全国高等农林院校“十三五”规划教材

高等数学

下册

郝新生　薛自学／主编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十三五”规划教材

高等数学

下册

郝新生　薛自学　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．下册／郝新生，薛自学主编．—北京：中国农业出版社，2017.8

全国高等农林院校“十三五”规划教材

ISBN 978-7-109-23296-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①郝… ②薛… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 207947 号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区麦子店街 18 号楼）

（邮政编码 100125）

策划编辑　魏明龙

文字编辑　魏明龙

北京通州皇家印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行

2017 年 8 月第 1 版　　2017 年 8 月北京第 1 次印刷

开本：787mm×1092mm　1/16　　印张：13

字数：305 千字

定价：26.00 元

内 容 简 介

本教材是按照高等数学课程教学基本要求，并结合编者多年的教学实践经验编写而成的．本套教材分上下两册，上册内容包括：函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程；下册内容包括：空间解析几何与向量代数、多元函数的微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数．每章各节均配有习题，章后配有总习题，教材末附有各章习题和总习题的参考答案．

本教材可作为普通高等院校工科类专业的高等数学课程教材，也可作为相关专业的教学参考书．

编写人员名单

主　编　郝新生　薛自学
副主编　赵喜梅　黎　虹
参　编　刘瑞香　张小英　刘海琴

前　言

高等数学是高等农业院校工科类专业的一门极其重要的基础课，是学习许多后继课程的基础．结合高等农业院校工科专业的学科特色，由甘肃农业大学和山西农业大学联合编写了这套有较强针对性的工科类专业用高等数学教材．

本教材的编写紧紧围绕高等农业院校工科类专业特点和教学基本要求，突出“淡化理论证明，加强实践应用”的宗旨，内容安排按照循序渐进、由浅入深的原则，文字叙述简洁明了、逻辑清晰，并尽可能通过实际背景引入数学概念，以便加深学生对内容的理解和掌握；在例题和习题的选择上力求难易适中、繁简适度，突出题型的多样性和典型性，每章均配有难度渐进的两套总习题，这将对提高学生的综合解题能力和实际应用能力发挥重要作用．

参加本教材编写的作者都是多年从事高等数学教学的一线教师，具有较高的理论水平和丰富的教学经验．本教材分上、下两册，上册的编写分工为：甘肃农业大学薛自学和山西农业大学郝新生负责全书的统稿工作，并由薛自学编写了第六章；甘肃农业大学黎虹编写了第一章；山西农业大学韩忠海编写了第三章；甘肃农业大学朱亚莉、程晓燕和周生伟分别编写了第二章、第四章和第五章．下册编写具体分工为：山西农业大学郝新生和甘肃农业大学薛自学负责全书的统稿工作，并由郝新生编写了第十一章；山西农业大学赵喜梅编写了第九章；甘肃农业大学黎虹编写了第八章；山西农业大学张小英编写了第七章；山西农业大学刘瑞香编写了第十章的前四节；山西农业大学刘海琴编写了第十章的后三节以及第十章的总习题．

本教材的编写得到了山西农业大学数学系和甘肃农业大学数学系全体教师的鼎力相助，在此对各位老师的辛勤付出表示衷心的感谢．由于编者的水平有限，教材中难免会出现一些缺点和疏漏，敬请各位读者批评指正．

编　者

2017 年 5 月

目　　录

第七章　空间解析几何与向量代数

空间解析几何同平面解析几何一样，其基本思想是用代数的方法来研究空间中的几何问题，是学习多元函数微积分的重要基础．本章先介绍向量的概念及其运算，然后以向量为工具建立平面及直线的方程，最后简单介绍空间曲面与空间曲线的方程表示．

