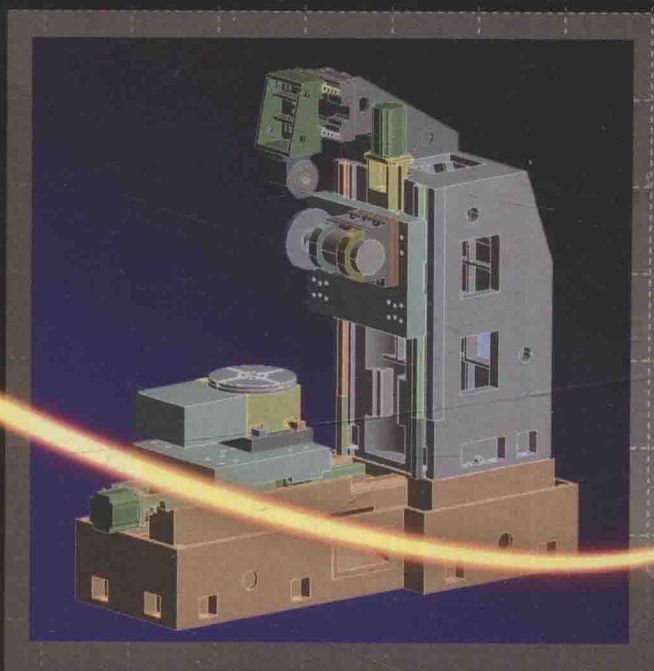




高端科技专著丛书

摆线轮磨齿机 振动特性分析及测试

◆ 王会良 著



中国工信出版集团



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>

高端科技专著丛书

摆线轮磨齿机 振动特性分析及测试

王会良 著

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书对摆线轮磨齿机振动特性进行分析,通过合理优化磨削加工参数,达到提高摆线轮齿面精度的目的。

全书共7章,首先分析摆线轮齿廓形成原理并构建摆线轮磨齿机三维实体模型;进而结合机械振动理论,建立摆线轮磨齿机磨削振动系统模型;最后在多种工况下分析摆线轮磨齿机的振动特性,优化磨削工艺参数,为提高摆线轮齿面精度提供了理论指导。

本书可供从事摆线轮磨齿机振动特性研究及相关工作的工程技术人员、技术装备人员以及高等院校相关专业师生参考使用。

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

摆线轮磨齿机振动特性分析及测试/王会良著. —北京:电子工业出版社,2018.3

(高端科技专著丛书)

ISBN 978-7-121-33742-0

I. ①摆… II. ①王… III. ①摆线齿轮—磨齿机—振动—研究 IV. ①TG61

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第036850号

策划编辑:钱维扬

责任编辑:张来盛

印 刷:北京京华虎彩印刷有限公司

装 订:北京京华虎彩印刷有限公司

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编 100036

开 本:787×1092 1/16 印张:8.75 字数:224千字

版 次:2018年3月第1版

印 次:2018年3月第1次印刷

定 价:36.00元

凡购买电子工业出版社的图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系。

联系及邮购电话:(010) 88254888, 88258888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式:(010) 88254459; qianwy@phei.com.cn。

前 言

RV 减速器是一种广泛应用于关节机器人的减速部件,具有结构紧凑、传动比大、扭转刚度大、振动小、噪音低、耐冲击等优势,成为目前机器人技术中应用最广泛的核心部件之一。它主要由前级行星齿轮传动系统和后级摆线针轮传动系统两级组成,其中摆线针轮是 RV 减速器的关键零件。国外对于摆线轮的报道和有关文献一直处于技术封锁状态,而我国在关节机器人的减速器这一领域的研究发展较为缓慢,与国外成熟的技术相比,仍落后几十年。摆线轮的加工技术与国外还有一定的差距,是目前制约我国机器人发展的一个瓶颈。摆线轮的磨削技术是提高摆线轮齿面精度的关键工序,因此开展摆线轮磨齿机的振动特性研究对合理优化磨削工艺参数,减小磨削系统振动对加工过程的影响,提高摆线轮齿面精度具有一定的研究意义。

