2019 李永乐·王式安
考研数学系列

高等数学辅导讲义

主编◎武忠祥

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

金榜图书

全国各大考研辅导机构**通用教材**

2019 李永乐·王式安
考研数学系列

高等数学辅导讲义

主编 ◎ 武忠祥

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

全书共分九章和一个附录，每章均由考试内容要点精讲、常考题型的方法与技巧，以及练习题精选三部分组成。为了考研同学使用方便，本书将数学一至数学三共同要求掌握的内容编写在前面。其中，数学二只要求掌握前六章，数学三只要求掌握前七章，数学一要求全部掌握。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学辅导讲义/武忠祥主编. 一西安:西安交通大学出版社,2017.11
ISBN 978-7-5693-0313-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①武… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 298769 号

书　　名　高等数学辅导讲义
主　　编　武忠祥
责任编辑　郭鹏飞

出版发行　西安交通大学出版社
　　　　　西安市兴庆南路 10 号(邮政编码 710049)
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874(发行中心)
　　　　　(029)82668315(总编办)
印　　刷　三河市鑫鑫科达彩色印刷包装有限公司

开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张　17.5　字数　398 千字
版次印次　2018 年 1 月第 1 版　2018 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5693-0313-1
定　　价　59.80 元

前　言

本书是为准备考研的同学复习高等数学(微积分)而编写的辅导讲义,由编者多年来在考研辅导班的讲稿改写而成。全书共分九章和一个附录,每章均由考试内容要点精讲、常考题型的方法与技巧,以及练习题精选三部分组成。

本书力求用不多的篇幅,在较短的时间内帮助同学理解基本概念,掌握基本理论、基本公式、重点及难点,澄清常犯错误与疑惑。同时,通过典型例题,在归纳题型的基础上帮助同学梳理解题思路,掌握常用解题方法和解题技巧。

为了考研同学使用方便,本书将数学一至数学三共同要求的内容编写在前面。其中,数学二只要求掌握前六章,数学三只要求掌握前七章,数学一要求全部掌握。希望本讲义能对考研同学有较大帮助。由于编者水平有限,疏漏和错误之处在所难免,欢迎批评指正。

祝同学们考研路上一路顺利!

编者

2018 年 1 月

目 录

第四章　常微分方程

第五章　多元函数微分学

第六章　二重积分

第七章　无穷级数

第八章　向量代数与空间解析几何及多元微分学在几何上的应用

第九章　多元积分学及其应用

附　录

第一章　函数 极限 连续

第一节　函　数

一、考试内容要点精讲

(一) 函数的概念

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x \in D$，变量 x 按照一定的法则总有一个确定的数值 y 和它对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y = f(x)$. 常称 x 为自变量，y 为因变量，D 为函数的定义域.

【注】函数概念有两个基本要素：定义域、对应规则（或称依赖关系）. 当两个函数的定义域与对应规则完全相同时，它们就是同一函数.

(二) 函数的性态

1. 单调性

1) 定义：设函数 $y = f(x)$ 在某区间 I 上有定义，如果对于区间 I 上的任意两点 x_1, x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$（或 $f(x_1) > f(x_2)$），则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上单调增加（或单调减少）.

如果对于区间 I 上的任意两点 x_1, x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$），则称函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上单调不减（或单调不增）.

2) 判定

(1) 利用定义；

(2) 利用导数.

设 $f(x)$ 在区间 I 上可导，则

a) $f'(x) > 0 (< 0) \Rightarrow f(x)$ 单调增（单调减）；

b) $f'(x) \geqslant 0 (\leqslant 0) \Leftrightarrow f(x)$ 单调不减（单调不增）.

2. 奇偶性

1) 定义：设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x \in D$，则有 $-x \in D$），如果对于任一 $x \in D$，恒有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的偶函数；如果恒有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为 D 上的奇函数.

【注】(1) $\sin x, \tan x, \arcsin x, \arctan x, \ln \dfrac{1-x}{1+x}, \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}, f(x) -$

$f(-x)$ 都是奇函数；x^2，$|x|$，$\cos x$，$f(x)+f(-x)$ 都是偶函数；

(2) 奇函数 $y=f(x)$ 的图形关于原点对称，且若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义，则 $f(0)=0$；偶函数的图形关于 y 轴对称.

