GONGKE SHUXUE FENXI LIANXI YU TIGAO

# 工科数学分析练习与提高（四）

肖莉 刘婷 张玉洁 主编

中国地质大学出版社
ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

# 工科数学分析练习与提高

GONGKE SHUXUE FENXI LIANXI YU TIGAO

（四）

肖 莉 刘 婷 张玉洁 主编

中国地质大学出版社

ZHONGGUO DIZHI DAXUE CHUBANSHE

**图书在版编目(CIP)数据**

工科数学分析练习与提高. 三、四/肖莉，刘婷，张玉洁主编. —武汉：中国地质大学出版社，2018.7

ISBN 978-7-5625-4372-5

Ⅰ. ①工…

Ⅱ. ①肖…②刘…③张…

Ⅲ. ①数学分析-高等学校-习题集

Ⅳ. ①O17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第166298号

**工科数学分析练习与提高(三)(四)**　　　　肖　莉　刘　婷　张玉洁　**主编**

责任编辑：谌福兴　郑济飞　　　　责任校对：周　旭

出版发行：中国地质大学出版社(武汉市洪山区鲁磨路388号)　　　　邮政编码：430074

电　　话：(027)67883511　　传真：(027)67883580　　E-mail：cbb@cug.edu.cn

经　　销：全国新华书店　　　　http://cugp.cug.edu.cn

开本：787毫米×1 092毫米 1/16　　　　字数：250千字　　印张：9.75

版次：2018年7月第1版　　　　印次：2018年7月第1次印刷

印刷：武汉市籍缘印刷厂　　　　印数：1—4000册

ISBN 978-7-5625-4372-5　　　　定价：30.00元(全2册)

# 目　录

# 第一章 无穷级数

## 第一节 数项级数的收敛与发散

理解常数项无穷级数的概念；掌握常数项无穷级数的基本性质；熟练掌握等比级数的敛散性.

### 知识要点

1. 无穷级数收敛与发散的概念，收敛级数的基本性质，级数收敛的必要条件；
2. 几何级数（等比数列）的收敛条件及其收敛和的表示，调和级数的敛散性；
3. 级数收敛的柯西准则.

### 典型例题

**例 1** 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$ 的敛散性.

**解** 级数的部分和为

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left[(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})-(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})\right] \\ &= 1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1} = 1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

则 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1-\sqrt{2}$，故原级数收敛，其和为 $1-\sqrt{2}$.

**例 2** 下列命题是否正确？若不正确，请举反例；若正确，请给出证明.

(1) 数列 $\{u_n\}$ 与级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 收敛或同时发散；

(2) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 收敛，其中 $v_n \neq 0$ 则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{v_n}$ 收敛.

**解** (1) 命题不对.

例如:数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$是收敛的,但级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$是发散的.

(2)命题不对.

例如:$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$和$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$是收敛的,但级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}1$是发散的.

## A 类题

1. 回答下列问题:

(1)数项级数的部分和是什么?

(2)数项级数的收敛与发散怎样定义?

(3)若级数为$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$,则其中部分和$S_n=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}a_k(n=1,2,\cdots)$是一个数列;反过来,如何用$S_n$把原来的级数表示出来.

(4)一般项$a_n\to 0(n\to+\infty)$是不是级数$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$收敛的充分条件?若不是,举例说明.

2. 判定下列级数的收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{4n^2-1}$；

(2) $-\dfrac{8}{9}+\dfrac{8^2}{9^2}-\dfrac{8^3}{9^3}+\cdots+(-1)^n\dfrac{8^n}{9^n}+\cdots$；

(3) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[n]{3}}+\cdots$；

(4) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\left(\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)+\cdots$；

(5) $\sin\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{2\pi}{6}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{6}+\cdots$.

3. 证明:若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛,但 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)$ 发散.

4. 如果 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 都发散,试问 $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)$ 一定发散吗?如果这里的 $a_n, b_n(n=1,2,\cdots)$ 都是非负数,则能得出什么结论?

## B 类题

1. 求下列级数的和:

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)}$;

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{2n^2}$.

2. 利用 Cauchy 收敛准则判别下列级数的收敛性:

(1) $\frac{\sin x}{2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\cdots+\frac{\sin nx}{2^n}+\cdots$;

(2) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$.

## 第二节 正项级数

了解正项级数收敛的充要条件;掌握正项级数敛散性的判别法;熟练掌握 $p$—级数的敛散性.

### 知识要点

1. 正项级数收敛的充要条件;
2. 正项级数的比较判别法及其极限形式;
3. 正项级数的比值判别法、根值判别法和积分判别法.

### 典型例题

**例 1** 设 $\{u_n\}$,$\{c_n\}$为正项数列,证明对任意自然数 $n$,满足 $u_nc_n - u_{n+1}c_{n+1} \leqslant 0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{c_n}$ 发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 也发散.

