俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

Partially Ordered Space Functional Analysis (I)

半序空间泛函分析(上)

[苏] Л. В. 康托洛维奇 [苏] Б. З. 乌利赫 [苏] А. Г. 平斯克尔 著
《半序空间泛函分析》编译组 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

Partially Ordered Space Functional Analysis (I)

半序空间泛函分析（上）

[苏] Л. В. 康托洛维奇 [苏] Б. З. 武利赫 [苏] А. Г. 平斯克尔 著

《半序空间泛函分析》编译组 译

HITP

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书共有六章，分别为：线性半序空间（K 空间），K 空间的分解与并合，K 空间元素的积分表示，K 空间的扩展，正则 K 空间，具有度量函数的 K 空间及赋范 K 空间. 书中配有相关练习题以供读者学习理解.

本书适合数学专业学生及数学爱好者参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

半序空间泛函分析. 上/(苏)康托洛维奇，(苏)乌利赫，(苏)平斯克尔著.《半序空间泛函分析》编译组译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018.6

ISBN 978-7-5603-7429-1

Ⅰ.①半… Ⅱ.①康…②乌…③平…④半… Ⅲ.①半序线性空间—泛函分析 Ⅳ.①O177.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 136305 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　王勇钢
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨圣铂印刷有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 14.5　字数 260 千字
版　　次　2018 年 6 月第 1 版　2018 年 6 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-7429-1
定　　价　48.00 元

原序

本书叙述了线性半序空间及其中的算子理论，是叙述这一新数学概念的第一本专著．这个理论可以认为是泛函分析的一个独立分支，但此理论又与数学的其他许多分支有关．这个理论自创立迄今约 15 年，基本上是苏联数学家的研究成果．现在已有不少著作在研究并探讨这个理论，因而此理论现在已有很大的发展，并在各方面获得了应用．我们自然要说一说这理论在近代数学中的地位．

在数学的发展过程中，除积累经验及新的事实以外，抽象与推广的作用是异常重大的．抽象与推广的步骤，通常是这样进行的：用某种抽象方法，把以前在数学上讨论过的一系列问题，统一成一个问题，并找出这问题的一般解答来．这样，对于一般问题所包括的一切个别问题也都特别地给出了解答．然而这步骤的意义主要还不仅限于这一点，因为这些个别问题的一大部分解答是早就知道的；其更大的意义还在于：对问题做了这样一个新的提法之后，其本质就明确而且简化到像中等数学的那种程度．在解决一般问题的过程中，又使我们可以发现一些新的方法，来提出并解决那些在过去甚至不可能想到的新问题．这种进展的例子有：字母符号的引入和无穷小分析的发现．由于有了后者，那些在 16，17 世纪期间只有当时第一流数学家才能解决的问题，如今成为可给普通学生做考试的题目了．

抽象方法的进一步重要进展是在19世纪完成的．首先有非欧几里得几何（Лобачевский）、群论（Galois）及集合论（G. Cantor）．最终，公理方法在数学界获得了公认．公理方法是这样的：把对具体对象（数、矩阵、多项式、函数）的研究，变为对适合某些公理（公设）的东西所成的抽象集合的研究．对于这种普遍的系统所获得的定理和结构，以后可以按非常不同的形式应用于不同的具体对象．在这方面，20世纪中最重要的成就有：抽象空间的理论、近世代数（群、环、域）、概率论的公理化构成，最后还有泛函分析．

这里必须特别指出泛函分析的重要性，它是近世数学里最重要而且最有发展前途的领域之一．虽然这门数学学科兴起的时间不久，但它已在分析学的许多问题中获得很大的应用．必须强调指出，巴拿赫及其学派所创立的赋范空间理论，及由于苏联数学家在这方面的工作而引起的新方向，对于泛函分析成为一门独立科学是有其特别重要的意义．

泛函分析的运用，照例能使我们揭露过去研究结果的意义，能使经典分析的结构系统化，并又将其大为简化．此外，又能把问题的提法大为加深和推广，从而得以把它们更往前推进．这就是说，除了把从前所得的结果（当然，如果没有从前的结果，就不能有推进）系统化，以及在某种程度上把它们加以清理或"贬值"外，泛函分析的运用还同时做出了巨大的、有创造性的工作．