著者长期从事齿轮数字化设计及其智能制造方面的研究工作,参与数控成形磨齿机、摆线轮磨齿机的研制,积累了一定的研究成果,为本书的顺利出版打下了坚实的基础。著者先后参与完成了国家自然科学基金青年项目“点接触的行星齿轮传动误差理论分析与实验研究(51205108)”、“汽车驱动桥弧齿锥齿轮齿面偏差网络智能控制理论研究(51405135)”、国家自然科学基金面上项目“新型直廓内齿轮行星传动的动态特性及成形磨削方法(50575068)”；参与在研国家自然科学基金面上项目“局部共轭内斜齿轮修形机制与成形磨削理论研究(51575160)”、河南省重大科技专项“机器人 RV 减速器摆线针轮精密制造技术研究及装备开发(161100211200)”；主持在研河南省科技攻关项目“RV 减速器传动特性分析及测试平台(172102210038)”以及河南省自然科学基金项目“高性能重载斜齿轮齿面微观形貌成形机理及分区磨削理论研究(182300410229)”。

本书对摆线轮磨齿机振动特性进行分析,合理优化磨削加工参数,以达到提高摆线轮齿面精度的目的。本书首先分析摆线轮齿廓形成原理,构建摆线轮磨齿机三维实体模型;进而结合机械振动理论,建立摆线轮磨齿机磨削振动系统模型,在多种工况下分析摆线轮磨齿机的振动特性,为优化磨削工艺参数、提高摆线轮齿面精度奠定基础。全书共分为 7 章:第 1 章介绍了矢量函数与坐标变换,为后续章节做铺垫;第 2 章分析摆线轮齿面成形原理,设计摆线轮磨齿机结构三维模型;第 3 章结合磨削力数学模型,建立

摆线轮磨齿机系统振动模型；第4章对摆线轮磨齿机立柱、整机进行模态分析；第5章搭建摆线轮磨齿机振动测试实验平台；第6章对多工况下摆线轮磨齿机振动信号进行频域分析，合理优化磨削加工参数；第7章进行总结和展望。

在本书完稿之际，感谢机械装备先进制造河南省协同创新中心、齿轮制造及装备河南省工程实验室、河南省机器人与智能系统重点实验室提供的科研平台；同时感谢所有支持本书出版的单位和个人；感谢曹杨麒、郑宇、杨英豪、赵紫钦等研究生为本书顺利完稿所做的努力。此外，本书出版也得到了河南省重大科技专项“机器人RV减速器摆线针轮精密制造技术研究及装备开发（161100211200）”、河南省科技攻关项目“气压驱动步态康复训练机器人关键共性技术研究（172102210036）”、“RV减速器传动特性分析及测试平台（172102210038）”、河南省自然科学基金项目“高性能重载斜齿轮齿面微观形貌成形机理及分区磨削理论研究（182300410229）”以及河南科技大学博士科研启动基金等项目的资助。

由于著者水平有限，书中难免存在错误和疏漏之处，恳求读者和各位专家批评指正。

王会良

2018年2月28日于河南科技大学

目 录

第 1 章 矢量与坐标变换	1
1.1 矢量函数	1
1.1.1 矢量代数	1
1.1.2 矢量分析	2
1.1.3 直线与平面的矢量方程	4
1.2 坐标系选择与坐标变换	6
1.2.1 坐标系选择	6
1.2.2 坐标变换	7
1.2.3 坐标变换与矩阵	15
1.3 矢量旋转与坐标变换	20
1.3.1 矢量旋转	20
1.3.2 矢量的坐标变换	25
1.4 本章小结	27
第 2 章 摆线轮磨削原理	28
2.1 磨削加工方法	28
2.1.1 磨削机理	28
2.1.2 磨削加工分类与特点	28
2.2 成形磨齿机磨削原理	31
2.2.1 成形磨齿原理	31
2.2.2 成形磨齿机结构	32
2.3 摆线轮磨齿机磨削原理	34
2.3.1 摆线轮齿面方程	34
2.3.2 摆线轮啮合方程	38
2.3.3 摆线轮磨齿原理	42
2.3.4 摆线轮磨齿机结构	43