第一节　空间直角坐标系与向量运算

一、空间直角坐标系

在平面解析几何里，为了确定平面上点的位置建立了平面直角坐标系，于是平面上的点与二元数组建立了一一对应关系．现在我们用类似的方法建立空间的点与三元数组之间的联系．

在空间取一定点 O，过点 O 作三条相互垂直且具有相同单位长度的数轴，分别叫作 x 轴(**横轴**)、y 轴(**纵轴**)、z 轴(**竖轴**)，并按右手规则确定它们的正方向：即伸出右手，拇指与其余并拢的四指垂直，当右手的四指从 x 轴的正向以逆时针方向旋转 $90°$转向 y 轴正向时，拇指的指向就是 z 轴的正向，这样的三条坐标轴就构成了一个**空间直角坐标系**，点 O 称为**坐标原点**．

三条数轴中任意两条确定一个平面，分别为 xOy 面、yOz 面和 zOx 面，统称为**坐标面**．三个坐标面将空间分成八个部分，称为八个**卦限**．以 x 轴、y 轴、z 轴正半轴为棱的卦限为第一卦限，在 xOy 平面上方按逆时针方向依次为第二、三、四卦限．在 xOy 平面下方与第一卦限相对的为第五卦限，然后按逆时针方向依次为第六、七、八卦限，如图 7－1 所示．

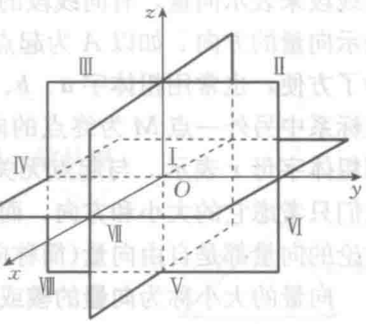

图 7－1

定了空间直角坐标系，就可以建立空间的点与有序数组之间的对应关系．

空间一点 M 的直角坐标是这样规定的：过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，它们与各轴的交点依次为 P、Q、R，这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为 x、y、z，于是空间一点 M 就唯一地确定了一个三元数组 (x, y, z)；反之，若已知一个有序数组 (x, y, z)，依次在 x 轴、y 轴、z 轴上找出坐标是 x、y、z 的三点 P、Q、R，分别过这三点作垂直于三个坐标轴的平面，必然相交于空间一点 M，则数组 (x, y, z) 唯一对应空间一点 M. 由此可见，空间任意一点与有序数组 (x, y, z) 之间存在着一一对应关系，数组 (x, y, z) 称为点 M 的**坐标**，x、y、z 分别称为点 M 的**横坐标**、**纵坐标**、**竖坐标**，坐标为 x、y、z 的点通常记为 $M(x, y, z)$，如图 7－2 所示．

已知空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2, z_2)$，如图 7－3 所示，过 M_1 和 M_2 分别

作与三个坐标轴垂直的平面，则六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体．容易看出，这长方体三条相邻棱长分别是 $|x_2-x_1|$、$|y_2-y_1|$、$|z_2-z_1|$，两次使用勾股定理可得空间两点间的距离公式：

$$d^2=|M_1M_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,$$

即
$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

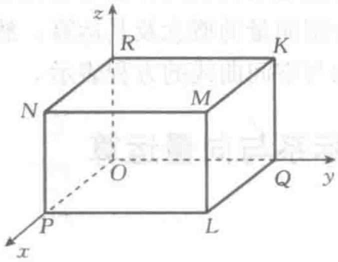

图 7－2

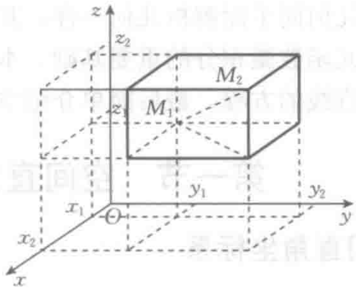

图 7－3

二、向量

在研究力学、物理学以及其他应用学科时，通常会遇到一类既有大小、又有方向的量，如力、力矩、速度、位移、加速度等，这类量称为**向量**(或**矢量**)．而只有大小没有方向的量，如长度、面积、体积、温度等，这类量称为**数量**(或**标量**)．