2) 判定

(1) 利用定义；

(2) 设 $f(x)$ 可导，则

a) $f(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow f'(x)$ 是偶函数；

b) $f(x)$ 是偶函数 $\Rightarrow f'(x)$ 是奇函数.

(3) 连续的奇函数其原函数都是偶函数；

连续的偶函数其原函数中有唯一一个是奇函数.

【注】设 $f(x)$ 连续

(1) 若 $f(x)$ 是奇函数，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是偶函数；

(2) 若 $f(x)$ 是偶函数，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是奇函数.

3. 周期性

1) 定义：若存在实数 $T>0$，对于任意 x，恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为周期函数. 使得上述关系式成立的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的最小正周期，简称为函数 $f(x)$ 的周期.

【注】(1) $\sin x$ 和 $\cos x$ 以 2π 为周期，$\sin 2x$ 和 $|\sin x|$ 以 π 为周期.

(2) 若 $f(x)$ 以 T 为周期，则 $f(ax+b)$ 以 $\dfrac{T}{|a|}$ $(a\neq 0)$ 为周期.

2) 判定：(1) 利用定义；

(2) 可导的周期函数其导函数为周期函数；

(3) 周期函数的原函数不一定是周期函数.（如 $1+\cos x$）

【注】(1) 设 $f(x)$ 连续且以 T 为周期，则

$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是以 T 为周期的周期函数 $\Leftrightarrow \int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0$.

(2) 周期函数的原函数是周期函数的充要条件是其在一个周期上的积分为零.

4. 有界性

1) 定义：若 $\exists M>0$，$\forall x\in I$，$|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 上有界.

【注】$|\sin x|\leqslant 1$，$|\cos x|\leqslant 1$，$|\arcsin x|\leqslant \dfrac{\pi}{2}$，$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$，$|\arccos x|\leqslant \pi$.

2) 判定：(1) 利用定义；

(2) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 $\Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界；

(3) $f(x)$ 在 (a,b) 上连续，且 $f(a^+)$ 和 $f(b^-)$ 存在 $\Rightarrow f(x)$ 在 (a,b) 上有界；

(4) $f'(x)$ 在区间 I（有限）上有界 $\Rightarrow f(x)$ 在 I 上有界.

【注】(3) 中的区间 (a,b) 改为无穷区间 $(-\infty,b)$，$(a,+\infty)$，$(-\infty,+\infty)$ 结论仍成立.

(三) 常见函数

1. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=g(x)$ 的定义域为 D_g，值域为 R_g，若 $D_f\cap R_g$

$\neq \varnothing$，则称函数 $y = f[g(x)]$ 为函数 $y = f(u)$ 与 $u = g(x)$ 的复合函数. 它的定义域为 $\{x \mid x \in D_g, g(x) \in D_f\}$.

2. 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R. 若对任意 $y \in R$，有唯一确定的 $x \in D$，使得 $y = f(x)$，则记为 $x = f^{-1}(y)$，称其为函数 $y = f(x)$ 的反函数.

【注】(1) 有时也将 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 写成 $y = f^{-1}(x)$. 在同一直角坐标系中，$y = f(x)$ 和 $x = f^{-1}(y)$ 的图形重和，$y = f(x)$ 和 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

(2) $f^{-1}[f(x)] = x, f[f^{-1}(x)] = x$.

3. 基本初等函数

我们把以下五类函数统称为基本初等函数.

1) 幂函数　　$y = x^{\mu}$ (μ 为实数)；

2) 指数函数　　$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$；

3) 对数函数　　$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$；

4) 三角函数　　$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$；

5) 反三角函数　　$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$.

4. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合所构成，并能用一个式子表示的函数称为初等函数.

二、常考题型的方法与技巧

题型一　复合函数

【例 1】　已知 $f(x+1)$ 的定义域为 $[0,a] (a > 0)$，则 $f(x)$ 的定义域为

(A) $[-1, a-1]$.　　(B) $[1, a+1]$.

