“十三五”独立本科院校大学数学系列规划教材

微积分（Ⅱ）

Calculus（Ⅱ）

南京大学金陵学院
陈仲 王夕予 林小围 ◎ 编著

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

微积分（Ⅱ）

陈　仲　王夕予　林小围　编著

东南大学出版社
·南京·

内 容 提 要

本书是普通高校"独立学院"本科理工类专业微积分(或高等数学)课程的教材. 全书有两册，其中《微积分(Ⅰ)》包含极限与连续、导数与微分、不定积分与定积分、空间解析几何等四章，《微积分(Ⅱ)》包含多元函数微分学、二重积分与三重积分、曲线积分与曲面积分、数项级数与幂级数、微分方程等五章.

本书在深度和广度上符合教育部审定的"高等院校非数学专业高等数学课程教学基本要求"，并参照教育部考试中心颁发的《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》中数学一与数学二的知识范围，编写的立足点是基础与应用并重，注重数学的思想和方法，注重几何背景和实际意义，并适当地渗透现代数学思想及对部分内容进行更新与优化，适合独立学院培养高素质的具有创新精神的应用型人才的目标.

本书结构严谨，难易适度，语言简洁，既可作为独立学院等高校本科理工科学生学习微积分课程的教材，也可作为科技工作者自学微积分的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分. Ⅱ / 陈仲，王夕予，林小围编著. —南京：东南大学出版社，2018. 6

ISBN 978-7-5641-7783-6

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①陈… ②王… ③林… Ⅲ. ①微积分—高等学校—教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 111114 号

微积分(Ⅱ)

出版发行	东南大学出版社
社　　址	南京市四牌楼 2 号(邮编：210096)
出 版 人	江建中
责任编辑	吉雄飞(联系电话：025-83793169)
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	南京京新印刷厂
开　　本	700mm×1000mm　1/16
印　　张	16.5
字　　数	323 千字
版　　次	2018 年 6 月第 1 版
印　　次	2018 年 6 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN　978-7-5641-7783-6
定　　价	36.00 元

本社图书若有印装质量问题，请直接与营销部联系，电话：025-83791830。

前　言

著名的德国数学家高斯曾说:“数学是科学的皇后”. 人类的实践也已证明数学是所有科学的共同“语言”,是学习所有自然科学的“钥匙”,而数学素养更是成为衡量一个国家科技水平的重要标志. 独立学院理工类微积分课程是培养高素质应用型人才的重要的必修课,我们编写该课程教材的立足点是基础与应用并重,以提高学生数学素养为根本目标.

在基础与应用并重的思想指导下,我们编写了微积分课程的教学大纲,设计了课时安排, 教材编写与教学实践密切结合,并多次修改力求完善. 在编写过程中,我们努力做到:

(1) 在深度和广度上符合教育部审定的“高等院校非数学专业高等数学课程教学基本要求”,并参照教育部考试中心颁发的《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》中数学一与数学二的知识范围. 在独立学院中,有不少学生是因为高考发挥失常而没有考上理想的高校,进入独立学院后他们发奋努力,立志考研. 我们编写教材时,在广度上尽可能达到考研的知识范围.

(2) 注重数学的思想和方法, 适当地渗透现代数学思想,并运用部分近代数学的术语与符号,以求符合独立学院培养高素质的具有创新精神的应用型人才的目标. 教材除了使学生获得微积分的基本概念、基本理论和基本方法外,还要让学生受到一定的科学训练, 学到数学思想方法,为其学习后继课程提供必要的数学基础,并为其毕业后胜任工作或继续深造积累潜在的能力.

(3) 通过教学研究,将一些经典定理、公式的结论或证明加以更新与优化. 如此,既改革了教学内容,又丰富了微积分学的内涵.

(4) 对于基本概念和重要定理注重几何背景和实际意义的介绍; 对重要的、比较难理解的命题尽量给出几何解释, 让学生对微积分的内容能有较好的理解.

我们的目标是全书结构严谨,难易适度,语言简洁,既适合培养目标,又贴近教学实际,便于教与学.

