使用过程中, 他不可避免地遇到了对负数开方的情况. 尽管觉得很荒谬, 但他还是尝试将 40 写成和是 10 的两个数的积:

$$40 = (5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}),$$

这里, $\sqrt{-15}$ 代表一个平方等于 -15 的 "数". 这样的数在当时的数学家看来是虚幻的, 法国数学家 Descartes 称之为虚数.

如同 $\sqrt{2}$ 的引入一样, -1 的平方根 $\sqrt{-1}$ 也不可阻挡地进入了数的行列并发挥了巨大作用. 在不引起混淆的情况下, 我们也用 i 表示 $\sqrt{-1}$, 这是 Euler 首先采用的记号. 如同在有理数的基础上添加了 $\sqrt{2}$ 得到 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, 在实数的基础上增加了 $\sqrt{-1}$ 之后也可以通过四则运算得到新的数. 我们以 $\mathbb{R}$ 表示实数的全体, 令

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}(\sqrt{-1}) = \{a + b\sqrt{-1} | a, b \in \mathbb{R}\}.$$

自然我们需要在 $\mathbb{C}$ 上定义加法和乘法运算. 由于要满足交换律、结合律和分配律等运算法则, 对任意 $a + b\sqrt{-1}, c + d\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$, 自然应该定义加法与乘法为

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-1};$$

$$(a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) = (ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1}.$$

这样的定义是否与我们以前对实数、有理数等的理解一致呢? 我们总结有理数和实数中的运算规律如下.

(1) 加法和乘法交换律: $a + b = b + a$, $ab = ba$;

(2) 加法和乘法结合律: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(ab)c = a(bc)$;

(3) 存在数 0 和 1 满足: $0 + a = a$, $1a = a$;

(4) 存在相反数和倒数: 对任意 a, 存在 b 满足 $b + a = 0$; 对任意 $a \neq 0$, 存在 b 满足 $ba = 1$;

(5) 分配律: $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$.

容易验证复数的加法和乘法也满足上述的交换律、结合律和分配律. 对于 $c + d\sqrt{-1}$, 其相反数为 $(-c) + (-d)\sqrt{-1}$. 于是可以定义加法的逆运算 —— 减法为

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{-1}) - (c + d\sqrt{-1}) &= (a + b\sqrt{-1}) + ((-c) + (-d)\sqrt{-1}) \\ &= (a - c) + (b - d)\sqrt{-1}.\end{aligned}$$

对于非零数 $c + d\sqrt{-1}$, 自然有 $c^2 + d^2 \neq 0$, 于是

$$\left(\frac{c}{c^2 + d^2} - \frac{d}{c^2 + d^2}\sqrt{-1}\right)(c + d\sqrt{-1}) = 1,$$

即非零数 $c+d\sqrt{-1}$ 存在倒数 $\dfrac{1}{c+d\sqrt{-1}}=\dfrac{c-d\sqrt{-1}}{c^2+d^2}$. 于是, 可以定义除法为

$$\frac{a+b\sqrt{-1}}{c+d\sqrt{-1}}=(a+b\sqrt{-1})\frac{c-d\sqrt{-1}}{c^2+d^2}.$$

由此可见, 形如 $a+b\sqrt{-1}$ $(a,b\in\mathbb{R})$ 的数的全体也是可以进行加、减、乘、除四则运算的. 我们称这样的数为**复数**, 其中 a 为**实部**, b 为**虚部**. 当 $b=0$ 时自然就是实数. 因此, 实数集可以看作是复数集的一个子集. 非实复数称为**虚数**. 特别地, 称形如 $b\sqrt{-1}$ $(b\neq 0)$ 的数为**纯虚数**. 对于复数 $z=a+b\sqrt{-1}$, 称 $a-b\sqrt{-1}$ 为其**共轭复数**, 记为 $\bar{z}$. 明显地, 我们有 $z\bar{z}=a^2+b^2\geqslant 0$, 且等号成立当且仅当 $a=b=0$. 共轭复数的这一性质在定义复数的除法时实际上已经用上了. 容易验证对于复数 z,w 有 $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$, $\overline{zw}=\bar{z}\bar{w}$.

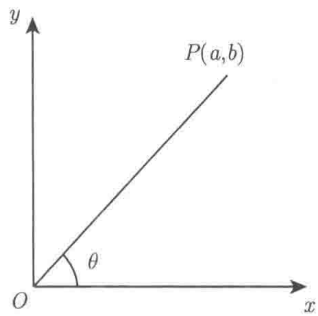


图 1.2

复数 $a+b\sqrt{-1}$ 与实数对 (a,b) 有个自然的对应. 利用平面直角坐标系, 我们知道平面上的点与实数对一一对应, 从而也与复数一一对应. 如图 1.2 所示. 这样, 点 $P(a,b)$ 对应复数 $z=a+b\sqrt{-1}$, x-轴逆时针旋转至 OP 的旋转角 θ 称为 z 的**辐角**. 辐角并不唯一, 可以相差 2π 的整数倍, 其中取值在 $(-\pi,\pi]$ 的辐角值称为**辐角主值**. 0 的辐角没有意义. 线段 OP 的长度 $\sqrt{a^2+b^2}$ 称为 z 的**模**, 记为 $|z|$. 容易看出 $a=|z|\cos\theta$, $b=|z|\sin\theta$. 于是有

$$z=|z|(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta).$$

令 $\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\theta}=\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta$. 我们以后会看到 $\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\theta}$ 不仅是一个记号, 也有实际的意义. 于是可记 $z=|z|\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\theta}$. 利用三角函数的公式可得

$$\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\theta}\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\varphi}=\mathrm{e}^{\sqrt{-1}(\theta+\varphi)}.$$