(C) $[a, a+1]$.　　(D) $[a-1, a]$.

【解】　应选(B)

由 $f(x+1)$ 的定义域为 $[0,a]$ 知 $0 \leqslant x \leqslant a$，则

$$1 \leqslant x + 1 \leqslant a + 1,$$

故 $f(x)$ 的定义域为 $[1, a+1]$.

【例 2】　已知 $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}, f[\varphi(x)] = 1 - x$，且 $\varphi(x) \geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

【解】　由 $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}, f[\varphi(x)] = 1 - x$，知

$$\mathrm{e}^{\varphi^2(x)} = 1 - x, \qquad (x \leqslant 0)$$

$$\varphi^2(x) = \ln(1-x), \qquad (x \leqslant 0)$$

$$\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}. \qquad (x \leqslant 0)$$

【例 3】　设 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geqslant 0, \end{cases} g(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & |x| < 1, \\ |x| - 2, & |x| \geqslant 1. \end{cases}$

试求 $f[g(x)], g[f(x)]$.

【解】　当 $|x| < 1$ 时，$g(x) = 2 - x^2 > 0$，则 $f[g(x)] = 1$；

当 $1 \leqslant |x| < 2$ 时，$g(x) = |x| - 2 < 0$，则 $f[g(x)] = 0$；

当 $|x| \geqslant 2$ 时，$g(x) = |x| - 2 \geqslant 0$，则 $f[g(x)] = 1$；

故
$$f[g(x)] = \begin{cases} 0, 1 \leqslant |x| < 2, \\ 1, |x| < 1 \text{ 或 } |x| \geqslant 2. \end{cases}$$

当 $x < 0$ 时，$f(x) = 0$，$|0| < 1$，则 $g[f(x)] = 2 - 0^2 = 2$；

当 $x \geqslant 0$ 时，$f(x) = 1$，$|1| = 1$，则 $g[f(x)] = |1| - 2 = -1$.

故
$$g[f(x)] = \begin{cases} 2, & x < 0, \\ -1, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

题型二　函数性态

【例 1】　已知函数 $f(x) = \dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^\alpha}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有界，则 α 的取值范围应为

(A) $(0, +\infty)$.　　(B) $(0, 3]$.　　(C) $(0, 2)$.　　(D) $(1, 3]$.

【分析】　由于 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续，所以，只要 $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ 都存在，则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上必有界.

【解】　由本题选项可知，只需讨论 $\alpha > 0$，此时

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^\alpha} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{\alpha x^{\alpha-1}}. \qquad (\ln(1+x^2) \sim x^2)$$

当 $\alpha - 1 \leqslant 2$，即 $\alpha \leqslant 3$ 时上式极限存在；当 $\alpha > 3$ 时，$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^\alpha} = \infty$，$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上无界.

又
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^\alpha} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{\alpha x^{\alpha-1}}.$$

当 $\alpha - 1 > 0$ 时，即 $\alpha > 1$ 时上式极限存在且为零；

当 $\alpha \leqslant 1$ 时，$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^\alpha} = \infty$，$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上无界.

因此，当 $1 < \alpha \leqslant 3$ 时，$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上必有界，故应选(D).

【例 2】　以下四个命题中正确的是

(A) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(B) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(D) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

【解 1】　直接法

由于 $f'(x)$ 在有限区间 $(0,1)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，故选(C).

【解 2】　排除法

令 $f(x) = \dfrac{1}{x}$，则 $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$，显然 $f'(x)$ 和 $f(x)$ 都在 $(0,1)$ 内连续，但 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内无界，则(A)、(B) 都不正确.

令 $f(x)=\sqrt{x}$，显然 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，但 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0,1)$ 内无界，则(D) 不正确. 故应选(C).

【例 3】　设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.

(B) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调减少.

(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$.

(D) 对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$.

【解】　本题要用到一个常用的结论：

若 $f'(x_0)>0$，则存在 $\delta>0$，

当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f(x)<f(x_0)$；

当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f(x)>f(x_0)$.

若 $f'(x_0)<0$ 有相应的结论.

以上结论可利用导数定义和极限的保号性证明.