在这个意义上，泛函分析对于经典分析的作用，在某种程度上，可以跟解析几何及微积分对于几何曲线问题的作用相比．

泛函分析发展的初期只是应用在理论问题上．目前，泛函分析的概念与方法已成功地而且是多方面地应用到理论物理、数学物理以及应用数学上，特别是用于分析学的近似计算方法上．这样，泛函分析就有着直接的实际应用．

泛函分析的发展前途是远大的．我们认为，今后几十年内，可望在这方面产生新的成就，使数学分析的结构发生改革并且重新加以武装．

作为本书主要内容的这个泛函分析的分支，是由当时（1935）泛函分析方面（也许就是在整个抽象数学中）的带有本质性的缺点而自然产生的．

在近代数学中起着主要作用的一切普遍概念：群、环、域、度量空间及拓扑空间，等等，都可算是实数集的一个推广．事实上，如果我们考察实数集的一些基本性质：(1)代数运算之存在（加与乘），(2)极限关系——连续、距离，(3)布置、序，则在上述这些抽象概念内，都保存了实数集的某些性质：在群、环及场中，保存着第一项性质；在拓扑空间及度量空间中，保存着第二项性质；在拓扑群及线性空间中，第一项及第二项性质都保存着；在有序集中，保存着第三项性

质.

在保存最后那种性质(序)的道路上来加以推广,已经显然是不够的了.在数学上最常见的重要集合,如矩阵、多项式及函数等的集合,都以群、环的身份出现,也以拓扑空间的身份出现,但是,甚至像那跟实数集这样相近的结构,如同复数集与矢量集,也都不能自然地给它们规定次序,因此对这些结构,通常就不能引入布置次序的概念.

抽象结构中的这个缺点,在泛函分析方面特别突出.在对函数及序列的线性空间作分析时甚为重要的具体讨论中,正、不等、正运算等概念都具有重要的作用.但这些概念以及与此有关的事实,在巴拿赫赋范空间中却得不到任何反映,这就使我们不能用泛函分析的方法来处理经典分析中的一些重要问题.

如我们已说过的,即使对于矢量和函数,如果也像对于实数那样地来要求:任意两个不同元素,恒有一个较大一个较小,我们就已经不能自然地引入布置次序(>,<)的概念了.但是,如果我们不这样要求,而仅要求半有序的话,困难马上就没有了.例如,对于两个矢量,如果其中一个的所有分量,都大于或等于另一个的所有对应分量,我们自然就可以认为前者大于或等于后者,但是如果没有这种情形,我们就不再引入大小关系.

由于泛函分析上的需要,在线性集中引入半序是件特别重要的事.这样,就引出对所要研究的全部理论极为重要的一个概念,即半序线性空间(简称 K 空间)的概念.在这样命名的线性集合里,有一类元素被定义为正的,并且通常不等式的性质保持有效;另外,对于任何一个囿集,其确界的存在也是保证了的.

在这样的空间里,绝对值概念可以自然地引入,收敛概念也是如此.从这些定义来看,K 空间的性质在多方面接近于实数集,尽管它可以有多种的对象作为元素,如矢量、序列及各类的函数,等等.必须说明:半序系统概念本身以及跟它相近的概念,在以前的一些著作中也已遇到过.在这里要首先指出:沙杜诺夫斯基(С. О. Шатуновский)[1]① 关于极限的一般概念,戴德金(Dedekind)[1]关于格的定义,以及布尔(Boole)[1,2]在数理逻辑方面的工作.但是,这些工作及其对数学的总的进展上的价值,在它们出世之初并没有受到足够的重视.后来(1934—1935),不仅在泛函分析方面,而且也在数学的其他各个分支,都需要考察半序集并在抽象系统中引入次序关系,于是又把早已知道的事实重新建立起

① 本书参考文献统一在下册中列出.——编校注

来，又有人对这些概念开始作广泛而深入的研究.