**分析** 要从 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{c_n}$ 发散推出 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 也发散,只需证明 $u_n \geqslant \frac{k}{c_n}$,其中 $k$ 为大于零的常数.

**证明** 由 $u_nc_n - u_{n+1}c_{n+1} \leqslant 0$,得

$$u_{n+1}c_{n+1} \geqslant u_nc_n \geqslant u_{n-1}c_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant u_1c_1$$

故 $u_n \geqslant \frac{u_1c_1}{c_n} = \frac{k}{c_n}$,由比较判别法 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 也发散.

**例 2** 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\right)$ 的敛散性.

**分析** 判别级数的敛散性时应该首先确定级数的类型.根据判断这个级数为正项级数.

**解** $u_n = \frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} - \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$

故 $u_n$ 是 $\frac{1}{n}$ 的二阶无穷小,故级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \ln\frac{n+1}{n}\right)$ 收敛.

## A 类题

1. 回答下列问题：

(1)什么叫正项级数？它的部分和数列有什么特点？

(2)$p$一级数在什么条件下收敛？在什么条件下发散？

(3)设 $a_n \leqslant b_n$，如果 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛，能否断言 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 也收敛？试举例说明.

(4)设 $a_n \geqslant 0$，且数列 $\{na_n\}$ 有界，级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n{}^2$ 收敛吗？

2. 用比较判别法讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+3}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin \dfrac{\pi}{3^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n \cdot 2^n}$.

3. 用比较判别法的极限形式讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+1}{n^2(n+2)}$；

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+n}{3^n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$；

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^2}$；

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+a^n}\quad (a>0)$；

(6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

4. 用比值法、判别法讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} np^n\quad (0<p<1)$；

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\quad (x>0)$；

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$；

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$；

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$；

(6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

5. 用根值判别法讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n+1)^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n^{n+1}}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

## B 类题

1. 讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^n$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\cos n}{n^2}$；

(3) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^k}$；

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}$；

(6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{1+n}{n}}$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\ln n}}$； (8) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$；

(9) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$，$a$ 为非负实数；

(10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{b}{a_n}\right)^n$，其中 $a_n \to a(n \to +\infty)$，$a_n, a, b$ 均为正数.

2. 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n{}^2$ 也收敛；但反之不然，举例说明.

3. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n{}^2$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n{}^2$ 都收敛，证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n b_n|$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n)^2$ 也收敛.

4. 设数列 $\{na_n\}$ 收敛,级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛,证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛.

5. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛,证明正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$ 也收敛.

## 第三节　一般级数

掌握莱布尼兹判别法;理解绝对收敛与条件收敛的概念.

### 知识要点

1. 交错级数的莱布尼兹判别法;
2. 级数绝对收敛和条件收敛的概念;
3. 绝对收敛级数的性质.

### 典型例题

**例 1**　设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少,且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ 发散,试问 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛?并说明理由.

**分析**　$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{a_n+1}\right)^n$ 为正项级数,由通项表达式可用根值判别法.

**解**　由于数列 $\{a_n\}$ 单调减少又 $a_n > 0$,可知其极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在,记为 $a$. 由极限的保号

性定理知 $a \geqslant 0$. 若 $a=0$,则由莱布尼兹判别法知道 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ 必收敛,这与已知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ 发散矛盾,故 $a>0$. 于是

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{a+1}<1$$

由根值判别法知, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 收敛.

**例 2**　若 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n^2$ 收敛,证明 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{n}$ 收敛.

**证明**　因为 $\left|\frac{u_n}{n}\right|\leqslant\frac{u_n^2+\frac{1}{n^2}}{2}$,而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n^2+\frac{1}{n^2}}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n^2+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)$ 收敛,由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{u_n}{n}\right|$ 收敛,从而 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{u_n}{n}$ 收敛.

## A 类题

1. 回答问题:

(1)什么是交错级数?

(2)什么是级数的绝对收敛和条件收敛?

(3)两级数的乘积是怎样定义的? 在什么条件下两级数的乘积级数必定收敛?

2. 下列是非题,对的给出证明,错的举出反例:

(1)若 $a_n>0$,则 $a_1-a_1+a_2-a_2+a_3-a_3+\cdots$ 收敛;

(2)若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ 也收敛;

(3)若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n{}^2$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n{}^3$ 绝对收敛;

(4)若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n{}^2$ 收敛;

(5)若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 不收敛,则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 不绝对收敛;

(6)绝对收敛级数也条件收敛;

(7)若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 不是条件收敛,则 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散;

(8)若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，且 $\lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 也收敛.

3.讨论下列级数的敛散性(包括绝对收敛、条件收敛、发散)：

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$；

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{3^n}$；

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)}$；

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$；

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln n}$；

(6) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$.