由以上结论知(C) 正确.

【注】 本题选(A) 是一种典型的错误，原因是由 $f'(x_0)>0$，得不到一定存在 x_0 的某邻域，在此邻域内 $f(x)$ 单调增. 反例如下：

令 $f(x)=\begin{cases} x+2x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

显然 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+2x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=1>0$，但 $f(x)$ 在 $x=0$ 的任何邻域内不单调增.

事实上，当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=1+4x\sin\dfrac{1}{x}-2\cos\dfrac{1}{x}$.

取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，则 $f'(x_n)=1-2=-1<0$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，故以上的点 x_n 在 $x=0$ 的任何邻域内都存在，即在 $x=0$ 的任何邻域内都存在导数为负的点，从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 的任何邻域内都不单调增.

【例 4】　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)\mathrm{d}t$. 试证：

(1) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 也是偶函数；

(2) 若 $f(x)$ 单调不增，则 $F(x)$ 单调不减.

【证明】　(1)【证一】　由题设知 $F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)\mathrm{d}t$.

令 $t=-u$，并由于 $f(-x)=f(x)$，所以

$$F(-x)=-\int_0^x(-x+2u)f(-u)\mathrm{d}u=\int_0^x(x-2u)f(u)\mathrm{d}u=F(x),$$

即 $F(x)$ 为偶函数.

【证二】　$F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)\mathrm{d}t=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$

由于 $f(x)$ 为偶函数，则 $x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$ 都是偶函数，故 $F(x)$ 为偶函数.

(2)【证】 $F'(x)=\left[x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right]'=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-2xf(x)$

$=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)=x[f(\xi)-f(x)]$，$\xi$ 在 0 与 x 之间，(积分中值定理).

因 $f(x)$ 单调不增，故当 $x>0$ 时，$0\leqslant\xi\leqslant x$，于是 $f(\xi)-f(x)\geqslant 0$，从而 $F'(x)\geqslant 0$. 当 $x<0$ 时，$x\leqslant\xi\leqslant 0$，于是 $f(\xi)-f(x)\leqslant 0$，从而 $F'(x)\geqslant 0$. 又 $F'(0)=0$，综上可知 $F(x)$ 为单调不减.

第二节　极　限

一、考试内容要点精讲

(一) 极限的概念

1. 数列极限

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)>0$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

【注】(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的几何意义是：对于 a 点的任何 ε 邻域即开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$，一定存在 N，当 $n>N$ 即第 N 项以后的点 x_n 都落在开区间 $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ 内，而只有有限个(最多只有 N 个)在这区间之外.

(2) 数列 $\{x_n\}$ 的极限是否存在，如果存在极限值等于多少与数列的前有限项无关.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$.

2. 函数极限

1) 自变量趋于无穷大时函数的极限

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$：$\forall\varepsilon>0$，$\exists X(\varepsilon)>0$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$：$\forall\varepsilon>0$，$\exists X(\varepsilon)>0$，当 $x>X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$：$\forall\varepsilon>0$，$\exists X(\varepsilon)>0$，当 $x<-X$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

【注】在函数极限中 $x\to\infty$ 是指 $|x|\to+\infty$，而在数列极限中，$n\to\infty$ 是指 $n\to+\infty$.

定理　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

2) 自变量趋于有限值时函数的极限

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

【注】函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的极限是否存在，如果存在极限值等于多少仅与 $f(x)$ 在 x_0 点的去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内的函数值有关，而与 $f(x)$ 在 x_0 是否有定义，如果有定义函数值等于多少无关.

(2) 左极限：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0^-)$；

(3) 右极限：$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0^+)$；

定理　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$.

【注】需要分左、右极限求极限的问题主要有三种：

(1) 分段函数在分界点处的极限，而在该分界点两侧函数表达式不同(这里也包括带有绝对值的函数，如$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$)；

(2)e^{∞} 型极限(如$\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$，$\lim\limits_{x\to\infty} e^{x}$，$\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}$)；

$\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，则$\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$ 不存在；

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$，则$\lim\limits_{x\to\infty} e^{x}$ 不存在.