本书分两册,其中《微积分(Ⅰ)》包含极限与连续、导数与微分、不定积分与定积分、空间解析几何等四章,《微积分(Ⅱ)》包含多元函数微分学、二重积分与三重积分、曲线积分与曲面积分、数项级数与幂级数、微分方程等五章. 对数学要求较高的理工类专业,如电子、通信、电气、计算机等,本书可分两个学期讲授,第一学期

讲授《微积分(Ⅰ)》,第二学期讲授《微积分(Ⅱ)》;其他理工类专业,如土木、地质、环境、化工等,本书可与《线性代数》分两个学期讲授,第一学期讲授《微积分(Ⅰ)》,第二学期讲授《微积分(Ⅱ)》与《线性代数》的基本内容(如略去三重积分、曲线积分与曲面积分、基变换·坐标变换、二次型等).本书在附录部分提供了微积分课程的教学课时安排建议,供授课老师参考。

书中用*标出的部分为较难内容,供任课教师选用,一般留给学生课外自学.书中习题分A,B两组,A组为基本要求,B组为较高要求,每一章末还配有复习题,供学有余力的学生练习.书末附有习题答案与提示.

本书《微积分(Ⅰ)》由张玉莲、陈仲编著,陈仲写第1,4章,张玉莲写第2,3章;《微积分(Ⅱ)》由陈仲、王夕予、林小围编著,陈仲写第5,6章,王夕予写第7,8章,林小围写第9章.

感谢金陵学院教务处和基础教学部对编者的关心,感谢钱钟教授、王均义教授、黄卫华教授和王建民主任对编者的支持,感谢范克新、邓建平、袁明霞、马荣、章丽霞、魏云峰、邵宝刚等老师使用本书讲授微积分课程,并给编者提供宝贵的修改建议.感谢东南大学出版社吉雄飞编辑的认真负责和悉心编校,使本书质量大有提高.

书中不足与错误难免,敬请智者不吝赐教.

编　者

2018.2 于南京大学

目　录

5 多元函数微分学

在本书的前三章中，我们研究的函数是依赖于一个变元(自变量)的一元函数，而在现实世界中，常常要研究某个变量依赖于两个或两个以上的变元，表现为某客观对象的变化规律受两个或两个以上因素的制约.为了定量地刻画某客观对象的变化规律，需要作多元分析，而多元函数微分学是进行多元分析的基础.

5.1 多元函数的极限与连续性

5.1.1 预备知识

1) 点集

为书写与画图的方便，下面介绍二维平面 $\mathbf{R}^2$ 上点集基本概念，这些概念也适用于 n 维空间 $\mathbf{R}^n (n \geqslant 3)$.

定义 5.1.1(邻域) 设 $P_0 \in \mathbf{R}^2, \delta > 0$.

(1) $U_\delta(P_0) \xlongequal{\text{def}} \{P \mid P \in \mathbf{R}^2, \mid P_0P \mid < \delta\}$，称 $U_\delta(P_0)$ 为**点 P_0 的 δ 邻域**，并称点 P_0 为**邻域的中心**，δ 为**邻域的半径**.

(2) $U_\delta^\circ(P_0) \xlongequal{\text{def}} \{P \mid P \in \mathbf{R}^2, 0 < \mid P_0P \mid < \delta\}$，称$U_\delta^\circ(P_0)$为**点 P_0 的去心 δ 邻域**.

定义 5.1.2(内点、边界点、开域、闭域) 设 $D \subseteq \mathbf{R}^2$.

(1) 若 $P_0 \in D$，且$\exists \delta > 0$，使得 $U_\delta(P_0) \subset D$，则称 P_0 是 D 的**内点**.

(2) 若 $P_1 \in \mathbf{R}^2$，且$\forall \delta > 0$，$U_\delta(P_1)$ 中既有点属于 D，又有点不属于 D，则称 P_1 是 D 的**边界点**. D 的边界点的集合称为 D 的**边界**，记为 ∂D.

(3) $\forall P \in D$，P 总是 D 的内点，又 $\forall P, Q \in D$，总存在连接 P, Q 的曲线$\overparen{PQ}$，使得$\overparen{PQ} \subset D$，则称 D 是**开域**.

(4) 若存在开域 D_1，使得 $D = D_1 \cup \partial D_1$，则称 D 是**闭域**. 开域与闭域统称为**区域**.

例如，下列点集

$$D_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

$$D_2 = \left\{(x, y) \middle| \frac{1}{4} < x^2 + y^2 < 1\right\}$$

$$D_3 = \{(x,y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$
$$\vdots$$

都是开域(见图 5.1).