2.4 本章小结	47
第3章 磨削振动模型构建	48
3.1 磨削振动理论	48
3.1.1 振动的分类	48
3.1.2 磨削中的振纹	52
3.1.3 非线性振动理论	52
3.2 磨削力计算	55
3.2.1 磨削力数学模型	55
3.2.2 成形磨齿磨削力计算	59
3.2.3 摆线轮磨齿磨削力计算	61
3.3 磨齿机振动系统模型建立	62
3.3.1 成形磨削运动轨迹方程	62
3.3.2 振动系统模型建立	64
3.4 本章小结	69
第4章 摆线轮磨齿机模态分析	70
4.1 结构参数对动态特性的灵敏度分析	70
4.1.1 灵敏度分析	70
4.1.2 立柱动态特性分析	71
4.1.3 主轴动态特性分析	75
4.2 摆线轮磨齿机有限元模型	79
4.2.1 模态分析理论基础	79
4.2.2 摆线轮磨齿机模型简化	81
4.2.3 边界条件确定	84
4.3 摆线轮磨齿机有限元分析	86
4.3.1 摆线轮磨齿机静力学分析	86
4.3.2 摆线轮磨齿机预应力分析	87
4.4 本章小结	92
第5章 摆线轮磨齿机振动测试	93
5.1 测试目的	93

5.2 测试准备	93
5.2.1 采集信号选择	93
5.2.2 测试设备确定	96
5.2.3 砂轮架动态特性测试	98
5.2.4 实验方案与实验参数	101
5.3 振动测试实验	101
5.3.1 磨削程序编制	102
5.3.2 测试平台组成	103
5.3.3 测试实验实施	105
5.4 实验数据采集与处理	106
5.4.1 实验数据采集	106
5.4.2 实验数据处理	108
5.5 本章小结	109
第6章 振动信号分析	111
6.1 非加工状态振动数据分析	111
6.2 加工状态振动数据频域分析	113
6.2.1 砂轮转速对振动的影响分析	114
6.2.2 进给速度对振动的影响分析	116
6.2.3 磨削深度对振动的影响分析	118
6.3 时域信号对比分析	119
6.4 频域信号对比分析	121
6.4.1 主轴转速对磨齿机振动的影响分析	122
6.4.2 磨削深度对磨齿机振动的影响分析	125
6.5 本章小结	128
第7章 总结与展望	129
7.1 研究工作总结	129
7.2 展望	130
参考文献	131

第 1 章 矢量与坐标变换

1.1 矢量函数

1.1.1 矢量代数

矢量代数又称为计算几何，是计算理论科学的一个重要分支。该学科自 20 世纪 70 年代末从算法设计与分析中独立出来，近些年已经有了巨大的发展，不仅产生了一系列重要的理论成果，也在众多实际领域中得到了广泛的应用。一般定义的矢量称为自由矢量，物理学中应用的某些矢量有时还具有一些附加的特征，这类矢量称为约束矢量，包括定位矢量和滑动矢量。定位矢量是指矢量的作用点为一确定位置；滑动矢量是指矢量的作用点可以沿矢量的作用线自由滑动。若对于标量 t 的每一个数值，都有变矢量 θ 的确定量（大小方向都确定的矢量）与之相对应，则变矢量 θ 称为自变量 t 的矢量函数，记作 $\theta = \theta(t)$ 。矢量函数还可表示为 $\theta = xi + yj + zk$ ，其中， $x = x(t)$ ， $y = y(t)$ ， $z = z(t)$ 为 3 个标量函数。

若把坐标系中任一点 M 所在位置的变矢量 $\overline{O_m M}$ 表示成径矢形式 a ，则当 t 变动时，点 M 在空间描绘出一条曲线，称为矢量函数的矢端曲线。类似于标量函数的数学分析，可引入矢量函数的极限、连续、导数、微分、不定积分和定积分等概念。为了避免不必要的重复，这里仅着重叙述矢量函数导数的定义。

