新世纪高等学校规划教材·数学教育系列

中学数学解题研究

（第2版）

马波◎编著

ZHONGXUE SHUXUE JIETI YANJIU

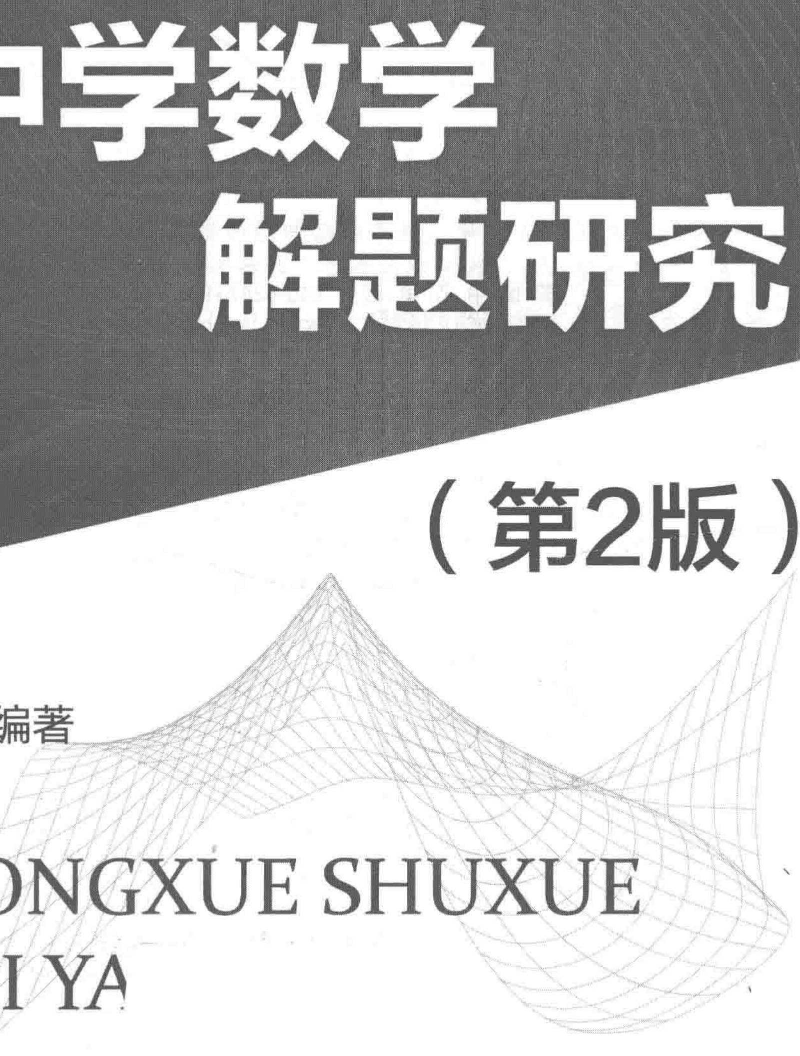
北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

新世纪高等学校规划教材 · 数学教育系列

中学数学解题研究

（第2版）

马波◎编著



ZHONGXUE SHUXUE
JIETI YA

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

中学数学解题研究/马波编著. —2版.—北京：北京师范大学出版社，2017.9

新世纪高等学校规划教材·数学教育系列

ISBN 978-7-303-22715-0

Ⅰ.①中… Ⅱ.①马… Ⅲ.①数学课—解题—教学研究—师范大学—教材 ②数学课—解题—教学研究—中学 Ⅳ.①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 210994 号

营销中心电话 010-62978190 62979006
北师大出版社科技与经管分社 www.jswsbook.com
电子信箱 jswsbook@163.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京市海淀区新街口外大街 19 号
邮政编码：100875

印　　刷：北京京师印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：787 mm×1 092 mm 1/16
印　　张：11.5
字　　数：242 千字
版　　次：2017 年 9 月第 2 版
印　　次：2017 年 9 月第 1 次印刷
定　　价：29.80 元