出现在这个时期的，有阿列山德罗夫(П. С. Александров)[1]的工作，他引入了离散空间的概念(这基本上与格的概念相同)，又阐述了这概念在拓扑学方面的意义；有库洛什(А. Г. Курош)[1,2]在格的分解理论方面的工作；有格里汶柯(В. И. Гливенко)[1,2]关于研究各类格的工作，特别是关于度量格以及它对于测度论与概率论上可能有的应用. 在这里还必须提到同时期的工作，有斯通(M. H. Stone)的工作，他研究了布尔代数以及如何将其实现的问题；有冯·诺依曼(J. von Neumann)的工作，他研究了连续几何；有奥雷(O. Ore)的工作，他研究了格的理论在代数上的应用；特别是伯克霍夫(G. Birkhoff)的工作，他研究了格理论的各种问题. 伯克霍夫著有一部专著(见 G. Birkhoff[4])，对这方面的结果作了一个言简意赅的叙述，并概述了与这有关的其他问题.

但在本书中，一般半序集和格的理论及其应用，几乎没有放进去. 我们集中注意力于半序线性集的理论，因为它对于函数论及泛函分析有最大的应用.

对于这方面，在彼得格勒(现称圣彼得堡)进行了最深入的工作. 在康托洛维奇(Л. В. Канторович)的早期(1935—1936)工作中，给出了半序线性空间(以及更一般空间)的公理体系，建立了这种空间的基本性质，引入并研究了如下的最重要特殊空间：正则的，带有度量函数的，赋范的；又建立了在这些空间上的线性算子理论. 这些研究曾在彼得格勒大学泛函分析讨论会上报告过；其后(1936—1937)，康托洛维奇又接受了“以半序空间理论为基础的泛函分析”这门专门课程，由此，彼得格勒就有一批数学家参加了这方面的工作，特别是本书的另外两位作者，尤金(А. И. Юдин)、耶维支(М. А. Явец)，以及后来的阿基洛夫(Г. П. Акилов)、巴鲁耶夫(А. Н. Балуев)，这就使问题的研究范围大为扩展.

平斯克尔(А. Г. Пинскер)(1938)引入了扩展 K 空间的运算及半加性泛函的概念，后者与离析元素的概念关系很密切，并在他以后的工作中广泛地应用了它. 乌里赫(Б. З. Вулих)(1940)建立了在 K 空间引入乘法运算的可能性并引入了乘法运算类. 后来又知道，不但可以引入元素的乘积，而且还可以引入元素的任意函数. K 空间的结构，它的分解及分支都被人研究了，新型的 K 空间被引入了(平斯克尔).

最后，用具体空间(矢量的，函数的)来实现半序空间的问题有了深刻的研究，在这方面，彼得格勒的数学家们的工作，是与克莱恩(М. Г. Крейн)的敖德萨学派的工作紧密结合在一起的.

在 1940 年，М. Г. 克莱恩及 С. Г. 克莱恩证明了由连续函数的集来实现赋

范半序线性空间的可能性. 由此，特别得到 A. И. 尤金早已得出的结果：有穷维的 K 空间与欧几里得空间同构.

随后，A. Г. 平斯克尔[5,10]、M. Г. 克莱恩及 C. Г. 克莱恩[2]及角谷静夫(C. Какутани)[1,2]讨论了用可测函数及序列来实现赋范 K 空间的问题，并借可取无穷值的连续函数的帮助，得到了 K 空间的一般表现(Б. З. Вулих[10]).

还要指出，更早一些时候，约由 1936 年起，M. Г. 克莱恩就研究过具有正元素所成锥体的赋范空间. 在这方面，M. Г. 克莱恩及其学生获得很多重要而有趣的结果，并且这些结果有各式各样的应用. 由于这些问题不属于本书的主要范围，我们不加以叙述. 这些问题在 M. Г. 克莱恩与 M. A. 鲁特曼(M. A. Рутман)[1]在《Успехи Математических наук》3. 1(1948)的总结论文中有完整的介绍.