如图 1-1 中三维空间内的位置可以用矢量形式表示

$$\theta_m = \overline{O_m M} = x_m i_m + y_m j_m + z_m k_m \quad (1-1)$$

式中， (i_m, j_m, k_m) 是坐标轴的单位矢量，或者用列矩阵表示

$$\theta_m = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} \quad (1-2)$$

式中，下角标“ m ”指明，位置矢量表示在坐标系 $S_m(x_m, y_m, z_m)$ 中。在标记矢量时，可以采用行矩阵表示位置矢量。

$$\theta_m = [x_m, y_m, z_m]^T \quad (1-3)$$

式 (1-3) 中, θ_m^T 是关于 θ_m 的转置矩阵。

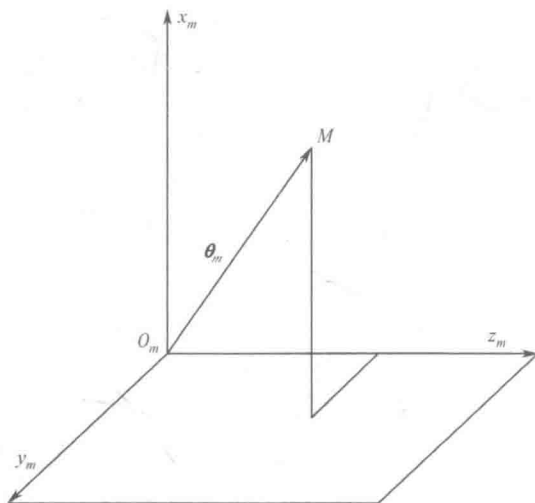


图 1-1 在笛卡尔坐标系中的位置矢量

在笛卡尔坐标系中一般采用 3 个数 (x, y, z) 来确定位置矢量的顶点。通常, 坐标变换需要使用矩阵的乘法和加法混合运算的方法。然而, 如果位置矢量用齐次坐标表示, 则只需要矩阵的乘法。在三维立体空间中, 一个点的齐次坐标由 4 个数 (x^*, y^*, z^*, t^*) 来确定, 这 4 个数不同时为零, 并且其中只有 3 个数是独立数。假定 $t^* \neq 0$, 则普通坐标和齐次坐标之间的关系式为

$$x = \frac{x^*}{t^*}, \quad y = \frac{y^*}{t^*}, \quad z = \frac{z^*}{t^*} \quad (1-4)$$

利用 $t^*=1$, 则一个点可以用齐次坐标表示为 $(x, y, z, 1)$, 而一个位置矢量可以用矩阵表示为

$$\theta_m = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

1.1.2 矢量分析

矢量函数的极限和连续性与标量函数类似, 其导数形式也与标量函数类似。对于矢量函数 $\theta = \theta(t)$ 和 $t_0 \in (t_1, t_2)$ 若存在极限, 则极限就称作 $\theta = \theta(t)$ 在 t_0 处的导矢, 记作 $\theta'(t_0)$ 或 $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t_0}$ 。

$$\theta'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta(t_0 + \Delta t) - \theta(t_0)}{\Delta t} \quad (1-6)$$

如果将矢量函数 $\theta = \theta(t)$ 用 3 个分量来表示, 即

$$\theta(t) = \{x(t), y(t), z(t)\} \quad (1-7)$$

则它们作为普通的标量函数, 众所周知, 关于标量函数数学分析中的种种概念对于各个分量也同样适用。利用数量分析理论, 结合基本矢, 对各个分量稍加处理, 即可成为矢量分析的相应内容。如导矢

$$\theta'(t) = \{x'(t), y'(t), z'(t)\} \quad (1-8)$$

式中, $x'(t) = \frac{dx}{dt}$, $y'(t) = \frac{dy}{dt}$, $z'(t) = \frac{dz}{dt}$ 。

若 $\theta(t)$ 的矢端轨迹为一条曲线, 则 $\Delta\theta$ 是该曲线上参数分别为 t_0 和 $t_0 + \Delta t$ 的两点所引的弦上矢量。显然当 Δt 为正值时, $\Delta\theta/\Delta t$ 与 $\Delta\theta$ 同向, 反之为异向。为了方便, 统一把有向曲线 t 增加的方向作为正向, 则当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta\theta/\Delta t$ 的极限显然就是 t_0 处切线方向的矢量, 并且总是指向曲线的正向, 如图 1-2 所示。