策划编辑：岳昌庆 刘风娟　　责任编辑：刘风娟 岳昌庆
美术编辑：刘 超　　装帧设计：刘 超
责任校对：赵非非　　责任印制：赵非非

前言

1915年，北京师范大学的前身——北京高等师范学校成立数理部，1922年成立数学系，2004年成立数学科学学院．经过百年的风风雨雨，数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验．将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的．

我院的数学教育研究已经有了90多年的光荣历史．1918年，北京高等师范学校数理部就开设了初等数学研究课程．在20世纪20—50年代，中国数学教育的先驱傅种孙教授撰写了多篇教学法研究论文（见《傅种孙数学教育文选》）．傅先生非常热心于中学数学教育．他倡议并组织翻译和编写了一套初等数学和教学法的教材，解决了全国高师联系中学课程的教材问题．在50年代前期，北京市编写了一套中学数学教学参考资料，请北京师范大学修改，傅先生热情地接受了这一工作，亲自组织教师仔细修改，为当时提高中学教学质量起到了很好的作用．傅先生和系里其他教师经常为北京市的中学数学教师组织讲座，讲授与中学教学有关的数学问题．这些讲座促进了中学教师的业务提高，反映很好．值得一提的是：我院梁绍鸿先生编著的《初等数学复习及研究（平面几何）》影响颇大，共发行100多万册．

随着社会发展的需要，通过数学教育工作者不断地实验与研究，至20世纪70年代，数学教育已经逐渐形成一门独立的学科．在国内，把数学教育作为一门独立的学科来研究，开始得较晚，自1980年以后才进行普遍地研究．1982年4月，丁尔陞先生在中国教育学会数学教学研究会第一届年会上提出了建立数学教育学的构想．

在傅种孙先生的领导和培养下，钟善基、丁尔陞、曹才翰和孙瑞清等先生长期从事数学教育和研究工作，为我国数学教育事业培养了大批的中学数学教师和高级专业人才，是我国数学教育学学科的主要创立者和奠基人．1982年以来，我校出版社先后出版了若干部数学教育有关的教材或参考书，但未策划出版数学教育主干课程系列教材．2005年5月，由北京师范大学数学科学学院李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部岳昌庆、王松浦进行了沟通和协商，由李仲来教授主编，准备对北京师范大学数学科学学院教师目前使用的北京师范大学出版社出版的几部数学教育教材进行修订后再版，再用几年时间，出版数学教育学科主要课程系列教材．

本套教材可供高等师范院校数学教育本科生和研究生、教育学院数学系、函授(数学专业)和在职中学教师等使用和参考.

北京师范大学数学科学学院

2017年5月1日

作者的话

解题是中学数学教学的重要内容，是中学生数学学习的主要活动之一. 合理的数学解题活动有助于加深对基础知识的理解与巩固，有助于逐步形成和完善合理的数学认知结构，有助于提高数学解题能力.

然而，解题是学好数学的必要条件，但绝不是充分条件. 解题的数量与学习的质量不成正比，与成绩也不是绝对的相关，有时甚至起反作用.

那么，应该如何发挥解题的作用呢？

第一，精心选择问题进行解答. 只有精心选择的问题，才能够起到事半功倍的效果.

第二，注重审题与解题思路的探索过程. 具体包括如何联想、如何类比、如何分类、如何构造等.

第三，注重一题多解. 从不同角度认识问题与解决问题是培养思维灵活性与创造性的重要途径.

第四，解题后进行反思. 可以从解题方法的总结归纳、数学思想的使用渗透、问题的进一步发展等方面进行.

第五，开展解题研究. 选择适当的问题，从解题的某一个侧面加以总结、概括、提升，撰写科研论文.

围绕上述内容和目标，我们开展了多年的研究与实践. 我们的观点是：选择具有代表性的问题供学生解答，充分发挥每一道题目的作用，引导学生正确解题. 从审题到思考、书写直至反思、撰写研究论文，每一个环节都认真对待，尤其是审题与反思两个环节，它们直接关系到解题的水平与能力. 经过近十年的摸索，我们总结出一系列较为实用的方法，现将其编辑成书，以供大家学习、借鉴与参考.

