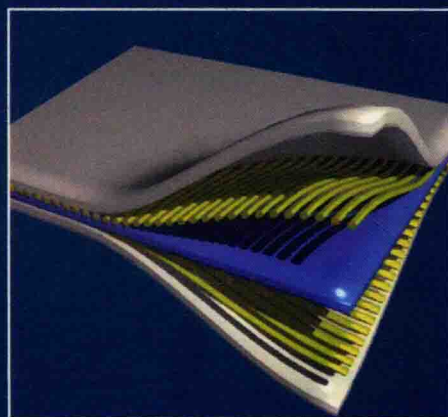


FAILURE AND STRENGTH OF
COMPOSITE MATERIALS

复合材料破坏与强度

黄争鸣 著



科学出版社

复合材料破坏与强度

黄争鸣 著



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书深入浅出地介绍了如何根据组分材料的性能数据,分析计算纤维增强复合材料的破坏和强度。内容包括:预备知识、内应力计算、弹性性能预报、多达 14 种细观力学模型的精度对比、基体应力集中系数、破坏判据和单向复合材料强度、层合板的破坏和强度分析、界面开裂判定、基体原始性能测定、热应力计算与塑性理论等。读者只需具备材料力学、初等微积分、矩阵运算及复变量的基础知识,并熟悉 Excel 工具即可。作者仿材料力学的做法,通过封闭解析公式,将复合材料的各种破坏特性与所受外载相连,使得任意载荷下的复合材料强度都可以借助 Excel 工具计算得到。

本书可作为大学工科本科生及研究生教材使用。作者曾以其中部分内容,作为同济大学本科生“复合材料力学”课程讲义授课多年,也可作为工程力学、航空航天、土木交通、化工船舶、汽车机械以及材料工程等领域与复合材料相关的学者和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

复合材料破坏与强度/黄争鸣著. —北京:科学出版社,2018.6
ISBN 978-7-03-057253-0

I. ①复… II. ①黄… III. ①复合材料—研究 IV. ①TB33

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 083803 号

责任编辑:赵敬伟/责任校对:邹慧卿
责任印制:张伟/封面设计:耕者工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京建宏印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 6 月第 一 版 开本:720×1000 B5

2018 年 6 月第一次印刷 印张:22 1/2

字数:454 000

定价:149.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

继金属、陶瓷、聚合物之后的第四类结构材料——纤维增强复合材料的大规模工业应用历史已超过 60 年。破坏和强度是结构材料最重要的特性，但复合材料的破坏和强度分析却依然还是固体力学面临的一个最大挑战。“复合材料破坏和强度说不清楚”是工程界的普遍共识，Hashin 也曾断言：“我确信，即便最完整的单层板数据，都不足以预报由这些单层板所构成的层合板破坏……我本人不知如何预报层合板的破坏，我也不相信任何其他人能够做到”（见 *Comp. Sci. Tech.*, 1998, p.1005）。先进复合材料结构设计只能依赖于大量实验，不仅耗资巨大，如航空复合材料选型实验动辄花费数以亿计，而且周期漫长，严重制约着复合材料的有效应用。

现有的破坏和强度理论，主要基于复合材料实验数据的唯象法建立，不关注组分材料纤维和基体的内应力。然而，不同于各向同性材料，很多与复合材料破坏和强度相关的问题，唯象方法无能为力。例如，纤维和基体界面对复合材料强度影响重大，界面开裂前、后的承载能力往往差异巨大，要确定界面何时开裂，必须基于细观力学，求出纤维和基体中的内应力才行；复合材料的非线性主要源自基体的塑性变形，经典的塑性理论表明，基体的塑性性能与其当前应力有关，该应力唯有通过细观力学分析方可确定；热残余应力原本是纤维和基体性能不匹配而产生的内应力，自然也只能由细观力学方法得到……但是，根据纤维和基体性能分析复合材料的破坏和强度特性，除少数特例外，迄今在学术界及工程界还未能实现，被认为可望不可及。一方面，复合材料破坏和强度的深层次问题，只能借助于细观力学理论解决；另一方面，细观力学分析复合材料破坏和强度又举步维艰。如此困境，导致了“破坏和强度说不清楚”。