通常一个向量由两个要素决定：大小和方向．在几何上，往往用有向线段来表示向量，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向．如以 A 为起点 B 为终点的向量，记为$\overrightarrow{AB}$(图 7－4)．为了方便，也常用粗体字 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 等表示向量．以坐标原点 O 为起点，坐标系中另外一点 M 为终点的向量$\overrightarrow{OM}$称为点 M 对于点 O 的**向径**，常用粗体字母 $\boldsymbol{r}$ 表示．与起点无关的向量称为**自由向量**．对于自由向量，我们只考虑它的大小和方向，而不关心它的起点在什么地方．如果不作特别的说明，下面所讨论的向量都是自由向量(简称向量)．

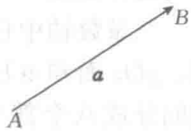

图 7－4

向量的大小称为**向量的模**或**长度**，记为 $|\boldsymbol{a}|$，模等于 1 的向量称为**单位向量**，与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记为 $\boldsymbol{a}^0$．模等于 0 的向量称为**零向量**，记为 $\mathbf{0}$，零向量的方向是任意的．与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 大小相等方向相同，就称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等(即经过平行移动后能完全重合的向量是相等的)，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

三、向量的线性运算

向量的线性运算是指两个向量的加法、减法和向量与数的乘法三种运算．

1. 向量的加法

在力学上，经常利用平行四边形法则求两个力的合力，对于一般向量可依此法则定义加法运算：

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，以空间某一定点 A 为始点作向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$、$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，再以这两个向量为邻边作平行四边形 $ABCD$，则从定点 A 到这个平行四边形对角顶点 C 所构成的向量 $\overrightarrow{AC}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 7-5(1))．这种用平行四边形的对角线向量来定义两向量的和的方法，叫作向量加法的平行四边形法则．

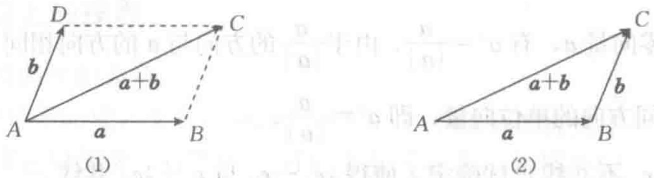

图 7-5

特殊地，如果两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 在同一直线上，那么规定它们的和为这样一个向量：当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同时，和向量的方向与原来两向量的方向相同，其模等于两向量的模之和；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反时，和向量的方向与较长的向量方向相同，而模等于两向量的模之差的绝对值．

由于平行四边形对边平行且相等，若将 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平移成首尾相接状态，即作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则相连的有向折线段起点 A 到终点 C 的向量 $\overrightarrow{AC}$ 显然也是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$．即 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$．此时三个向量构成一个三角形，这种求向量和的方法称为向量相加的三角形法则(图 7-5(2))．

利用向量相加的三角形法则，可将两个向量相加的定义推广到 n 个向量相加：使前一向量的终点作为下一向量的起点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$，再以第一向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点作一向量 $\boldsymbol{a}$，则这个向量就是 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$ 的和，即

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

向量加法满足以下运算规律：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

利用向量加法的三角形法则，很容易验证上面两条规则．故从略．

2. 向量的减法

规定两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

它可由三角形法则得到(图 7-6).

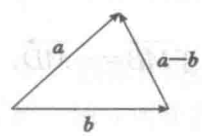

图 7-6

特殊地，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

由三角形两边之和大于第三边的原理，有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,\ |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

3. 向量与数的乘法

设 λ 是一个数，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，定义为

当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$；

当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反，模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量．

向量与数的乘积满足以下运算规律：

(1) 结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，其中$\lambda$、$\mu$都是常数．

根据向量与数的乘法规则，可以得出以下结论：

(1) 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行(也称共线)的充要条件是存在唯一的实数 $\lambda(\lambda\neq0)$，使$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$；

(2) 对任意非零向量 $\boldsymbol{a}$，有 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$. 由于$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，且$\left|\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right|=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}|}=1$，因此$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，即 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$.