本书由三部分内容组成，第一部分从解题的作用、解题的要求和解题的一般过程三个方面阐述中学数学解题理论；第二部分介绍中学数学解题常用的思想方法，如化归思想，一般化与特殊化，分析与综合，演绎、归纳与类比，数形结合，分类讨论等；第三部分则对中学数学解题理论与思想方法进行专题研究，选择的专题主要有：方程、不等式、数列、函数、平面几何、立体几何、解析几何、初等数论、组合初步等.

本书是为师范院校师范专业的准教师们编写的教材．但读者绝不仅仅限于师范院校师范专业的学生，广大中学数学教师、教研员、数学学习较好的中学生，以及对中学数学解题感兴趣的大学教师、科研人员等都可以成为本书的读者．相信读者阅读本书并按着要求去做，在中学数学解题及其研究方面一定能够有非常大的收获．

本书选择的例题与习题，一部分来自或者改编自中考、高考、省市竞赛、全国联赛、希望杯、外国中学生数学竞赛以及IMO竞赛，一部分来自或者改编自单墫教授主编的《数学奥林匹克(高中版)》等书籍，主要参考的书目均列于正文后面的参考文献中．在此，向所有为本书做出贡献的人士表示最衷心的感谢．

还要特别感谢北京师范大学出版社的大力支持、也要感谢我的学生们，有一些解法是他们提供的．

由于时间和水平的限制，错误与不妥之处在所难免，望读者见谅，并提出宝贵意见．

马　波

2017年1月于北京师范大学

目　录

第 1 章　中学数学解题的一般理论

数学是一门应用十分广泛的学科. 它的研究对象是现实世界的空间形式和数量关系，以及其抽象结构、形式体系和一般关系. 涉及这些方面的学科也要用到数学，如，物理、化学等自然学科，地理、历史等社会学科都需要有数学的参与方能获得定量的研究成果，数学的理性思维方式在其他学科中也有着广泛的应用，就是无所不在的计算机，其核心技术也来源于数学. 拉法格在《马克思回忆录》中曾说："按照马克思的思想，一门科学只有当它达到了能够运用数学时，才算真正发展了."

数学的另一个特点是高度抽象. 这种抽象表现在：第一，数学的研究对象是抽象的，它们不存在于客观世界中. 如，点、线、面、数、式、集合，数学家苏哈金曾说："数学对象的特点就是，它不是普通性质的抽象，而是性质的性质的抽象，因此也是抽象的抽象或者叫概括的抽象."我国张奠宙先生也认为数学的研究对象是形式化了的思想材料. 第二，数学的研究总是摒弃一切现实内容而成为纯粹的形式. 苏联数学家、数学教育家辛钦认为，一切数学学科的决定性特点总是某种形式化的方法……数学问题的解决，不能由它所反映的物体或现实的物质本性去解决，而只能由它的形式结构特点去解决. 数学本身几乎完全周旋于抽象概念和它们的相互关系之中，如果物理、化学等自然科学为了证明某种观点常常求助于实验，那么数学的证明只需要推理和计算，也就是说，数学的概念与命题是抽象的，它的思想与方法也是抽象的. 第三，数学的抽象还表现为逐级抽象的特点. 如，具体的自然数 1，2，3，…→一般自然数 n→自然数集合 $\mathbf{N}$→整数集合 $\mathbf{Z}$→有理数集合 $\mathbf{Q}$→实数集合 $\mathbf{R}$→复数集合 $\mathbf{C}$；一次方程、二次方程→高次方程→整式方程→有理方程→代数方程. 从某种意义上讲，数学就是由抽象的知识组成的链条. 第四，数学的抽象能够达到感知达不到的领域. 如，极限过程，n 维空间，函数图像的无限延伸等. N·布特勒说："现代数学，这个最令人惊叹的智力创造，已经使人类心灵的目光穿过无限的时间，使人类心灵的手延伸到了无边无际的空间."