本书首次指出，走出上述困境的途径是，细观力学求出纤维和基体中的均值应力后，必须转换成真实应力，方能由输入的纤维和基体的原始性能计算得到复合材料的等效性能。弹性阶段，材料特性与应力大小无关，由均值应力和真实应力求得的复合材料等效弹性常数相同；复合材料的其他性能，尤其是破坏和强度特性，皆与应力值相关，必须基于纤维和基体的真实应力得到。由于纤维中的应力场均匀，其真实应力与均值应力相同，因此，复合材料破坏与强度分析的瓶颈就在于求基体的真实应力。

应力计算只是复合材料破坏和强度预报的第一步，虽然是关键的一步，但还有很多其他因素都会对预报的精度产生重要影响。比如，如何准确判定各种材料层次

的损伤与破坏,建立起相应的强度理论;怎样定量表征不同加工(如预浸料与长丝缠绕)工艺对复合材料破坏和强度的影响;单层板破坏后,如何在层合板中实施合理的刚度衰减?……为此,本书作者进行了长达20年的系统研究,试图一一解决这些问题。本书是作者研究工作的集大成,其中不少为首次公开发表。作者赞同狄拉克的观点:“使一个方程具有美感,比使它去符合实验更重要”,并坚信,对自然规律的合理描述一定是简练的。阅读本书时读者会发现,作者建立和发展的理论及其数学公式都很精炼,这些理论包括:

(1) 统一的细观力学弹-塑性本构理论——桥联模型、全封闭的内应力解析公式;

(2) 基体真实内应力理论;

(3) 各向同性(基体)材料的双参数塑性理论;

(4) 任意载荷下纤维和基体界面开裂的判据;

(5) 考虑纤维初始偏转的纤维压缩破坏判据;

(6) 各向同性(基体)材料(强度)的终极破坏判据;

(7) 复合材料(层合板)结构的致命与非致命破坏判据。

本书的最大亮点在于告知读者,复合材料的破坏和强度分析,主要根据纤维和基体的原始性能参数便可实现,几乎不需要复合材料本身的实验数据。本书开发的软件——BMANC(bridging model for analysis of composites),是一款用途广泛的复合材料结构分析与设计程序包,可置入ABAQUS、NASTRAN、ANASYS、LS/DANA等现有CAE软件平台。它具有两大特点:其一,所需输入数据大幅减少,少量的组分材料性能参数甚至可从独立构建的数据库中提取,给用户带来极大方便;其二,所有运算皆由解析公式完成,因此,复合材料结构分析所耗机时将与相同金属结构分析所耗机时相当。

本书主要基于作者及其课题组的研究工作撰写,不妥之处,非常欢迎读者的批评、指正,作者的邮箱是:huangzm@tongji.edu.cn。

特别要感谢我的历届研究生们为发展桥联理论及其应用所做出的重要贡献,尤其是张华山、周晔欣、刘凌、姚展、辛理敏、周熠、王艳超、张春春、赵玉卿、顾嘉杰、杨江波等的工作。还感谢我的同事薛元德教授的有益讨论和帮助。

谨以此书献给我的母亲——早年的一位全国劳模康兰英女士!

黄争鸣

2017年12月6日于同济大学

目 录

前言

第 1 章 预备知识	1
1.1 复合材料	1
1.2 矩阵运算	4
1.3 Hooke 定律	6
1.3.1 各向同性材料的柔度矩阵	9
1.3.2 横观各向同性材料的柔度矩阵	9
1.3.3 正交各向异性材料的柔度矩阵	10
1.3.4 平面柔度矩阵	12
1.4 复杂应力状态的拉压判据	13
1.5 基本假设	14
1.6 均质化、特征体元与主轴坐标	15
1.7 夹杂问题	18
1.8 混合率模型	20
1.8.1 轴向加载	21
1.8.2 横向加载	22
1.8.3 面内剪切加载	22
1.8.4 混合率模型公式	23
1.9 Chamis 模型	23
1.10 坐标变换	25
1.11 剪应力正方向	31
1.12 偏轴模量	34
1.13 破坏与强度分析步骤	37
习题	38
第 2 章 内应力计算	43
2.1 基本方程	43
2.2 Eshelby 等效夹杂	47
2.2.1 问题描述	48
2.2.2 Eshelby 张量	49
2.2.3 等效夹杂法	52