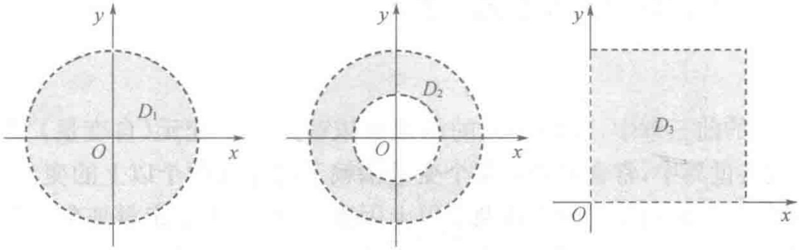

图 5.1

下列点集

$$D_4 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$
$$D_5 = \left\{(x,y) \middle| \frac{1}{4} \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$$
$$D_6 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$$
$$\vdots$$

都是闭域(见图 5.2).

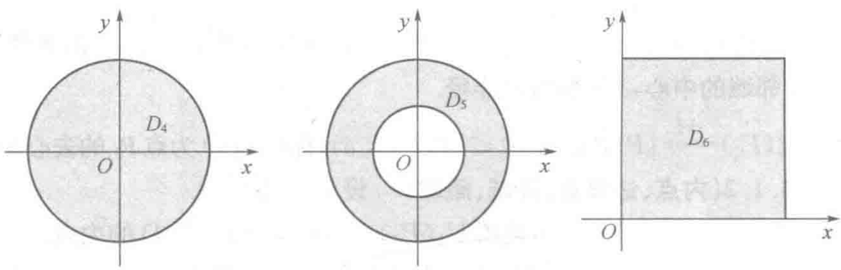

图 5.2

上面列举的区域有一共同特征,即它们总能包含在某个足够大的圆

$$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 < K, K \in \mathbf{R}^+\}$$

中,所以又称为**有界区域**.此外还有**无界区域**的概念,例如

$$D_7 = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$$
$$D_8 = \{(x,y) \mid 1 < x^2 + y^2 < +\infty\}$$
$$\vdots$$

都是无界区域.

定义 5.1.3(直径)　设 $D \subset \mathbf{R}^2$,且 D 为有界区域(或点集),称

$$d(D) \xlongequal{\text{def}} \max\left\{ |P_1P_2| \;\middle|\; P_1, P_2 \in D \cup \partial D \right\}$$

为**区域** D**(或点集)的直径**.

例如上述区域 D_1, D_2, D_4, D_5 的直径都是 2,区域 D_3, D_6 的直径都是$\sqrt{2}$;又如闭区间$[0,1]$与开区间$(0,1)$的直径都是 1.

2) 多元函数基本概念

在第 1 章中,我们称特殊的映射 $f: A \to \mathbf{R}(A \subseteq \mathbf{R})$ 为一元函数. 与此类似的,我们来引进多元函数概念.

定义 5.1.4(多元函数)　设 $D \subseteq \mathbf{R}^n (n \geqslant 2)$,我们称映射

$$f: D \to \mathbf{R}$$

为定义在 D 上的 ***n* 元函数**. n 元函数常常记为

$$z = f(P) \quad (P \in D)$$

或

$$z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad ((x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D)$$

称 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为**自变量**,z 为**因变量**,D 为 f 的**定义域**.

对于 $P_0(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \in D$,对应的函数值记为

$$z_0 = f(P_0) = f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$$

$\forall P \in D$,全体函数值的集合

$$f(D) \xlongequal{\text{def}} \{f(P) \mid P \in D\}$$

称为函数 f 的**值域**.

二元函数和 n 元函数$(n \geqslant 3)$统称为**多元函数**.

在记号上,常常将二元函数 $f: D \to \mathbf{R}(D \subseteq \mathbf{R}^2)$ 记为

$$z = f(x, y) \quad ((x, y) \in D)$$

将三元函数 $f: D \to \mathbf{R}(D \subseteq \mathbf{R}^3)$ 记为

$$u = f(x, y, z) \quad ((x, y, z) \in D)$$

多元函数常常用解析表达式给出,并不明确标明定义域,此时**定义域**可理解为使这个解析表达式中因变量有确定的实数值而自变量所容许变化的范围.