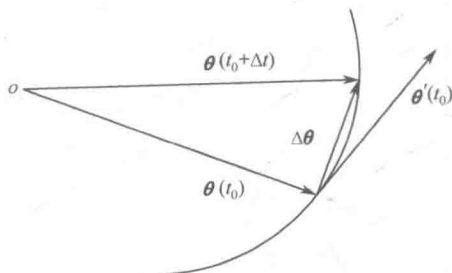


图 1-2 曲线的切线矢量

矢量函数微分的定义和形式与标量函数类似。对于复合函数

$$\theta = \theta(t), \quad t = \varphi(u) \quad (1-9)$$

则有

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{dt}{du} \quad (1-10)$$

矢量函数的泰勒公式如下:

$$\begin{aligned} \theta(t_0 + \Delta t) = & \theta(t_0) + \theta'(t_0)\Delta t + \frac{1}{2}\theta''(t_0)(\Delta t)^2 + \cdots + \\ & \frac{1}{(n-1)!}\theta^{(n-1)}(t_0)(\Delta t)^{n-1} + \frac{1}{n!}\theta^{(n)}(t_0)(\Delta t)^n + \varepsilon(\Delta t) \end{aligned} \quad (1-11)$$

式中, ε 为无穷小矢量, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon = 0$ 。

矢量函数 $\theta(t)$ 的不定积分为

$$\int \theta(t) dt = \psi(t) + C \quad (1-12)$$

式中, $\psi(t)$ 为 $\theta(t)$ 的一个原函数, 即 $\psi'(t) = \theta(t)$, C 为常矢。

若矢量函数 $\theta(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ 是可积的, 则有

$$\int_a^b \theta(t) dt = \mathbf{i} \int_a^b x(t) dt + \mathbf{j} \int_a^b y(t) dt + \mathbf{k} \int_a^b z(t) dt \quad (1-13)$$

标量函数定积分的概念以及定积分的许多性质都可以相应地推广到矢量函数中, 其基本公式仍然是

$$\int_a^b \theta(t) dt = \psi(b) - \psi(a) \quad (1-14)$$

式中, $\psi(t)$ 为 $\theta(t)$ 的任一原函数。

1.1.3 直线与平面的矢量方程

1. 直线矢量方程

这里先讲解一下直线矢量方程, 直线矢量方程的概念在本书参考文献里可以找到。

直线可以用坐标函数方程表示, 也可以用矢量方程表示, 如图 1-3 所示, l 为空间任意直线, P_0 为 l 上的已知点, 其径矢为 θ_0 , $\mathbf{v}$ 为与 l 平行的不等于零的矢量。若 θ 为直线 l 上的任意点 P 的径矢, 则直线 l 的参数方程为

$$\theta = \theta_0 + \mathbf{P}_0 P = \theta_0 + t\mathbf{v} \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (1-15)$$

若 P_1 为直线上另一已知点, 其径矢为 θ_1 , 令上式中的 $\mathbf{v} = \theta_1 - \theta_0$, 则直线 l 的参数方程又可以写为

$$\theta = \theta_0 + t(\theta_1 - \theta_0) \quad (-\infty < t < +\infty) \quad (1-16)$$