【注】$e^{\infty}\neq\infty$，$e^{+\infty}=+\infty$，$e^{-\infty}=0$.

(3)$\arctan\infty$ 型极限(如$\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$).

$\lim\limits_{x\to 0^-}\arctan\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$，则$\lim\limits_{x\to 0}\arctan\dfrac{1}{x}$ 不存在；

$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，则$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

【注】$\arctan\infty\neq\dfrac{\pi}{2}$，$\arctan(+\infty)=\dfrac{\pi}{2}$，$\arctan(-\infty)=-\dfrac{\pi}{2}$.

(二) 极限的性质

1. 局部有界性：若极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在点 x_0 某去心邻域内有界；

2. 保号性：设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则

(1) 若 $A>0$(或 $A<0$)$\Rightarrow\exists\delta>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

(2) 若 $\exists\delta>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$)$\Rightarrow A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

【注】由保号性不难得到保序性：设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则

(1) 若 $A>B\Rightarrow\exists\delta>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$f(x)>g(x)$.

(2) 若 $\exists\delta>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$f(x)\geqslant g(x)\Rightarrow A\geqslant B$.

3. 极限值与无穷小之间的关系：

$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，　其中 $\lim\alpha(x)=0$.

【注】数列极限有对应的以上三条性质.

(三) 极限存在准则

1. 夹逼准则

若存在 N，当 $n>N$ 时，$x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=a$.

2. 单调有界准则

单调有界数列必有极限.即单调增、有上界的数列必有极限，单调减、有下界的数列必有极限.

【注】函数极限有对应的以上两条准则.

(四) 无穷小

1. 无穷小的概念

若 $f(x)$ 当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的极限为零,则称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的无穷小.

2. 无穷小的比较

设 $\lim \alpha(x) = 0, \lim \beta(x) = 0$.

(1) 高阶:若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$,记为 $\beta(x) = o(\alpha(x))$;

(2) 同阶:若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = C \neq 0$;

(3) 等价:若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$,记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

(4) 无穷小的阶:若 $\lim \dfrac{\beta(x)}{[\alpha(x)]^k} = C \neq 0$,称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的 k 阶无穷小.

3. 无穷小的性质

(1) 有限个无穷小的和仍是无穷小;

(2) 有限个无穷小的积仍是无穷小;

(3) 无穷小量与有界量的积仍是无穷小.

【注】 以上前两条中的"有限"二字不可少.

(五) 无穷大

1. 无穷大的概念

若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$(或 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$),则称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的无穷大.

2. 常用的一些无穷大的比较

(1) 当 $x \to +\infty$ 时,$\ln^\alpha x << x^\beta << a^x$(其中 $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$).

(2) 当 $n \to \infty$ 时,$\ln^\alpha n << n^\beta << a^n << n! << n^n$(其中 $\alpha > 0, \beta > 0, a > 1$).

3. 无穷大与无界变量的关系 无穷大 ⇒ 无界变量

数列 $\{x_n\}$ 是无穷大量:$\forall M > 0, \exists N$,当 $n > N$ 时,恒有 $|x_n| > M$.

数列 $\{x_n\}$ 是无界变量:$\forall M > 0, \exists N$,使 $|x_N| > M$.

无穷大量一定是无界变量;但无界变量不一定是无穷大量.

例:数列 $x_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为奇数} \\ 0, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$ 是无界变量,但不是无穷大.

4. 无穷大与无穷小的关系

在自变量的同一变化过程中,若 $f(x)$ 是无穷大,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小;若 $f(x)$ 是无穷小,且 $f(x) \neq 0$,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

二、常考题型的方法与技巧

题型一　极限的概念、性质及存在准则

【例 1】　设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$，且 $a\neq 0$，则当 n 充分大时有

(A) $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$.　　(B) $|a_n| < \dfrac{|a|}{2}$.　　(C) $a_n > a - \dfrac{1}{n}$.　　(D) $a_n < a + \dfrac{1}{n}$.

【解 1】　直接法

由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$，且 $a\neq 0$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |a| > 0$，则当 n 充分大时有

$$|a_n| > \frac{|a|}{2}.$$

故应选(A).