半序空间的一般理论对于具体空间(可测函数，有界变差函数)已有许多应用，它把已知事实重新阐明并导出了许多新的结果. 但在这些结果中，要以 K 空间算子理论在各方面应用的成效为最大. 这个理论大大地丰富了以赋范空间线性算子理论为主的通常线性泛函分析，因此，使泛函分析对经典分析的应用范围大为扩展.

在这理论的特点中，必须指出如下这一重要事实：在这理论中，考察若干类线性运算是很自然的事，但其中仅有一类与巴拿赫线性算子类完全相同. 正算子概念在这个理论中的作用是很大的，而在巴拿赫理论中则没有这种概念. 在泛函分析本身的应用中，我们可以用算子的拓展问题为例，利用这些概念来给出算子可拓展的充分条件(Л. В. 康托洛维奇)，这用以前的术语是做不到的，而且又证明在其他一些情形下拓展是不可能的(Г. П. 阿基洛夫).

完备线性泛函这个新概念(A. Г. 平斯克尔)促成了对于普遍形式的 K 空间及相配空间的结构作深刻的研究. 线性算子的解析表示问题在 Л. В. 康托洛维奇及 Б. З. 乌里赫的工作中有了研究. 这些工作，与赋范及收敛空间中关于泛函及算子的解析表示的研究(Г. M. 菲赫金哥尔茨及 И. M. 盖尔方特等)有密切关系.

在理论对于分析的应用中，我们要指出(比方说)一个极简单的途径，来得到关于矩问题的定理，而这定理的证明在以前则是很麻烦的. 此外，还可指出这理论对集的函数理论上的应用.

在对函数方程的应用方面(Л. В. 康托洛维奇)，半序空间理论使我们有可能给出强函数方法的抽象处理，而这方法是解决存在问题的一个经典方法. 应用了我们所得到的一般定理，可以获得关于微分方程与积分方程解的存在、唯

一性、连续性方面的新的和早已知道的定理. 这个方法的抽象处理也可用在方程的近似求解问题上. 特别的，由于在估值时不用实数而用 K 空间中适当选择的元素，使逐步逼近法的收敛范围及问题中的第一固有值的估计更为准确. 因此，在这些问题中，K 空间理论就跟实际应用有了直接的联系.

在本书中，若干非线性分析问题（例如，离析与部分加性算子理论）是不讨论的，还有属于拓扑性质的问题（例如，K 空间的各种拓扑构造，拓扑半序群），半序群理论以及其他与 K 空间接近的理论（其研究已经开展且部分结果已发表），在本书中也没有讨论.

我们也没有给出 K 空间理论对于某些分支的应用，因为在这些分支中 K 空间的应用还没有定型，例如在概率论基础方面，在各态历经（Эрголическая）理论方面及在希尔伯特空间的算子理论方面的应用.

我们可以期待，K 空间理论在其进一步的发展中，还可以找到对其他数学分支的应用，例如对于群的一般理论，对于环论，对于集的描述理论等的应用.

我们希望本书的出版将推进 K 空间本身的理论，以及推进它对数学其他分支的更广泛的应用.

我们假定读者有实变函数论课程的知识，但书中也指出如何从 K 空间理论的普遍定理，来得出实变函数论中的一些事实.

本书并不需要读者预先具有泛函分析方面的任何知识，但书中用到的赋范空间理论的一些材料 ，或者是由于它在一般联系上的重要性而提到了，或者是作为更一般结构下的特例而得出的. 因此，本书可以看作泛函分析的一个特殊而独立的教本，但没有包括泛函分析中的一些重要分支.

本书第一部分（第一章至第六章）叙述空间本身的理论；第二部分（第七章至第十二章）叙述函数算子与函数方程；第十三章是单独的，它叙述实现问题.

在本书的正文中，文献索引尽量减少，特别是不再指出本书作者的著作. 文献资料放在下册的“资料附录”中.

在本书各章里，引用到同一章中的定理时，不再说出第几章.

作者衷心感谢他们的老师 Г. М. 菲赫金哥尔茨教授，他引导作者们注意泛函分析的问题，并推进了半序空间的理论，而且经常注意作者们的工作. 他的很多宝贵的意见，在我们写本书时都已被采纳.