数学的第三个特点是讲究逻辑. 这种逻辑体现在所有概念(除少数原名)都必须定义，所有命题(除少数公理)都必须证明. 数学的严谨性要求数学的每一个分支都从少数几个公理与原名出发演绎出整个体系，欧氏几何就是公理化思想的最好体现. 爱因斯坦曾说："为什么数学比其他一切科学受到特殊的尊重? 一个理由是，它的命题是绝对可靠的和无可争辩的，而其他一切科学的命题在某种程度上都是可争辩的，并且经常处于被发现的事实推翻的危险之中……数学之所以有高声誉，还有一个理由，那就是数学给精密自然科学以某种程度的可靠性，没有数学，这些科学是达不到这种可靠性的."

那么，中学生如何学好数学呢? 牢固掌握基本的数学知识、技能与思想方法是前提，在此基础上解决一定量的问题是途径. 数学解题在学习高度抽象与严谨的数学理论时，起到了理论联系实际的作用. 波利亚曾在《怎样解题》中强调指出："中学数学教学首要的任务就是加强解题训练""掌握数学就意味着善于解题."

中学生所接触和需要解决的问题既包括数学教科书上的习题，又包括那些来自其他学科以及实际生产、生活的问题；既包括单纯练习式的习题，又包括非单纯练习式的问题；既包括条件充分、结论确定的习题，又包括具有探索性质的开放性问题.

1.1 中学数学解题的作用

“问题是数学的心脏”，是推动数学发展的巨大动力，“七桥问题”“四色问题”“费马大定理”“哥德巴赫猜想”“希尔伯特的23个问题”等都有力地说明了这一点. 中学生适当地开展解题活动，不但有助于知识的巩固、技能的形成、经验的积累、能力的提高，还有助于良好思想品质和个性的养成.

1. 数学解题有助于加深对基础知识的理解，有助于牢固掌握所学知识系统，有助于逐步形成和完善合理的数学认知结构

中学生在解题过程中，必须努力调动思维的积极性和已有的解题经验，努力回忆所学数学概念、法则、公式和定理，将原有数学认知结构中的知识、技能、思想方法以及经验调动起来，运用于新的问题情境中，这种运用不是简单的模仿操作，而是一种对原有认知结构中的知识、技能、思想方法重新组合的创造性运用. 通过解题，中学生不但加深了对知识的理解和掌握，而且使原有认知结构中的知识按纵横两个方向重新进行组合，使所学知识按用途建立新的有效连接，从而使原有数学认知结构更加完善. 学习过数学的人都有这样的体验：一些概念、定理、公式、法则在学习时体会不深，一旦在解题中发挥了威力，对它们的理解就会加深；或者初学时似乎都懂了，但不会将其运用于解题过程中，这就促使学生进一步学习有关概念、定理、公式、法则，从而加深对相关知识的理解.

当然，如果学生对基础知识、技能、思想方法掌握的较差，那么他们的解题水平就不会太高. 然而，不善于解答难题、繁题，并不意味着他们对基础知识、技能、思想方法掌握得不好.

2. 数学解题有助于提高数学能力，尤其是数学解题能力

能力属于个性心理特征范畴，它在活动中表现出来，并在活动中得到锻炼与提高. 开展适当的解题活动，对提高解题能力无疑是有帮助的.

正确地解题，需要认真审题、准确计算与推理、规范数学表达与反思回顾. 每一个环节都需要相应的能力，反之，在解题活动中，相应的能力也得到锻炼与提高，如检索与提取有用信息的能力、发现已知与未知之间关系的能力、文字语言与数学语言之间的转化能力、将已有知识进行重新组合迁移于新问题中的能力、运用以往解题经验的能力、数学计算能力、数学推理能力、数学表达能力、数学反思能力等，这些能力既能解决问题，又能在问题解决过程中得到加强.