2.3	Mori-Tanaka 模型	53
2.4	同心圆柱模型	56
2.5	桥联模型	62
2.5.1	桥联矩阵的特征	63
2.5.2	展开系数的确定	64
2.6	平面内应力公式	68
	习题	73
第 3 章	单向复合材料的弹性性能	76
3.1	桥联模型公式	76
3.1.1	轴向拉伸载荷作用	76
3.1.2	横向拉伸载荷作用	77
3.1.3	轴向剪切载荷作用	78
3.1.4	模量公式	79
3.2	Mori-Tanaka-Eshelby 模型公式	80
3.3	Eshelby 模型公式	82
3.4	自洽模型公式	82
3.5	广义自洽模型公式	84
3.6	其他解析/近似模型公式	85
3.6.1	修正的混合率模型公式	85
3.6.2	Halpin-Tsai 模型公式	86
3.6.3	Hill-Hashin-Christensen-Lo 模型公式	86
3.7	离散解方法	88
3.7.1	有限单元法	88
3.7.2	有限体积法	90
3.7.3	广义胞元法	92
3.8	精度对比	93
3.9	三相及更多相复合材料的弹性性能计算	105
	习题	109
第 4 章	基体的应力集中系数	112
4.1	背景	112
4.2	横向载荷下的应力场	114
4.3	应力集中系数的定义	115
4.4	横向压缩破坏面	117
4.5	横向拉、压、剪切应力集中系数	122
4.6	轴向剪切应力集中系数	124

4.7 轴向拉压问题	126
4.8 横向双轴载荷下的应力集中系数	127
4.9 基体的真实应力	130
习题	134
第 5 章 破坏判据与单向复合材料强度	137
5.1 引言	137
5.2 广义最大正应力破坏判据	138
5.3 莫尔定律与终极破坏判据	140
5.4 最大应力破坏判据	152
5.5 Tsai-Wu 破坏判据	152
5.6 单轴载荷强度公式	155
5.6.1 轴向拉压强度公式	155
5.6.2 横向拉压强度公式	156
5.6.3 轴向剪切强度公式	157
5.6.4 横向剪切强度公式	157
5.6.5 简化的强度公式	158
5.7 强度的计算精度问题	159
5.8 其他模型的强度公式、精度对比	162
5.9 轴向压缩强度与纤维压缩破坏	174
5.10 复杂载荷下的强度计算	186
5.10.1 偏轴强度	187
5.10.2 强度谱	188
5.10.3 三维强度	190
5.11 轴向强度的修正	192
习题	194
第 6 章 层合板刚度和强度	200
6.1 铺排角与整体坐标	200
6.2 经典层合板理论	202
6.2.1 基本假设	202
6.2.2 几何方程	202
6.2.3 物理方程	203
6.2.4 平衡方程	204
6.3 层合板刚度计算	208
6.3.1 对称层合板刚度	208
6.3.2 反对称层合板刚度	211

6.3.3 面内刚度与等效模量	213
6.4 增量格式与内应力计算	216
6.5 层合板强度	218
6.5.1 单层板破坏	218
6.5.2 致命与非致命破坏	220
6.5.3 刚度衰减	222
6.5.4 极限强度	223
6.6 弯曲强度	237
6.7 拟三维层合板理论	243
习题	256
第 7 章 若干专题	260
7.1 界面开裂问题	260
7.2 界面开裂后的基体横向拉伸应力集中系数	261
7.2.1 基体中的应力	262
7.2.2 积分运算	265
7.2.3 开裂角 ψ	270
7.3 界面何时开裂	276
7.4 界面开裂对其他应力集中系数的影响	283
7.5 树脂基体的原始强度实验	288
7.6 纤维的压缩强度与复合材料的压缩实验	293
第 8 章 热应力问题	295
8.1 引言	295
8.2 单向复合材料的热-力学方程	295
8.3 单向复合材料的热应力计算	297
8.4 层合板的热应力计算	300
8.5 热-机械耦合载荷下层合板中的内应力分析	305
8.5.1 层合板应变与曲率增量	305
8.5.2 单层板在局部 (主轴) 坐标下分担的应力增量	307
8.5.3 纤维和基体的均值内应力增量	308
8.5.4 纤维和基体的真实内应力	308
8.6 热应力计算的精度问题	310
第 9 章 复合材料的塑性性能	311
9.1 Prandtl-Reuss 弹-塑性理论	311
9.2 二维 Prandtl-Reuss 本构方程	317
9.3 莫尔屈服准则与最早屈服面	319