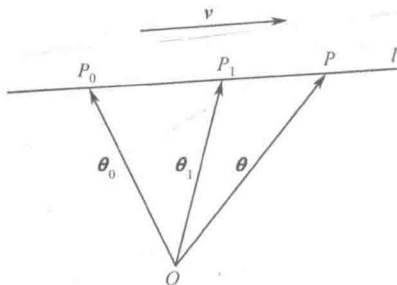


图 1-3 直线矢量

2. 平面矢量方程

如图 1-4 所示, P_0 为 π 平面上的已知点, 其径矢为 θ_0 , $\mathbf{n}$ 为与 π 平面垂直的不等于

零的矢量。若 θ 为 π 平面上任意点的径矢, 则 $\mathbf{P}_0\mathbf{P} = \theta - \theta_0$, 且与 $\mathbf{n}$ 相垂直, 故 π 平面的矢量方程为

$$\mathbf{n}(\theta - \theta_0) = 0 \quad (1-17)$$

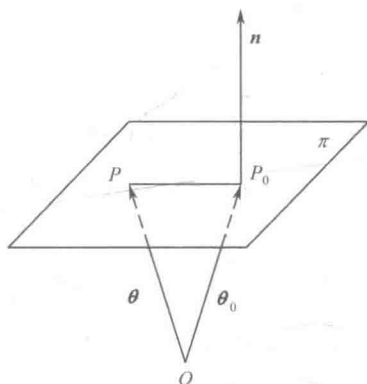


图 1-4 垂直矢量之间的关系

若 $\mathbf{v}_1$ 、 $\mathbf{v}_2$ 为平行于 π 平面、彼此不平行的两个矢量。由于 $\mathbf{P}_0\mathbf{P} = \theta - \theta_0$ 与 $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$ 相垂直, 如图 1-5 所示, 则 π 平面的矢量方程可写成

$$\{(\theta - \theta_0), \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} = 0 \quad (1-18)$$

若 P_1 、 P_2 为 π 平面上不与 P_0 共线的两点, 它们的径矢分别为 θ_1 、 θ_2 , 由于 $(\theta - \theta_0)$ 、 $(\theta_1 - \theta_0)$ 、 $(\theta_2 - \theta_0)$ 为 π 平面上三个不平行的矢量, 如图 1-6 所示, π 平面的矢量方程又可写为

$$\{(\theta - \theta_0), (\theta_1 - \theta_0), (\theta_2 - \theta_0)\} = 0 \quad (1-19)$$

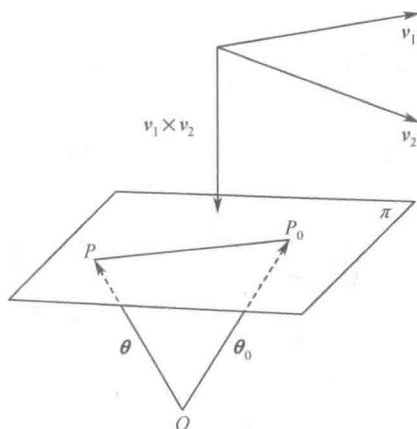


图 1-5 两个不平行矢量之间的关系

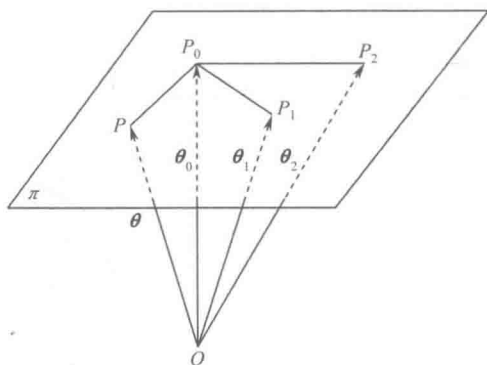


图 1-6 三个不平行矢量之间的关系

1.2 坐标系选择与坐标变换

1.2.1 坐标系选择

为了说明质点的位置、运动的快慢、方向等，必须为其选取坐标系。在参照系中，为确定空间一点的位置，按规定方法选取的有次序的一组数据，就叫作“坐标”。在某一问题中规定坐标的方法，就称为坐标系。坐标系分为以下几种：笛卡尔直角坐标系、平面极坐标系、柱坐标系和球坐标系等。直角坐标系还可称为正交坐标系。