例 1　二元函数 $z = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ 的定义域为开域

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

其值域为

$$f(D)=\{z \mid 1 \leqslant z<+\infty\}$$

例 2　三元函数 $u=\ln(1-x^2-y^2-z^2)$ 的定义域为开域

$$D=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2<1\}$$

其值域为

$$f(D)=\{u \mid -\infty<u \leqslant 0\}$$

例 3　二元分段函数

$$z=\begin{cases}1 & (x^2+y^2 \leqslant 1); \\ \sqrt{x^2+y^2} & (1<x^2+y^2 \leqslant 2)\end{cases}$$

的定义域为闭域

$$D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 2\}$$

其值域为

$$f(D)=\{z \mid 1 \leqslant z \leqslant \sqrt{2}\}$$

多元函数是多元微积分研究的主要对象. 在这一章中我们重点研究二元函数，其研究的方法和结论原则上适用于其他多元函数. 值得注意的是，一元函数的许多研究方法和性质在二元函数中得到了继承，但是又有若干结论与二元函数有着本质的区别(如可微性等)，在学习多元函数的过程中要注意比较与对照.

在第 4.5 节中，我们曾介绍了各种二次曲面. 例如旋转抛物面 $z=x^2+y^2$，这个空间曲面的方程是一个二元函数. 一般说来，二元函数

$$f: D \rightarrow \mathbf{R} \quad (D \subseteq \mathbf{R}^2) \tag{5.1.1}$$

的图形是一空间曲面. 当 (x_0,y_0) 在其定义域上取定后，由二元函数(5.1.1) 可确定 $z_0=f(x_0,y_0)$，从而得到空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$. 当 (x,y) 取遍定义域 D 时，点 $P(x,y,z)$ 的集合构成一空间曲面 Σ，这一空间曲面 Σ 就是二元函数(5.1.1) 的图形(见图 5.3).

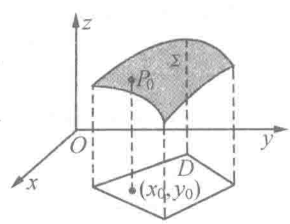

图 5.3

与一元复合函数和一元初等函数概念相对应，这里也有**多元复合函数**和**多元初等函数**的概念. 例如，$z=f(u,v)$，其中 $u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$；$z=f(u)$，其中 $u=\varphi(x,y)$ 等等是多元复合函数. 又如

$$z = x^2 y + \frac{\sin(x+y)}{1+\sqrt{xy}}, \quad u = \ln(1+xyz) + \frac{\tan(x+z)}{e^{xyz}}, \quad \cdots$$

是多元初等函数.

与一元函数可用隐函数表示一样,多元函数也可用隐函数表示. 例如球面方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{5.1.2}$$

可确定两个二元函数

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \qquad z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \tag{5.1.3}$$

它们的图形分别是上半球面与下半球面. 值得注意的是,与一元隐函数一样,由隐函数方程确定的多元隐函数常常不能写成显函数形式. 例如,由方程式

$$e^{x+z} + z = \sin(y+z)$$

能确定 $z = z(x,y)$(参见第 5.4 节),但不能解出用初等函数表示的显函数形式.

下面,我们介绍一下二元与三元向量函数的概念.

定义 5.1.5(向量函数)　设 $D \subseteq \mathbf{R}^2, \Omega \subseteq \mathbf{R}^3$.

(1) 设 $\varphi(u,v), \psi(u,v), \omega(u,v)$ 皆在 D 上有定义,称

$$\boldsymbol{r}(u,v) \xlongequal{\text{def}} (\varphi(u,v), \psi(u,v), \omega(u,v))$$

为三维空间 $\mathbf{R}^3$ 的**二元向量函数**.

(2) 设 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 皆在 Ω 上有定义,称

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) \xlongequal{\text{def}} (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$$

为三维空间 $\mathbf{R}^3$ 的**三元向量函数**.

3) 多元函数的初等性质

这里介绍的多元函数有界性与奇偶性概念,我们就二元函数进行叙述,对于三元及三元以上的多元函数可类似进行定义.

定义 5.1.6(有界性)　设 $D \subseteq \mathbf{R}^2, f: D \to \mathbf{R}$. 若 $\exists\, m, M \in \mathbf{R}$,使得 $\forall (x,y) \in D$,有

$$m \leqslant f(x,y) \leqslant M$$

则称**函数 $f(x,y)$ 在 D 上有界**,记为 $f \in \mathscr{B}(D)$,并称 m 与 M 分别为**函数 f 的下界和上界**.

定义 5.1.7(奇偶性)　设 $D \subseteq \mathbf{R}^2, f: D \to \mathbf{R}$.