应当指出，解题能力的大小，尤其是解答难题、繁题能力的大小，不能作为衡量学生是否牢固掌握所学知识和技能的唯一标准，因为“难题”与“繁题”往往需要某些特殊的技巧，而这些技巧不是数学的核心内容，也不是数学的基本思想方法. 事实上，越是基础的、本质的，往往就越简单，其使用范围也就越广泛.

3. 数学解题有助于培养良好的思想品德和个性

数学家狄尔曼说："数学能集中、强化人们的注意力，能够给人以发明创造的精细和谨慎的谦虚精神，能够激发人们追求真理的勇气和信心，……数学更能锻炼和发挥人们独立工作精神."中学生在解题活动中，亲身感受审题、分析、探索、表达与反思的全过程，对数学知识形成深刻的理解，体验数学巨大的应用价值，逐步形成正确的数学观和认真求知的科学态度. 数学问题灵活多样，解决这些问题，无疑对于学生具体问题具体分析的实事求是态度的培养有着重要意义. 较难问题的解决，能够培养学生克服困难的勇气；较复杂问题的解决，能够培养学生耐心细致的工作习惯和坚韧不拔的毅力；综合问题的解决，能够培养学生辩证唯物主义观点；实际问题的解决，能够培养学生理论联系实际的学风. 总的说来，解题在非智力因素的培养方面发挥着积极的作用.

当然，解题不是多多益善，过量的解题不但不能起到较好的效果，反而会增加学习负担，产生厌学情绪. 解题活动的关键在于把握好解题的目的，有针对性地选择数量适当的问题进行解答，做到有的放矢的解题训练.

1.2 中学数学解题的基本要求

解题最基本的要求是正确与书写规范. 较高要求是思路清晰、方法恰当、解答迅速. 具体说来，解题需要做到以下几点.

1. 思维缜密，对题目有较好的判断，能够迅速获得解题策略

数学是思维的体操，它高度的严谨性和逻辑要求是所有学习过数学的学生的共同体验. 要使解题正确，思维缜密是必不可少的条件，马马虎虎、丢三落四是不可能正确解出题目的. 而要对题目有较好的判断，牢固掌握基础知识、基本技能与基本的数学思想方法是前提，在此基础上还需要积累一定的解题经验. 只有这样，学生在遇到一个新问题时，才能正确地审题，恰当地联想以往学习过的知识和解决过的相关问题，并将它们迁移到该问题情境中，迅速地确定解题策略，从而正确地给出解答.

2. 能够用数学语言准确表达自己的思维活动

数学语言是国际通用语言，它与自然语言有很大的区别，包括符号语言、图形语言与文字语言，数学语言具有单义性、准确性与演算性. 物理学家赫兹说："我们无法避开一种感觉，即这些数学公式自有其独立的存在，自有其本身的智慧；它们比我们还要聪明，甚至比发明它们的人还要聪明，我们从它们得到的，实比原来装进去的多."

数学交流能力就是用数学语言交流的能力. 它是数学课程改革明确提出的新要求，交流能力既包括书面交流，也包括口头交流. 如果不能用数学语言表达自己的思维活动，就无法使别人准确了解你的观点，也就不能与别人较好地沟通.

我们在解题过程中，寻找到解题思路之后，需要用数学语言准确地将解题思路表达出来，这就要求我们书写工整、格式规范、条理清楚、详略得当. 这个要求看起来简单，实则需要长期的训练，初三与高三一年的重视是远远不够的. 许多中学教师与学生都认为书写是小事情，只要在大考前进行简单训练就可以了. 殊不知，平时书写随意，已经养成了不良的习惯，在大考前短短的训练怎么可能纠正过来，又怎么可能在关键考试中拿到好成

绩. 事实上，在中考和高考中因为书写丢掉分数的人不在少数.

书写问题，小的方面说是丢掉了分数，大的方面说是丢掉了认真、细致地做事态度，这会影响到未来生活、工作、事业的各个面面，这难道还不重要吗?