9.3.1 平面应力下的屈服准则	320
9.3.2 三维应力下的屈服准则	322
9.4 双参数塑性理论	324
9.5 弹-塑性桥联矩阵	326
9.5.1 桥联矩阵的因变量	328
9.5.2 桥联矩阵的自变量	329
9.5.3 平面弹-塑性桥联矩阵公式	331
9.6 复合材料的非线性性能计算	332
9.7 人工初应变	340
参考文献	342

第1章 预备知识

1.1 复合材料

材料是人类科技进步与文明发展的基石。在许多工业领域,传统的金属、陶瓷、聚合物等各向同性结构材料已达到或接近它们的应用极限。纤维增强复合材料由于其具有高比刚度、高比强度以及材料性能的可设计特性,已成为航空航天领域的首选甚至是唯一候选材料。现代大型风力发电机叶片长度已超过 80m,只有采用纤维增强复合材料制造,才有可能将叶片重量降到最低,而若采用金属如铝合金等各向同性材料加工,要使叶片在其两个主惯性平面内的刚度与该平面内的最大外载之比达到相同将很难实现。在地面交通领域,复合材料的应用不仅能显著减轻车身自重、减少推动自身的能源消耗,而且重心下移也增加了行车的安全性。树脂基复合材料的天然耐腐蚀特性,使其在化工设备、船舶及海洋工程等领域成为一种优选材料。

复合材料是由两种或两种以上力学、物理或化学性能各异的单一材料,经过物理或者化学的方法组合而成的一种新型材料。其性能是其中任何单一的组成材料都无法具备的。复合材料可分为天然复合材料和人工合成复合材料两大类。天然复合材料种类繁多。典型的天然复合材料包括一些动植物组织,如人体骨骼、皮肤以及竹子等。本书只研究人工合成复合材料,并且一般只含有两种几何形状与物理特性相差显著的组成材料或称组分材料。第一种组成材料是连续体,构成复合材料的基本形态,称为基体 (matrix) 材料。三类常见的固体结构材料,即金属、陶瓷和聚合物,都可以作为基体材料使用。由此分别构成了金属基复合材料 (metal matrix composite, MMC),陶瓷基复合材料 (ceramic matrix composite, CMC) 和聚合物基或树脂基复合材料 (polymer matrix composite, PMC)。第二种组成材料是离散体,通常比基体的性能更强,因而又称为增强材料。图 1-1 表示一些常见的人工合成复合材料的组成与分类。

常见的代表性的增强材料主要有三类。第一类是长纤维 (fiber) 或连续纤维材料,其长度与直径之比 (即长/径比) 一般大于或等于 10^5 ,与之对应的复合材料通常称为长纤维或者连续纤维增强复合材料,本书简称为纤维增强复合材料。纤维增强复合材料的最大优点是具有很高的比刚度和比强度,也就是说,这类材料的刚度和强度与它们的重量之比很大,往往比高强度的钢、铝、钛合金等金属材料大数倍。表 1-1 列出了一些常见复合材料及金属材料的典型力学性能数据。除了玻纤/环