于是, $(\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\theta})^n=\mathrm{e}^{\sqrt{-1}n\theta}$. 特别地, 当 $\theta=\dfrac{2k\pi}{n}$, $k=0,1,\cdots,n-1$ 时, 我们有 $(\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}})^n=1$, 即 $\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{n}\sqrt{-1}}$ 为方程 $x^n=1$ 的 n 个根. 在平面上这 n 个根对应的点恰好是一个正 n 边形的顶点. 若 $w=|w|\mathrm{e}^{\sqrt{-1}\varphi}$, 则

$$zw=|z||w|\mathrm{e}^{\sqrt{-1}(\theta+\varphi)}.$$

因此, 乘以 w 相当于把 z 对应的线段 OP 绕 O 点沿逆时针方向旋转 φ 角, 并把线段的长度变为原来的 $|w|$ 倍.

与实数不同的是, 复数不具有实数那样的大小关系, 这是我们在把数集扩大使得 $x^2=-1$ 这样的方程有解的过程中不得不放弃的. 不过由此带来的好处是巨大

的. 例如, 求方程 $x^4=4$ 的解, 我们利用因式分解有

$$\begin{aligned} x^4-4 &= (x^2-2)(x^2+2) \\ &= (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2+2) \\ &= (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{-2})(x-\sqrt{-2}). \end{aligned}$$

于是我们容易得到方程 x^4-4 没有整数解或有理数解; 实数解有两个, 为 $\pm\sqrt{2}$. 但在复数范围内除了这两个实数解以外还有 $\pm\sqrt{-2}$ 两个纯虚数解. 因此, 这个四次方程一共有四个复数解. 更一般地, 由 Gauss 首先证明的代数基本定理告诉我们任意复系数的方程在复数范围内都有解, 从而 n 次方程有 n 个解. 因此, 在复数范围内处理一些问题会相对容易一些.

有理数、实数或复数的全体以及 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 都对四则运算封闭, 它们的这一共性可以提炼出一个抽象的数学对象.

定义 1.1.2 设 $\mathbb{F}$ 是由某些复数组成的一个集合, 其中至少含有一个非零数, 且 $\mathbb{F}$ 对四则运算封闭, 则称 $\mathbb{F}$ 为一个数域.

注记 1.1.3 容易看出集合 $\{0\}$ 对四则运算是封闭的, 但它不是数域, 因为其中不含非零数. 设 a 为 $\mathbb{F}$ 中的非零数, 则 $1=a/a\in\mathbb{F}$. 因此, 定义中要求 $\mathbb{F}$ 中"至少含有一个非零元素"实际上等价于要求 $1\in\mathbb{F}$. 1 在乘法中的地位与 0 在加法中的地位是相似的. 随着我们的不断探索, 我们会发现在很多数学研究对象中也有类似于 1 的元素存在.

有理数集 $\mathbb{Q}$、实数集 $\mathbb{R}$ 和复数集 $\mathbb{C}$ 都是数域, 分别称为**有理数域**、**实数域**和**复数域**. 整数集、自然数集和正整数集都不是数域. 实际上, 若 a 为 $\mathbb{F}$ 中的非零数, 由 $\mathbb{F}$ 对减法和除法封闭可得 $0=a-a, 1=a/a\in\mathbb{F}$. 再由 $\mathbb{F}$ 对四则运算封闭易得 $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{F}$. 于是我们有

定理 1.1.4 任何数域都包含有理数域 $\mathbb{Q}$, 故 $\mathbb{Q}$ 是最小的数域.

引理 1.1.1 表明 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ 是数域. 利用类似的方法可得

例 1.1.5 集合 $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})=\{a+b\sqrt{-1}|a,b\in\mathbb{Q}\}$ 是数域, 且不包含在 $\mathbb{R}$ 中.

除了上述几个常见的数域, 还有很多不同的数域, 它们在很多数论问题中发挥着重要的作用. 比如在研究高次方程求根的过程中, 需要考虑包含一个方程的所有根的最小数域, 这样的数域的结构特点可以告诉我们方程的解是否可以用方程的系数的四则运算及其根式表达出来.

习 题 1.1

1. 试考察复数 z,w 及 $z+w$ 在平面上对应点的位置关系, 从而得出复数加法的几何意义.