选择坐标系对于研究交错传动两齿面间的共轭关系以及几何参数间的内在联系是极其重要的。坐标系的选择是否合理，不仅会对所得公式的形式造成影响，而且运算的繁简程度也会有所不同。因此，合理选择坐标系是研究空间啮合原理的重要基础，一般情况下多采用四坐标系，蜗杆与蜗轮啮合的四坐标系如图 1-7 所示。三维空间中的相互啮合，显然应该采用三维坐标系。

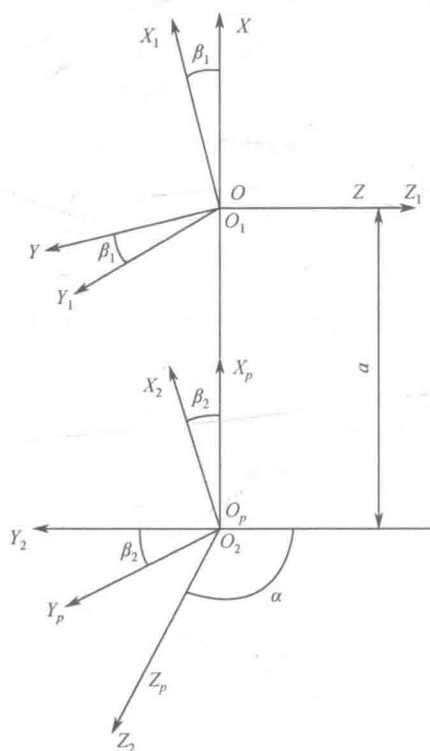


图 1-7 蜗杆与蜗轮啮合的四坐标系

动坐标系 $S_1(O_1X_1Y_1Z_1)$ 与蜗杆 1 相固连, 其中 Z_1 轴与蜗杆回转轴重合; 动坐标系 $S_2(O_2X_2Y_2Z_2)$ 与蜗轮 2 相固连, 其中 Z_2 轴与蜗轮的回转轴重合。以 Z_1 、 Z_2 轴的垂足 O_1 、 O_2 作为坐标系 S_1 和 S_2 的原点, 并以其公垂线作为 X_1 、 X_2 轴的起始位置。 Y_1 和 Y_2 轴的方向按右手定则来确定。

在固定坐标系 $S(OXYZ)$ 中, 原点 O 与 O_1 重合, Z 轴与 Z_1 轴重合, X 轴与公垂线 O_2O_1 重合。

辅助坐标系 $S_p(O_pX_pY_pZ_p)$ 的建立是为了便于进行坐标系变换, 其坐标原点 O_p 与 O_2 重合, X_p 与 X 轴重合, Z_p 与 Z_2 轴重合。

Z_1 、 Z_2 两轴间的垂直距离即蜗杆与蜗轮的中心距 $a = \overline{O_1O_2}$; 而夹角 α 为蜗杆与蜗轮轴线间的交错角。

1.2.2 坐标变换

坐标变换是空间实体的位置描述, 通过建立两个坐标系统之间一一对应的关系来实现, 是从一种坐标系统到另一种坐标系统的变换过程。分析空间啮合一般都在同一坐标系内, 因此需要多次对坐标轴移动与坐标原点移动的坐标变换公式进行推导。为了确保坐标变换公式的条理化和正确性, 现用矩阵作为坐标变换的算子, 坐标变换的公式通过算符的形式来表示。

例如, 要求图 1-7 中从坐标系 S 至坐标系 S_p 的变换关系。可将坐标系 S 沿 X 轴的负方向移动距离 a , 使 S 的原点与 S_p 的原点重合; 若再将 S 绕 X 轴回转 α 角, 则 S 与 S_p 将完全重合。坐标系 S 与 S_p 各坐标轴间方向余弦及原点位置间的关系如表 1-1 所示。