(1) 若 $\forall (x,y) \in D$,有 $(-x,y) \in D$,且

$$f(-x,y) = -f(x,y) \quad (f(-x,y) = f(x,y))$$

则称区域 D 关于 $x=0$ 对称,并称函数 f 关于 x 为奇函数(关于 x 为偶函数);

(2) 若 $\forall(x,y)\in D$,有$(x,-y)\in D$,且

$$f(x,-y)=-f(x,y)\quad (f(x,-y)=f(x,y))$$

则称区域 D 关于 $y=0$ 对称,并称函数 f 关于 y 为奇函数(关于 y 为偶函数);

(3) 若 $\forall(x,y)\in D$,有$(-x,-y)\in D$,且

$$f(-x,-y)=-f(x,y)\quad (f(-x,-y)=f(x,y))$$

则称区域 D 关于原点 $O(0,0)$ 中心对称,并称函数 f 关于 x,y 为奇函数(关于 x,y 为偶函数).

例如二元函数 $f(x,y)=x\cos y$,关于 x 为奇函数,关于 y 为偶函数,关于 x,y 为奇函数.

5.1.2 多元函数的极限

多元函数的极限概念是刻画函数性态、变化趋势以及研究多元函数微积分的重要基础.下面我们就二元函数进行叙述,其方法和结论完全适合三元及三元以上的多元函数.二元函数比一元函数表面上看只多了一个自变量,但极限问题要复杂得多.

定义 5.1.8(二元函数的极限) 设 $D\subseteq\mathbf{R}^2$,$f(x,y)$ 在 D 上有定义,$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点或边界点.若$\exists A\in\mathbf{R}$,使得 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当 $P(x,y)\in \mathring{U}_\delta(P_0)\cap D$ 时,有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$,则称 A 为**函数 $f(x,y)$ 在 $P\to P_0$ 时的极限**,简称 A 为**函数 $f(x,y)$ 在 P_0 处的极限**.记为

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \quad \text{或} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

二元函数极限的复杂性在于动点 P 趋向于点 P_0 的方式具有很大的自由度,它可以是直线方式,还可以是任意曲线方式,不像一元函数只有左、右极限两种方式.正因为如此,二元函数求极限的问题要困难得多.下面介绍几个常用的方法.

1) 运用"ε-δ"定义证明

此方法与一元函数基本相同,即 $\forall\varepsilon>0$,利用放缩法找 $\delta>0$.

例 4 试用"ε-δ"定义证明:$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}(3x+2y)=7$.

证 设 $\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$,因

$$\begin{aligned}|3x+2y-7|&=|3(x-1)+2(y-2)|\\&\leqslant 3|x-1|+2|y-2|\leqslant 3\rho+2\rho=5\rho\end{aligned}$$

所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{1}{5}\varepsilon$，当 $0 < \rho < \delta$ 时，有 $|3x + 2y - 7| < \varepsilon$.

2) 运用极坐标变换求极限

令

$$x = x_0 + \rho\cos\theta, \quad y = y_0 + \rho\sin\theta$$

则

$$(x, y) \to (x_0, y_0) \Leftrightarrow \rho \to 0^+$$

例 5　试求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

解　令 $x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \rho\sin\theta\cos\theta = 0$$

注　这里是因为无穷小量与有界变量的乘积仍是无穷小量.

3) 运用等价无穷小替换法则求极限

例 6　试求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\sin x^2 y}{1 - \cos(xy)}$.

解　因 $x \to 0, y \to 2$ 时，$x^2 y \to 0, xy \to 0$，运用 $\square \to 0$ 时 $\sin\square \sim \square, 1 - \cos\square \sim \frac{1}{2}\square^2$，则

$$原式 = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{x^2 y}{\frac{1}{2}(xy)^2} = \lim_{y\to 2} \frac{2}{y} = 1$$

4) 运用一元函数的关于 e 的重要极限求二元函数的极限

例 7　试求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} (1 - xy)^{\frac{y}{x}}$.

解　因 $\square \to 0$ 时 $(1 + \square)^{\frac{1}{\square}} \to \mathrm{e}$，所以

$$原式 = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} (1 - xy)^{\frac{1}{-xy}(-y^2)} = \mathrm{e}^{-4}$$

在讨论二元函数极限时，若能取到两个不同的方式，使动点 P 趋向于定点 P_0 时极限值不同，则可以断言：该函数在 $P \to P_0$ 时极限不存在.

例 8　试证 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3 y^2}{(x^2 + y^4)^2}$ 不存在.

证　当点 P 沿直线 $y = x$ 趋向于点 P_0 时，有