3. 能够准确地运算、标准地作图

运算能力是指进行运算的能力. 中学数学中的运算不但包括数值的计算，而且包括各种代数运算，初等超越运算，微分、积分的初步运算，概率中的运算，集合与逻辑的运算以及大量的数据处理. 运算能力的强弱依赖于运算知识掌握程度的高低、运用运算知识的熟练程度以及思维能力和运算操作能力等，它体现在运算的准确、合理和敏捷的程度上. 笔者曾有机会参加 1999 年与 2000 年北京地区高考数学试卷分析项目，在该项目的研究过程中，我们查阅了数千份北京地区考生试卷，发现不少考生因为计算问题失去了分数，极少数考生还失分严重(具体可以参考北京教育考试院相应年份的高考试卷分析). 究其原因，主要是中学教师，尤其是高中生不重视计算，他们在研究问题的时候，往往满足于探索解题思路，一旦获得就转入下一个问题的探索，认为这样能够节省时间，从而多见一些题目. 在高考复习阶段，更是看的题目多，完成解题全过程的少，即使在各种各样的模拟考试中，试卷上因计算丢失的分数也没有引起教师与学生的足够重视，许多中学生认为计算不是大问题，高考的时候认真就可以了. 诸不知，平时的不重视必然带来计算技能的生疏与计算能力的下降，而能力不是短时间就可以获得的，它必须在平时的日常学习中反复操练与运用方能逐渐提高.

作图标准能够为寻找解题思路提供信息. 新课程非常强调数形结合的思想方法，所谓数形结合就是根据数学问题的条件和结论之间的内在联系分析其代数含义，又揭示其几何直观，使数量关系与空间形式和谐地统一起来，它把抽象的符号语言与直观的图形语言结合起来，把抽象思维与形象思维结合起来. 通过对图形的认识与数形转化，以提高思维的灵活性、形象性、直观性，使问题化难为易，化抽象为具体. 好的作图恰恰能够起到这一作用.

同时，作图标准也是解题的要求. 尤其是几何问题、函数图像问题，图形本身就是题目呈现与解题过程的一部分. 作图不标准，不但影响解题思路的开辟，也影响解题的完美.

4. 养成解题前仔细审题、解题后认真反思的好习惯

审题是解题的开始，认真、仔细地审题，能够有效挖掘题目中蕴含的信息，提高解题正确率和速度，从而建立起已知、未知与已掌握知识之间的连接，发现解题途径，提高解题能力. 审题还能够帮助学生从多个角度思考问题，从而提高思维的灵活性，完善数学认知结构.

解题回顾是防止“题海”战术的有效方法. 它是解答问题的最后一个程序. 在给出一个问题的解答后，我们要对答案、解题过程以及解题中使用的数学知识和数学思想方法进行回顾，对题目的其他解法和推广大胆探索，这样做能够大大提高解题的能力.

关于审题与回顾的重要性在下一节有详细阐述.

1.3　中学数学解题的一般过程

波利亚的《怎样解题》是一部研究解题的经典著作．值得我们认真学习与研究．他在该书中给出了解题的一般过程，见表 1-1.

表 1-1　解题过程

第一步 了解问题	理解题目
	△未知数是什么？已知数是什么？条件是什么 △可能满足什么条件 △画一个图，引入适当的符号
第二步 找出已知数和未知数间的关系．假使你不能找出关系，就得考虑辅助问题	拟订方案
	△你以前曾见过它吗 △你知道与此有关的问题吗 △注视未知数！试想出一个有相同或相似未知数的熟悉的问题 △这里有一道题目和你的题目有关且以前解过的问题 你能应用它吗 你可以改述这问题吗 回到定义 △你若不能解这问题，试先解一个有关的问题．你能想出一个更容易着手的有关问题吗？一个更一般的问题？一个更特殊的问题？一个类似的问题？你能解问题的一部分吗 △你用了全部条件吗
第三步 执行你的方案	执行方案
	△执行你的解题计划，核校每一步骤
第四步 检查已经得到的解答	回顾
	△你能核校结果吗？你能核校论证吗 △你能用不同的方法得出结果吗 △你能应用这结果或方法到别的问题上去吗

1.3.1　审题

审题是解题的出发点，它直接关系到解题的正确率与速度，因此充分认识到审题的重要性和掌握审题的方法就是十分重要的了.