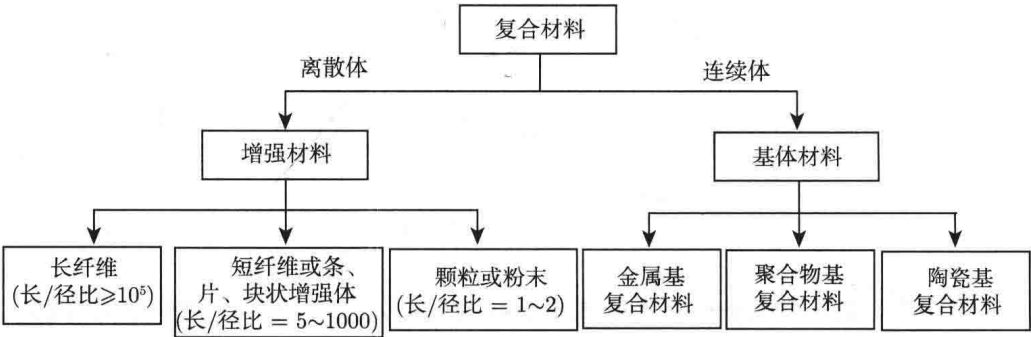


图 1-1 人工合成复合材料的组成与分类^[1]

氧 (glass/epoxy) 单向复合材料的比模量与金属相当，其他复合材料的比模量和比强度都远高于金属材料的对应性能。因而，结构用复合材料大都采用纤维增强复合材料。其中，纤维增强聚合物基复合材料 (fiber reinforced polymer, FRP) 使用最广、用量最大，在很多工程甚至日常生活领域中都可见到这类材料产品，在航空航天工程领域的应用尤为广泛。纤维增强复合材料在体育用品中也得到了广泛应用，如网球拍、赛艇、高尔夫球杆等，大都采用纤维增强复合材料制造。

表 1-1 常见材料的典型力学性能

材料	密度 $\rho/(\text{g}/\text{cm}^3)$	拉伸模量 E/GPa	拉伸强度 σ_b/MPa	比模量 E/ρ	比强度 σ_b/ρ
铝	2.71	69	310	25.5	114.4
不锈钢	7.83	210	1034	26.8	132.1
玻纤/环氧单向复合材料	2.03	45.6	1280	22.5	630.5
碳纤 T300/环氧单向复合材料	1.65	138	1500	83.6	909.1
碳纤 AS4/环氧单向复合材料	1.65	126	1950	76.4	1181.8
硼纤/环氧单向复合材料	1.88	205	1296	109.0	689.4

第二类具有代表性的增强材料为短纤维，其长度与直径之比一般为 5~1000。由此得到的是短纤维增强复合材料。需要指出的是，短纤维只是这类增强材料的代表，其他可归入该种类别的还包括条状、片状、块状等增强材料。短纤维增强复合材料的最大优点是容易加工成形，生产成本低，在生产打印机外壳、台面板以及其他许多无须承受较高载荷的地方都有应用。过去，农民用切短的稻草或杂草掺于泥浆糊墙，就是这类复合材料的一种典型应用。

第三类增强材料为颗粒或者粉末材料，其长度与直径之比一般为 1~2。这类复合材料的设计大都不以提高材料的刚度和强度为目的，而是要改善或提高材料的其他性能，如耐磨、导电、吸波等，将这类复合材料更贴切地称为功能复合材料。比如，在金属基中加入陶瓷粉末或者其他更硬的金属颗粒制成的复合材料，其硬度

和耐磨性均得到提高。这类复合材料也常用作生物材料,如人工骨、假牙填充材料等。

纤维增强复合材料的显著特征是各向异性,其强度和刚度沿不同方向是不一样的。在各式各样的纤维增强复合材料中,单向纤维增强复合材料(简称单向复合材料,又称单向板)是最基本的复合材料结构形式。就力学性能分析而言,任何其他连续纤维结构增强复合材料,都可以分解成一系列单向复合材料的组合。因此,单向复合材料构成了其他连续纤维结构增强复合材料分析的基本单元。在单向复合材料中,纤维的排列方向都是沿同一个方向,见示意图 1-2。图 1-3 则是单向硼(boron)纤维增强铝金属基复合材料横截面中的某一部分显微图。从这些图中不难看出,单向复合材料的力学性能在横截面内是完全对称的,而且在垂直于纤维轴线的截面内,其力学性能沿每个方向都相同,即各向同性。在连续介质力学中,把满足这种特性的材料,称为横观各向同性(transversely isotropic)材料。它们具有 5 个独立的弹性常数。因此,单向复合材料是横观各向同性材料,其对称轴沿纤维的轴向。