例 1 设 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，试确定 λ 使得$\lambda\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2$ 共线．

解 由于 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，所以 $\lambda\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2$ 都不是零向量，因此，要使 $\lambda\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2$ 共线，则必存在 $k\neq0$，使得

$$\lambda\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2=k(\boldsymbol{e}_1+\lambda\boldsymbol{e}_2),$$

即

$$(\lambda-k)\boldsymbol{e}_1+(1-\lambda k)\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}.$$

由于 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，从而有

$$\lambda-k=0\text{ 且 }1-\lambda k=0,$$

解得

$$\lambda=\pm1.$$

例 2 在平行四边形 $ABCD$ 中，设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，试用$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$表示向量$\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$，这里$M$是平行四边形对角线的交点(图 7-7)．

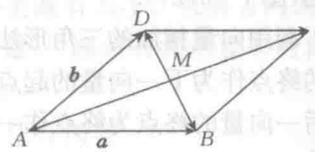

图 7-7

解 由于平行四边形的对角线互相平分，所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\,\overrightarrow{AM},$$

即$-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\,\overrightarrow{MA}$，于是$\overrightarrow{MA}=-\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

因为$\overrightarrow{MC}=-\overrightarrow{MA}$，所以$\overrightarrow{MC}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

又因为$-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\,\overrightarrow{MD}$，所以$\overrightarrow{MD}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

由于$\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MD}$，所以$\overrightarrow{MB}=\dfrac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

习 题 7-1

1. 点 $M(x, y, z)$的三个坐标 x，y，z 中若有一个为0，这个点在何处？若有两个为0，这个点在何处？
2. 空间点的坐标在八个卦限中的符号如何？
3. 点 $M(x, y, z)$关于坐标面、坐标轴及原点对称的点的坐标分别是什么？
4. 已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{c}=13\boldsymbol{e}_2-3\boldsymbol{e}_3$，求 $2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.
5. 设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-6\boldsymbol{a}+18\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=8(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，试证 A，B，D 三点共线．
6. 用向量法证明：三角形两边中点的连线平行且等于第三边的一半．
7. 如果平面上一个四边形的对角线互相平分，试用向量证明它是平行四边形．

8. 设非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 中的任意两个向量不共线，而 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，证 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$.

第二节　向量的分解式

一、向量在轴上的投影

首先定义空间两向量的夹角.

设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量，交于点 S(图 7-8)，若不相交可将其中一向量平行移动，使它们相交，将其中一向量绕点 S 在两向量所决定的平面上旋转，使它的正向与另一向量的正向重合，这样得到的旋转角度 φ(限定 $0<\varphi<\pi$)称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记为$(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})$.

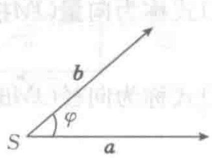

图 7-8

当$(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=0$ 或 π(即向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反)时，称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；

当$(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\dfrac{\pi}{2}$时，称它们垂直，记为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

其次，定义有向线段的值.

设有一轴 u，$\overrightarrow{AB}$是轴 u 上的有向线段，如果数 λ 满足：$|\lambda|=|\overrightarrow{AB}|$，且当$\overrightarrow{AB}$与 u 轴同向时，λ 为正；当$\overrightarrow{AB}$与 u 轴反向时，λ 为负，则称数 λ 为轴 u 上的**有向线段$\overrightarrow{AB}$的值**，记为 AB，即 $\lambda=AB$.

设 $\boldsymbol{e}$ 是与 u 轴同方向的单位向量，因为$|\overrightarrow{AB}|=|\lambda|=|\lambda||\boldsymbol{e}|=|\lambda\boldsymbol{e}|$，又由轴上有向线段值的定义，显然$\overrightarrow{AB}$与 $\lambda\boldsymbol{e}$ 方向相同，所以

$$\overrightarrow{AB}=\lambda\boldsymbol{e}. \tag{1}$$

(1)式表明，轴上的向量可以表示为该向量在轴上的值与轴同向的单位向量的乘积，称 λ 为向量$\overrightarrow{AB}$的坐标.