1.3.1.1　审题的重要性与意义

审题是解题的第一个步骤，只有正确地审题，才可能认清题目，获得正确、迅速的解答．如果审题不认真，第一步发生疏漏、偏差，那么后面的工作或者难以完成，或者多走弯路，当然就不可能达到解题的要求了.

1. 审题有利于挖掘题目中蕴含的信息，提高解题正确率和速度

解答一个问题，正确是首要前提，而正确解答的基础是准确、全面地理解题目中所给的信息，如，题目中显现的条件是什么？隐含的条件又有哪些？需要获得的结论是什么？条件是否充分？只有认真仔细地审题，才能获得正确、全面的信息，找到最佳解答途径，从而提高解题的正确率和速度. 如，1999 年高考理工农医类第 19 题"解不等式 $\sqrt{3\lg x-2}<2\lg x-1$"，这里就有一个隐含条件"$2\lg x-1>0$"，当年北京地区有很多考生没有把它挖掘出来，从而使解答走了不少弯路. 再如，2000 年高考理工农医类第 20 题"(1)已知数列 $\{c_n\}$，其中 $c_n=2^n+3^n$，且数列 $\{c_{n+1}-pc_n\}$ 为等比数列，求常数 p；(2)设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是公比不相等的两个等比数列，$c_n=a_n+b_n$，证明：数列 $\{c_n\}$ 不是等比数列."在北京地区的试卷上，许多考生从第(1)问中的 $c_n=2^n+3^n$ 与第(2)问中的 $c_n=a_n+b_n$ 就想当然地认为 $a_n=2^n$，$b_n=3^n$，这也是没有认真审题造成的.

不认真审题，导致解答过程出现这样或者那样的错误，成绩上不去，许多教师和学生没有认识到问题的所在，相反地认为是由于解题的数量没有到位，于是，教师与学生共同"造海"，学生们在海里苦游. 然而用数量代替质量的做法，不但浪费了教师与学生的时间，而且更为严重的是使学生失去了学习的兴趣，尤其是学习数学的兴趣，这是得不偿失的做法.

2. 审题有利于建立联想，发现解题途径，提高解题能力

解题能力是解决问题的能力，它在解题活动中表现出来，并且影响解题的质量和速度，解题能力主要通过解题活动加以培养. 认真审题，准确地理解题目的实质，能够促使我们联想到曾经做过的类似题目或者以往学习过的相关知识，从而有助于我们找到题目中已知和结论之间的桥梁，迅速获得解题思路，正确、迅速地解答题目. 如，苏联中学生数学竞赛 1987 年十年级的题目之一"证明：从任意三个正数中，总能选出两个正数 x，y，使得 $0\leqslant\frac{x-y}{1+xy}\leqslant 1$"，通过审题观察发现，$\frac{x-y}{1+xy}$ 与两角差的正切展开 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ 形式上非常类似，从而联想到正切函数，利用正切函数值的性质和抽屉原理就能够得到解答. 否则，没有认真审题，没有联想到正切函数，就很难解决这个问题了.