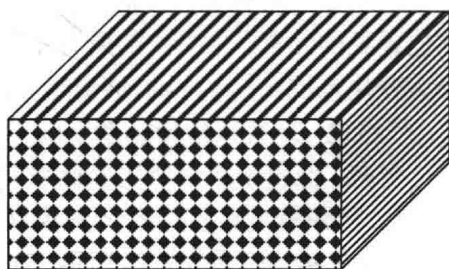


图 1-2 单向复合材料示意图

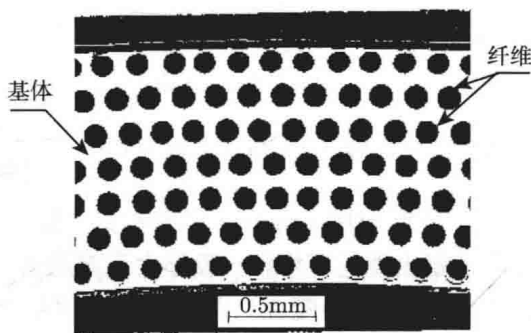


图 1-3 单向复合材料的横截面显微图

需要特别指出的是,虽然基体材料一般都是各向同性材料,但用作增强材料的纤维并不一定都是各向同性的。有些纤维材料与单向复合材料类似,也是横观各向同性的,如在实际中应用非常广泛的碳纤维或石墨纤维(carbon or graphite fiber),

就是横观各向同性的, 还有芳纶 (aramid) 或凯夫拉纤维 (kevlar 是杜邦公司生产的芳纶纤维注册商标) 也是横观各向同性的。这类纤维共有 5 个独立的弹性常数, 对称轴也是沿纤维的轴向。

1.2 矩阵运算

本书建立的分析计算复合材料力学性能尤其是破坏与强度的公式, 几乎都可以在初等材料力学中找到相对应的表达式, 这是因为所有材料的性能计算 (如果可以实现) 都遵循相同的原理。这也说明, 复合材料的力学性能, 哪怕是破坏与强度特性, 可以由封闭的解析公式计算。只不过, 材料力学中关于各向同性材料的力学性能的计算, 一般针对的是标量 (单个量), 复合材料的力学性能计算, 基本上针对的都是矩阵或矢量 (多个量), 最好借助 Excel 实施运算。

大括弧如 $\{b_i\}$ 表示一个列矢量, 其转置 $\{b_i\}^T = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ 表示行矢量, b_i 是该矢量的第 i 个分量 (元素), 本书中, 上标 T 一般表示转置 (除非另有说明), n 表示矢量的阶次, 如 $n = 3$ 表明是三阶矢量。方括弧如 $[a_{ij}]$ 表示一个矩阵, a_{ij} 是该矩阵的第 i 行、第 j 列位置处的元素。本书中的所有矩阵皆为方形矩阵, 即行和列的元素数目相等, 其最大变化范围 $i = j = n$, 称为矩阵的阶次。一个方形矩阵, 又称为一个二阶张量 (注: 严格说, 只有直角坐标系下的二阶张量元素才可以用一个矩阵表示, 彼此元素一一对应。但由于本书所用坐标系皆为直角坐标系, 因此可以将一个方形矩阵称为一个二阶张量, 反之亦然), 矢量则是一阶张量。只有阶次相同 (如同为 n) 的矩阵 $[a_{ij}]$ 和矢量 $\{b_i\}$ 之间才能相乘。进一步, 矩阵与矢量之间, 只可能有两种相乘方式, 分别构成新的列矢量和行矢量:

$$\{c_i\} = [a_{ij}]\{b_j\} = \{a_{ij}b_j\}, \quad c_i = a_{ij}b_j \equiv \sum_{j=1}^n a_{ij}b_j \quad (1.1a)$$

$$\{d_i\}^T = \{b_i\}^T[a_{ij}] = \{d_1, d_2, \dots, d_n\}, \quad d_i = b_j a_{ji} \equiv \sum_{j=1}^n b_j a_{ji} \quad (1.1b)$$