【解 2】　排除法

若取 $a_n = 2+\dfrac{2}{n}$，显然 $a=2$，则(B) 和(D) 都不正确；

若取 $a_n = 2-\dfrac{2}{n}$，显然 $a=2$，则(C) 不正确；

故应选(A).

【例 2】　设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n = \infty$，则必有

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立.　　(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在.　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

【解 1】　直接法

由　$\lim\limits_{n\to\infty}b_n = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n = \infty$ 知　$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n = \infty$.

故选(D).

【解 2】　排除法

由题设条件可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n < \lim\limits_{n\to\infty}b_n < \lim\limits_{n\to\infty}c_n$，但这只能得到，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $a_n < b_n < c_n$，而不能得到对任意的 n 有 $a_n < b_n < c_n$. 从而(A)、(B) 均不正确.

事实上取 $a_n = \dfrac{100}{n}$，$b_n = \dfrac{n+10}{n+1}$，$c_n = n$，显然符合题设条件，但(A)、(B) 选项的结论都不成立.

若取 $a_n = \dfrac{1}{n^2}$，$c_n = n$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n = \infty$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2} = 0$，从而(C) 不正确.

故应选(D).

【例 3】　设对任意的 x 总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)] = 0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$

(A) 存在且等于零.　　(B) 存在但不一定为零.

(C) 一定不存在.　　(D) 不一定存在.

【解】　(1) 令 $\varphi(x) = 1-\dfrac{1}{x^2}$，$g(x) = 1+\dfrac{1}{x^2}$，$f(x) = 1$，显然 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)] = 0$，此时 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x) = 1$，则(A) 和(C) 不正确.

(2) 令 $\varphi(x) = x - \frac{1}{x^2}, f(x) = x, g(x) = x + \frac{1}{x^2}$,则 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x) - \varphi(x)] = 0$,但 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$(不存在).从而(B)不正确.

故应选(D).

【注】 不难看出,本题就是在极限的夹逼准则的基础上改造出来的.以上是通过举反例用排除法.事实上,这里的反例可更简单.

在(1)中令 $\varphi(x) = f(x) = g(x) = 1$;在(2)中令 $\varphi(x) = f(x) = g(x) = x$.

【例 4】 设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$,则下列断言正确的是

(A) 若 x_n 发散,则 y_n 必发散. (B) 若 x_n 无界,则 y_n 必有界.

(C) 若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小. (D) 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小,则 y_n 必为无穷小.

【解 1】 直接法

由于 $y_n = (x_n y_n) \cdot \frac{1}{x_n}$,则

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}(x_n y_n) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0 \cdot 0 = 0.$$

故应选(D).

【解 2】 排除法

若取 $x_n = n, y_n = \frac{1}{n^2}$,显然(A)不正确.

若取 $x_n = \begin{cases} n, & n \text{ 为偶数}, \\ 0, & n \text{ 为奇数}, \end{cases}$ $y_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数}, \\ n, & n \text{ 为奇数}, \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$,且 x_n 无界,但 y_n 也无界,故(B)不正确.

若取 $x_n = \frac{1}{n^2}, y_n = n$,显然(C)不正确.

故应选(D).

【例 5】 设 $a_n > 0(n = 1,2,\cdots), S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$,则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的

(A) 充分必要条件. (B) 充分非必要条件.

(C) 必要非充分条件. (D) 既非充分也非必要条件.

【解】 显然数列 $\{S_n\}$ 单调增,若 $\{S_n\}$ 有界,则 $\{S_n\}$ 收敛,又

$$a_n = S_n - S_{n-1},$$

故数列 $\{a_n\}$ 收敛.

但当数列 $\{a_n\}$ 收敛时,数列 $\{S_n\}$ 未必有界,如 $a_n = 1$,此时 $S_n = n$ 无界.

故应选(B).

【例 6】 (Ⅰ)证明:对任意的正整数 n,都有 $\frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$ 成立.

(Ⅱ)设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n (n = 1,2,\cdots)$,证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

【证】 (Ⅰ)根据拉格朗日中值定理,存在 $\xi \in (n, n+1)$,使得