表 1-1 坐标系 S 与 S_p 各坐标轴间方向余弦及原点位置间的关系

新坐标	旧坐标			
	x	y	z	原点坐标
	轴间夹角余弦			
x_p	$\cos 0^\circ$	$\cos 90^\circ$	$\cos 90^\circ$	a
y_p	$\cos 90^\circ$	$\cos \alpha$	$\cos(90^\circ + \alpha)$	0
z_p	$\cos 90^\circ$	$\cos(90^\circ - \alpha)$	$\cos \alpha$	0

各坐标间的关系式可表示为

$$\begin{cases} x_p = x + a \\ y_p = y \cos \alpha - z \sin \alpha \\ z_p = y \sin \alpha + z \cos \alpha \end{cases} \quad (1-20)$$

系数矩阵为

$$M_{po} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-21)$$

为了使式(1-20)能写成两矩阵乘积的形式,根据矩阵相乘的法则,只有当前一矩阵的列数等于后一矩阵的行数时,两矩阵才能相乘。为此,在式中添加一恒等式 $t_p = t = 1$, 则式(1-20)变为

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ t_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \quad (1-22)$$

由坐标系 S 变换到坐标系 S_p 的系数矩阵为

$$M_{po} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-23)$$

这样,由坐标系 S 变换到坐标系 S_p 的坐标变换公式为

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ t_p \end{bmatrix} = M_{po} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \quad (1-24)$$

用矢量表示为

$$r_p = M_{po} r \quad (1-25)$$

式中, r_p 、 r 为空间一点在坐标系 S_p 、 S 的径矢。

同理,坐标系 S_p 与 S 中各坐标轴间的方向余弦及坐标原点间的关系如表 1-2 所示。

表 1-2 坐标系 S_p 与 S 中各坐标轴间的方向余弦及坐标原点间的关系

新坐标	旧坐标			
	x_p	y_p	z_p	原点坐标
	轴间夹角余弦			
x	$\cos 0^\circ$	$\cos 90^\circ$	$\cos 90^\circ$	$-a$
y	$\cos 90^\circ$	$\cos \alpha$	$\cos(90^\circ - \alpha)$	0
z	$\cos 90^\circ$	$\cos(90^\circ + \alpha)$	$\cos \alpha$	0

用关系式表示为

$$\begin{cases} x = x_p - a \\ y = y_p \cos \alpha + z_p \sin \alpha \\ z = -y_p \sin \alpha + z_p \cos \alpha \end{cases} \quad (1-26)$$

由坐标系 S_p 变换到坐标系 S 的系数矩阵为

$$\mathbf{M}_{op} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -a \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-27)$$

关于矩阵求逆计算可按下列公式进行。设将 $\mathbf{M}_{po}$ 和 $\mathbf{M}_{op}$ 写成普遍的形式

$$\mathbf{M}_{po} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-28)$$

由于矩阵 $\mathbf{M}_{po}$ 与 $\mathbf{M}_{op}$ 中左上角 3×3 阶方阵既互为逆矩阵, 又互为转置矩阵, 于是

$$\mathbf{M}_{op} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & b_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & b_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-29)$$

式 (1-29) 中, b_{14} 、 b_{24} 、 b_{34} 为 P 系坐标原点在 O 系中的三个坐标值, 即

$$\begin{bmatrix} b_{14} \\ b_{24} \\ b_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{px} \\ 0_{py} \\ 0_{pz} \end{bmatrix} \quad (1-30)$$

欲求坐标系 S_1 与坐标系 S 间的变换关系, 可先列出坐标系 S_1 与 S 中各坐标轴间的方向余弦及坐标系原点间的关系, 如表 1-3 所示。

表 1-3 坐标系 S_1 与 S 中各坐标轴间的方向余弦及坐标系原点间的关系

新坐标	旧坐标			
	x_1	y_1	z_1	原点坐标
	轴间夹角余弦			
x	$\cos \beta_1$	$\cos(90^\circ + \beta_1)$	$\cos 90^\circ$	0
y	$\cos(90^\circ - \beta_1)$	$\cos \beta_1$	$\cos 90^\circ$	0
z	$\cos 90^\circ$	$\cos 90^\circ$	$\cos 0^\circ$	0

则有 S_1 变换到 S 的系数矩阵为