这里及本书的后续章节中, 我们应用 Einstein 求和约定, 如 $a_{ij}b_j$ 或 $b_j a_{ji}$ 。除非另有说明, 否则, 凡是两个重复出现的下标, 一般都表示对应的元素在它们的变化范围内求和, 称这种重复出现的下标为哑元, 因为它们可以用任何一个其他符号置换, 如 $a_{ij}b_j = a_{ik}b_k = a_{it}b_t$ 。非哑元下标称为定元, 一般不可用其他符号替换。此外, 在式 (1.1a) 和式 (1.1b) 中, 一般而言, $c_i \neq d_i$ 。

同样, 也只有两个阶次相等 (如同为 n) 的矩阵 $[a_{ij}]$ 和 $[b_{ij}]$ 之间方可相乘:

$$[c_{ij}] = [a_{ij}][b_{ij}] = [a_{ik}b_{kj}], \quad c_{ij} = a_{ik}b_{kj} \equiv \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \quad (1.2)$$

注意, 一般而言, $[a_{ij}][b_{ij}] = [a_{ik}b_{kj}] \neq [b_{ij}][a_{ij}] = [b_{ik}a_{kj}]$ 。

矩阵 $[a_{ij}]$ 的逆矩阵 $[b_{ij}] = [a_{ij}]^{-1}$ 满足条件: $[a_{ij}][b_{ij}] = [b_{ij}][a_{ij}] = [I]$, 其中, $[I]$ 表示单位矩阵, 即除了主对角线均为 1, 其他元素皆为 0。

本书中, 一般只涉及二阶和三阶矩阵的求逆。任意的二阶和三阶矩阵的逆矩阵由如下公式计算:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix} \quad (1.4a)$$

$$A_1 = (b_2c_3 - c_2b_3)/d, \quad B_1 = (c_1b_3 - b_1c_3)/d, \quad C_1 = (b_1c_2 - c_1b_2)/d \quad (1.4b)$$

$$A_2 = (c_2a_3 - a_2c_3)/d, \quad B_2 = (a_1c_3 - c_1a_3)/d, \quad C_2 = (c_1a_2 - a_1c_2)/d \quad (1.4c)$$

$$A_3 = (a_2b_3 - b_2a_3)/d, \quad B_3 = (b_1a_3 - a_1b_3)/d, \quad C_3 = (a_1b_2 - b_1a_2)/d \quad (1.4d)$$

$$d = a_1(b_2c_3 - c_2b_3) - a_2(b_1c_3 - c_1b_3) + a_3(b_1c_2 - c_1b_2) \quad (1.4e)$$

本书还可能要求六阶矩阵的逆矩阵。利用三阶矩阵的相乘和求逆公式, 得到六阶矩阵的求逆公式如下:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} E & G \\ F & H \end{bmatrix} \quad (1.5a)$$

$$H = (-CA^{-1}B + D)^{-1} \quad (1.5b)$$

$$G = -A^{-1}BH \quad (1.5c)$$

$$E = (A - BD^{-1}C)^{-1} \quad (1.5d)$$

$$F = -D^{-1}CE \quad (1.5e)$$

式中, A 、 B 、 C 、 D 以及 E 、 F 、 G 、 H , 皆为三阶子矩阵。证明式 (1.5) 成立, 只需利用下式即可:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & G \\ F & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

建议读者将公式 (1.1)~(1.5) 编制成 Excel 运算表格, 作为应用本书后续各章节建立的公式求解复合材料等效性能的基础。

例 1-1 求下述 6 阶矩阵 $[w_{ij}]$ 的逆矩阵:

$$[w_{ij}] = \begin{bmatrix} 110 & 113 & 115 & 215 & 216 & 217 \\ 310 & 313 & 315 & 315 & 316 & 317 \\ 510 & 513 & 415 & 415 & 416 & 417 \\ 107 & 108 & 109 & 610 & 613 & 615 \\ 207 & 208 & 209 & 210 & 213 & 215 \\ 307 & 308 & 309 & 310 & 313 & 415 \end{bmatrix}$$