在写第九章及第十二章时，Г. П. 阿基洛夫具体地给了我们帮助. Д. А. 拉依可夫细心地阅读了原稿，并提供了很多在最后校阅时为我们所采用的意见. 对 Г. П. 阿基洛夫及 Д. А. 拉依可夫，我们深表感谢.

我们也感谢参加校对的 A. H. 巴鲁也夫，И. П. 梅索斯基赫，Г. Ш. 鲁滨斯坦及 M. Ф. 西罗霍夫.

编　者

2012 年 6 月 8 日

◎ 目录

第一编 半序空间理论

第一编

半序空间理论

线性半序空间(K 空间)[①]

第一章

在第一章里面，我们给出本书所要研究的主要对象——K 空间——的定义并建立一些它的一般性质.

§1 K 空间的定义及其基本性质

1.1 线性集

线性集的概念在数学的各种问题中具有基本的重要性.这是一种群,其中基本的群的运算是“加”,这里还定义了群里面的元素与数相乘的运算,而且这两种运算适合于普通的代数定律.在 n 维空间内,有普通运算的矢量集便是线性集的一个例子.我们现在把精确的定义给出.

设 X 为一个集,在它里面定义了它的任意两元素的和,与它的每一元素乘以实数的积,且和与积均仍在 X 的范围之内.我们用拉丁字母 $x,y,z,\cdots$ 代表 X 的元素,用希腊字母 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 代表实数.假设这些运算满足下列规律:

(1)$x+y=y+x$(加法的交换法).

(2)$(x+y)+z=x+(y+z)$(加法的结合性).

① 编校注:本书最早成书于1958年.由于本书翻译时间是在新中国成立不久,语言也刚刚由文言文逐步转换为白话文,所以本书中译者翻译的语言属于文言文与白话文相渗透.本次出版,编辑遵从作者原来的译文,在不影响读者阅读的基础上保留了译者的语言风格.

(3) 有元素 $\mathbf{0}$ 存在，叫作零，使对于任意 x 有 $0x=\mathbf{0}$.

(4) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$（乘法对加法的分配性）.

(5) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$（乘法对加法的分配性）.

(6) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$（乘法的结合性）.

(7) $1x=x$.

在这些条件下，集 X 叫作线性集.

若 X 为任意集，则在它里面定义了满足上述条件(1) 至(7) 的加法与乘法后，就说集 X 是线性化了.

我们试由所述的条件推出一些简单的结果. 首先注意

$$x+\mathbf{0}=1x+0x=(1+0)x=x$$

(8) 引入元素 $-x$，设

$$-x=(-1)x$$

则

$$x+(-x)=(1-1)x=0x=\mathbf{0}$$

(9) 现在可以在 X 里面定义一个与加法相反的单值运算 —— 减法，令

$$x-y=x+(-y)$$

则

$$(x-y)+y=[x+(-y)]+y=x+[(-y)+y]=x+\mathbf{0}=x$$

另一方面，假如 $x=y+z$，那么 $z=x-y$. 事实上

$$x-y=x+(-y)=[(-y)+y]+z=\mathbf{0}+z=z$$

因此假如把线性集看成对加法运算的群，那么零元素就是群里面的单位元素.

(10) 若 $\alpha x=\mathbf{0}$，且 $\alpha\neq 0$，则 $x=\mathbf{0}$.

事实上，由条件(7)(6) 和(3) 得

$$x=1x=\left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right)x=\frac{1}{\alpha}(\alpha x)=\mathbf{0}\text{①}$$

(11) 若 $\alpha x=\alpha y$，且 $\alpha\neq 0$，则 $x=y$.

事实上，$\alpha(x-y)=\alpha x-\alpha y=\mathbf{0}$，由上面结果得 $x-y=\mathbf{0}$，即 $x=y$.

(12) 若 $\alpha x=\beta x$，且 $\alpha\neq\beta$，则 $x=\mathbf{0}$.