最后，定义向量在轴上的投影.

已知空间一点 A 及一轴 u，过点 A 作轴 u 的垂直平面 Π，则平面 Π 与轴的交点 A'称为 A 在轴 u 上的投影(图 7-9).

设向量$\overrightarrow{AB}$的始点 A 和终点 B 在轴 u 上的投影分别为点 A'，B'(图 7-10)，则称有向线段$\overrightarrow{A'B'}$在 u 轴上的值 $A'B'$ 为向量$\overrightarrow{AB}$在轴 u 上的投影，记作 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=A'B'$，轴 u 叫作投影轴.

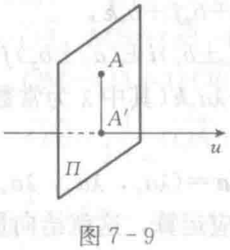

图 7-9

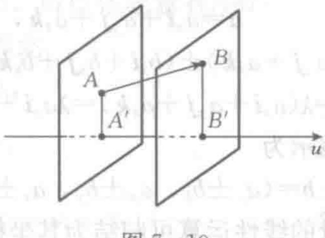

图 7-10

根据向量在轴上的投影，可得如下的结论：

即 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$，其中 φ 为 $\overrightarrow{AB}$ 与轴 u 的夹角．

二、向量分解与向量坐标

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，记与 x、y、z 轴正向同方向的单位向量分别为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，称它们为**基本单位向量**．

根据向量的加法原理(图 7－11)及(1)式，点 $M(x, y, z)$ 对于原点 O 的向径可以表示为

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PL}+\overrightarrow{LM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}, \tag{2}$$

(2)式称为**向量 $\overrightarrow{OM}$ 按基本单位向量的分解式**，x、y、z 叫作**向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标**，简记为

$$\overrightarrow{OM}=(x, y, z), \tag{3}$$

(3)式称为向径 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标表示式．

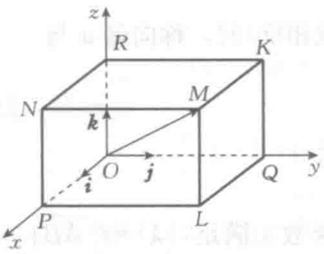

图 7－11

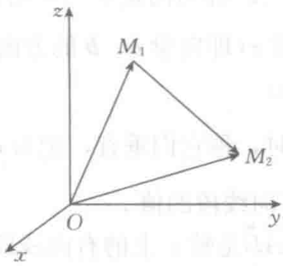

图 7－12

当向量的起点不是坐标原点时，向量仍可以用坐标表示．设向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的起点是 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，终点是 $M_1(x_2, y_2, z_2)$(图 7－12)，根据向量的减法，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}&=(x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k})-(x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k})\\&=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

若记 $a_x=x_2-x_1$，$a_y=y_2-y_1$，$a_z=z_2-z_1$，则

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}, \tag{4}$$

向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表示式为

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1),$$

或

$$\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z). \tag{5}$$

利用向量的坐标，可把向量的加法、减法以及数与向量的乘法运算表示如下：

设

$$\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z),\ \boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z),$$

即

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k},$$

则

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\pm(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})=(a_x\pm b_x)\boldsymbol{i}+(a_y\pm b_y)\boldsymbol{j}+(a_z\pm b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}\text{(其中 }\lambda\text{ 为常数)}.$$

上述两式也可表示为

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x, a_y\pm b_y, a_z\pm b_z),\ \lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

上式表明，向量的线性运算可归结为其坐标的相应运算，这就给向量的运算带来了极大的方便．

利用数与向量的乘法及向量的坐标，可对向量平行这一几何关系给出一种代数刻画．