解 按式 (1.5a) 的分块, 矩阵 $[w_{ij}]$ 的子矩阵分别是

$A =$	110 113 115	$B =$	215 216 217
	310 313 315		315 316 317
	510 513 415		415 416 417
$C =$	107 108 109	$D =$	610 613 615
	207 208 209		210 213 215
	307 308 309		310 313 415

再根据公式 (1.5b)~(1.5e), 应用三阶矩阵相乘及求逆公式 (1.4), 由 Excel 运算表格得到逆矩阵 $[w_{ij}]^{-1}$ 的各分块子阵为

$E =$	-0.51 0.145 0	$G =$	0.102 0.021 0.001
	0.519 -0.16 0.02		-0.1 -0.02 0
	-0.01 0.02 0		0 0 0
$F =$	-0.22 0.342 0	$H =$	0.046 -0.43 0.006
	0.209 -0.34 0		-0.04 0.434 -0.02
	0.006 -0.01 0		0 -0.01 0.01

1.3 Hooke 定律

材料中一点的直角坐标系通常可以有两种不同的表示法。一种是 (x, y, z) 表示法, 另一种是 (x_1, x_2, x_3) 表示法, 它们都遵循右手螺旋定则。如果这两种记法代表的是同一个直角坐标系, 则有 $x_1 = x$ 、 $x_2 = y$ 和 $x_3 = z$ 。

在直角坐标系 (x_1, x_2, x_3) 内, 假定一点 P 沿 x_1 、 x_2 和 x_3 方向的无穷小位移分别是 u_1 、 u_2 和 u_3 , 终点为 P' (图 1-4), 那么, P 点的 Cauchy 应变 (小应变) 为^[2]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.6)$$

两个下标分量相同如 ε_{11} 表示线应变，又称为正应变；两个下标不等如 ε_{12} 代表剪应变，工程剪应变 γ_{12} 与小应变 ε_{12} 之间相差系数 2，即 $\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$ 。

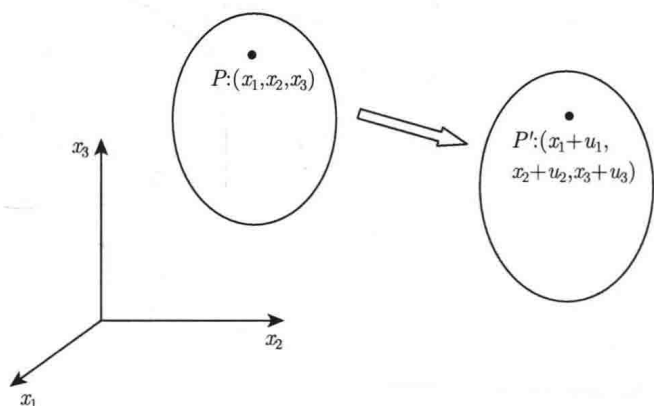


图 1-4 材料中点 P 的变形

一点的应变张量 $[\varepsilon_{ij}]$ ，可用紧缩的矢量表示：

$$\{\varepsilon_i\}^T = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12}\} \quad (1.7)$$

注意，应变矢量中的剪应变前有一个系数 2。再用 $[\sigma_{ij}]$ 表示一点的应力张量，其紧缩的矢量形式为

$$\{\sigma_i\}^T = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}\} \quad (1.8)$$

本书中，应力或应变的双下标表示二阶张量或矩阵元素，而单下标则表示矢量元素，其中应变及应力矢量与应变及应力张量元素之间的对应关系由式 (1.7) 和式 (1.8) 确定。倘若考虑的是一个平面问题，应力和应变矢量与其张量元素之间的对应关系如下：

$$\{\sigma_i\}^T = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\} \quad (1.9a)$$

$$\{\varepsilon_i\}^T = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}\} \quad (1.9b)$$

务必要分辨二维应力矢量中元素 σ_3 与三维应力矢量中元素 σ_3 所代表的不同应力分量。

对任意的三维应力和应变矢量，总可以找到两个系数矩阵，使得它们满足如下关系式：

$$\{\varepsilon_i\} = [S_{ij}]\{\sigma_j\} \quad (1.10a)$$

$$\{\sigma_i\} = [K_{ij}]\{\varepsilon_j\} \quad (1.10b)$$