3. 审题有利于培养思维灵活性，完善数学认知结构

数学是一门逻辑性很强的学科. 知识之间有着紧密的内在联系，这种联系既有纵向的，如，点、直线、三角形、四边形、多边形、圆；也有横向的，如，三角形面积的求解就可以将几何 $\left(S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_a\right)$、代数 $\left(S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\ p=\frac{a+b+c}{2}\right)$、三角 $\left(S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C\right)$、解析几何(建立恰当的直角坐标系，求三角形三边长，利用海伦公式求解)、微积分(建立恰当的直角坐标系，将三角形各边表示成相应的函数，利用函数在适当区域的积分获得三角形的面积)相关知识联系起来. 知识之间的有效连接在其数学认知结构中越多，越有利于进一步学习，当然也越有利于知识的提取、迁移、举一反三. 波利亚在《怎样解题》中指出："通过对解题活动、特别是已有的成功实践的深入分析总结出一般性的思维方法或模式，而后者在今后的解题活动中，就可起到一定的启发和指

导作用."“它会给你指出整个或者部分解题途径，它或多或少地清楚地向你建议该怎么做.”

学习数学的最终目的之一就是能够用所学数学知识解决问题. 重视审题，重视从不同角度认识题目，能够充分揭示题目中蕴含的信息，从而获得不同的解法. 如，$\sqrt{a^2+b^2}$既可以看成一个无理式，也可以看成以a，b(均为正数时)为直角边长的直角三角形斜边的长度，边长分别为a与b(均为正数时)的矩形对角线的长度，平面上点(a, b)到原点的距离，还可以看成向量$\overrightarrow{OP}$(P的坐标是(a, b))的模长以及复数$a+bi$的模长等. 事实上，看待问题的角度越多，解决问题的策略就越多，问题得到解决的概率也就越大. 同时，我们的思维也更加灵活，知识在认知结构中的有效连接也更加丰富，数学认知结构也更加完善.

再如，**问题**　设$0<a_i<a(i=1, 2, 3, 4)$，求证：

$\dfrac{a_1+a_2+a_3+a_4}{a}-\dfrac{a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_1}{a^2}<2$对一切$a\in\mathbf{R}_+$成立.

该问题可以转化为

$$2a^2-(a_1+a_2+a_3+a_4)a+(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_1)>0.$$

从不等式角度认识该问题，可以利用不等式通常的证明方法——放缩法加以证明；如果将不等式看成有关a的二次三项式，那么就可以采用函数极值的知识解决问题；如果将不等式中的每一项看成矩形面积，那么就可以采用数形结合的思想方法构造几何图形加以解决.

这个问题通过多种解法有机地将不等式、函数、面积的相关知识联系起来. 如果学生能够养成认真并从多个角度审题的好习惯，那么解决问题的能力就可以得到提高，数学思维也更加灵活，数学认知结构也更加完善. 这样的一个问题的价值不是等价于几个问题的价值吗？我们为什么不重视题目信息的挖掘，不追求解题的质量，而仅仅在乎解题的数量呢？

4. 审题有利于培养认真细致、勇于创新的良好品质

我们在分析1999年和2000年北京地区高考数学试卷的过程中，发现许多学生因为审题有误导致解答错误. 有不少中学生在解题过程中，往往看一眼题目就进入解答阶段，他们认为，过多地看题目会浪费时间，诸不知认真细致地审题，能够挖掘出题目中更多的信息，从而建立更多联想，获得更多解答途径，从中选择最优解答，提高解题效率. 有不少中学生认为，马虎不是什么大的毛病，有些教师也能够原谅学生因为没有看清楚题目而出现的错误. 但是不认真审题，满足于对题目的一知半解，直接的损失是成绩的不理想，长远的损失是学生养成了做事不认真的坏习惯. 而这种习惯是会迁移到处理其他事情，从而违背了基础教育最重要的目标之一——培养学生良好的品质与习惯.

题目的创新解法更需要认真审题，只有多挖掘题目中的信息，才能够获得创新的解法. 如，证明等式$\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=1$是关于$x$的恒等式(其中$x$，$a$，$b$，$c$是实数，并且$a$，$b$，$c$互不相等). 对于这个问题，许多学生都采用常规解法，即将等式左边进行通分、化简、运算加以证明；但也有少数学生认真研究题目所给信息，发现等式左边是关于x的一元二次式，联想到一元二次方程的知识，于是将等式