事实上，$(\alpha-\beta)x=\alpha x-\beta x=\mathbf{0}$，故由(10)，得 $x=\mathbf{0}$.

(13) 若 $\alpha x=\mathbf{0}$，且 $x\neq\mathbf{0}$，则 $\alpha=0$.

由(10) 立得上述结果.

---

① 显然对于任何 α，都有 $\alpha\mathbf{0}=\mathbf{0}$. 实际上 $\mathbf{0}=0x$，因此

$$\alpha\mathbf{0}=(\alpha 0)x=0x=\mathbf{0}$$

(14) 若 $\alpha x=\alpha y$,且 $x\neq y$,则 $\alpha=0$.

由(11) 立得上述结果.

1.2 K 空间

设在线性集 X 里面对于它的某些元素规定了 $x>\mathbf{0}$(x 大于零) 的关系.基于这个关系我们又引入 $x>y$(x 大于 y) 的关系,其定义即是 $x-y>\mathbf{0}$.并且,和平常一样,若 $x>y$ 或 $x=y$,则写作 $x\geqslant y$;若 $y>x$(对应地 $y\geqslant x$),则写作 $x<y$(对应地 $x\leqslant y$).

此外我们假设在 X 里面满足下列五个公理:

公理 Ⅰ 关系 $x>\mathbf{0}$ 与 $x=\mathbf{0}$ 不能同时成立.

公理 Ⅱ 若 $x>\mathbf{0}$,$y>\mathbf{0}$,则 $x+y>\mathbf{0}$.

公理 Ⅲ 对于任何 $x\in X$,有元素 $y\geqslant\mathbf{0}$ 存在,使 $y\geqslant x$.

公理 Ⅳ 若 $x>\mathbf{0}$ 和 $\alpha>0$,则 $\alpha x>\mathbf{0}$.

在叙述公理 Ⅴ 以前,先引进一些定义.

设 $E\subset X$ 为集 X 的一个子集.若所有 E 的元素都小于或等于某一元素 $y\in X$,则 y 称为集 E 的一个上界,并且说集 E 是囿于上的.同样地规定了囿于下的定义.若一个集囿于上并且囿于下,则简称为囿集.

对于一个囿于上的集 $E=\{x_\xi\}(\xi\in\varXi)$[①],所有的上界当中可能有一个最小的存在,也就是说有这样一个元素 $z\in X$ 存在,它是 E 的一个上界,并且若 y 是 E 的任意一个上界时,则 $z\leqslant y$.这个上界中的最小者用 $\sup E$ 或 $\sup\limits_{\xi\in\varXi}x_\xi$ 表示,并称为上确界或简称为上端[②].类似的,若一个囿于下的集 E 有一个最大的下界存在,则以 $\inf E=\inf\limits_{\xi}x_\xi$(下确界或简称为下端) 表之.

对于含有穷个元素的集,我们常把 $\sup(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\inf(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 分别写作

$$x_1\vee x_2\vee\cdots\vee x_n \text{ 和 } x_1\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_n$$

公理 Ⅴ 每一个囿于上的集 $E\subset X$ 都有一个上端 $\sup E$.

满足上述公理的线性空间 X 称为线性半序空间或 K 空间.这一类型的空间就是本书所要研究的基本对象.

在 K 空间内的元素 x 称为正的,假如 $x\geqslant\mathbf{0}$.元素 x 称为负的,假如 $x\leqslant\mathbf{0}$.当 $x>\mathbf{0}$($x<\mathbf{0}$) 时,我们称 x 为纯正的(纯负的).注意:若 $x\geqslant\mathbf{0}$,则 $-x\leqslant\mathbf{0}$.由我们的公理并不能推出:对于任意 x,关系 $x\geqslant\mathbf{0}$ 或 $x\leqslant\mathbf{0}$ 至少有一个成立;换句话说,可能存在着某些元素,它们与零是"不能比较的",于是也就存在着不能

① $\varXi$ 是以指标 ξ 为元素的一个任意集.

② 读者注意,我们并不是把"端" 用作"界" 的同义字,而是作为确界的简称.