物理学核心课程习题精讲系列

电磁学千题解

（第二版）

张之翔 / 编著

科学出版社

物理学核心课程习题精讲系列

1000 Solved Problems of Electromagnetics

电磁学千题解

（第二版）

（Second Edition）

张之翔 编著

Zhang Zhixiang

Professor of Physics, Peking University, Beijing

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是根据作者多年在北京大学的教学经验和心得体会，在前版基础上，查漏补缺修订而成. 全书共1000道题，分为十二章，内容基本涵盖电磁学课程的各个领域，从库仑定律到麦克斯韦方程和电磁波. 每道题均给出详细解答，部分题给出多种解法，一些题附有讨论或说明. 书中所收题目以基本题为主，即电磁学基本内容的题，题型包括概念题、计算题、推理题和判断题等，有些同一类型题，作者还从不同侧面或不同角度，收入多道题；除基本题外，书中也收入一些较难的、较深入的、联系实际的和反映新成就的题，以满足不同需求. 同时为满足考研和竞赛的需要，书中还收入不少研究生入学试题和各种物理竞赛题. 为激发学生兴趣，本次修订在每章均增加了有关电磁学史的知识.

本书可作为物理类专业电磁学课程的学习辅导书，也可作为大学或高中物理竞赛、研究生入学考试复习参考用书. 对普通高等学校物理教师的电磁学教学，本书亦有参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

电磁学千题解/张之翔编著. —2版. —北京：科学出版社，2018. 5

物理学核心课程习题精讲系列

ISBN 978-7-03-057118-2

Ⅰ. ①电… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①电磁学-高等学校-题解 Ⅳ. ①O441-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第071819号

责任编辑：昌 盛 罗 吉 / 责任校对：张凤琴

责任印制：吴兆东 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年8月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2018年5月第 二 版 印张：48

2018年5月第七次印刷 字数：968 000

定价：98.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

第二版说明

本书第二版对第一版作了些修订，改正了四处题解算式中的笔误，修改了两题的解答，改正了三处图中的不妥之处，还补充了一些题解后的讨论．此外，增加了一些有关电磁学史的知识，希望读者在学习题解之外，还能有所收获．

钟锡华教授对跳环题解提出了宝贵意见，谨此致谢．

张之翔

2018 年 2 月 2 日

于北京大学畅春园

第一版前言

电磁学是现代科学技术的基础，在物理学中占有重要地位．当今世界各国，凡学习科学技术的人，或多或少都要学习它．这本《电磁学千题解》作为一种教学用书，主要是为目前我国高校理科物理类专业电磁学课程的教学编写的，同时也考虑了理科其他专业以及工科和师范院校等物理课程中电磁学部分教学的需要．作者根据在北京大学教电磁学实验、讲授电磁学和电动力学等课程多年的教学经验，收集和整理的资料，编成此书，共收入一千题；其中很多题都是作者在教学中使用过的例题、习题或考题，有一些题是在教学过程中学生提出来的问题，也有些题是作者在教学研究中得出的结果，还有些题是与同事们切磋交流的心得．这些题根据其内容，分别编入十二章，从最基本的库仑定律到麦克斯韦方程和电磁波，基本上涵盖了电磁学的各个领域．其中每道题，都作出了详细解答，有些题还给出了不同的解法，甚至几种解法．在一些题后面，附有讨论或说明，以阐明有关的方方面面．这一千题中，主要是基本题，即电磁学基本内容的题，也是学习电磁学的高校理工科学生都应能独立地作出正确解答的题．这些题包括概念题、计算题、推理题和判断题等．有些同一类型的题，从不同侧面或不同角度，收入了多道题．除基本题外，也收入了一些较难的题、较深入的题、演算较多的题、联系实际的题、反映新成就的题等，以满足各种不同的需要．此外，还收入了一些研究生入学试题和各种物理竞赛题，以照顾考研究生和参加物理竞赛的需要；对于好学的人来说，这类题是很有吸引力的．

作者希望为教电磁学的教师，特别是青年教师，提供一本内容较多的参考书，所以除了收题多以外，还在许多题解和讨论里，将多年的教学经验和心得体会以及有关的参考文献，都写了进去．对于阅读本书的广大青年学生，作者希望他们注重物理概念和数学计算．首先是物理概念，通常不会做的题，多半是没有掌握解决该题的正确物理概念．其次是数学计算，解决很多电磁学问题，除了要熟练地掌握初等数学外，还要求能自如地运用一些高等数学的内容，如微积分、微分方程和矢量分析等．一旦有了正确的物理概念，会运用有关的数学计算，则问题便可迎刃而解，很容易求出正确的解答．

附带提一下,电荷作加速运动时,会发出辐射,辐射反过来要对电荷产生阻力(辐射反作用力).这个问题比较复杂,其内容超出了电磁学的范围.因此,本书中所有有关电荷作加速运动的题,除极个别题外,都将辐射略去不计.

国际物理教育委员会(ICPE)前主席、美国俄亥俄州立大学 E. L. Jossem 教授为本书取的英文名称为"1000 Solved Problems of Electromagnetics",谨向他表示感谢.

最后,由于作者学识所限,书中错误和不妥之处,自知不免,热诚地欢迎读者指教.

张之翔
2001 年春
于北京大学畅春园

目　　录

第一章 静 电 学

1.1 库仑定律

【关于库仑定律】 电荷之间的相互作用力与它们之间的距离的平方成反比，这个规律是法国科学家库仑(C. A. Coulomb，1736—1806)于1785年(我国清代乾隆五十年)用扭秤实验测定出来的，是电磁学历史上第一个定量的定律，后人称之为库仑定律，它是电磁学的基础之一. 有关资料可参看张之翔《电磁学教学参考》(北京大学出版社，2015)，§5.4，232—236页；§10，282—287页.

1.1.1 电荷量分别为 q_1 和 q_2 的两个静止的点电荷，相距为 r，试求下列情况下它们之间的相互作用力，即 q_1 作用在 q_2 上的力 $\boldsymbol{F}_{21}$ 和 q_2 作用在 q_1 上的力 $\boldsymbol{F}_{12}$：(1)q_1 和 q_2 都在真空中；(2)q_1 和 q_2 都在均匀介质中；(3)q_2 在导体空腔内，q_1 则在导体外.

【解】 在上述三种情况下，q_1 作用在 q_2 上的力都是

$$\boldsymbol{F}_{21}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_{12} \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{e}_{12}$ 是从 q_1 到 q_2 方向上的单位矢量. q_2 作用在 q_1 上的力都是

$$\boldsymbol{F}_{12}=-\boldsymbol{F}_{21}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_{12} \tag{2}$$

【讨论】 一、两个静止的点电荷之间的相互作用力称为静电力或库仑力，这种力与其他电荷或物质是否存在无关. 因此，在本题所述的三种情况下，q_1 作用在 q_2 上的力(或 q_2 受 q_1 的作用力)$\boldsymbol{F}_{21}$ 都由式(1)表示；同样，q_2 作用在 q_1 上的力(或 q_1 受 q_2 的作用力)$\boldsymbol{F}_{12}$ 都由式(2)表示.

二、注意：q_1 作用在 q_2 上的力 $\boldsymbol{F}_{21}$ 与 q_2 所受的力 $\boldsymbol{F}_2$ 不同. 在(1)的情况下，因为没有其他电荷或物质，这时 $\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{F}_{21}$. 在(2)的情况下，$q_2$ 所受的力除 $\boldsymbol{F}_{21}$ 外，还包括介质极化产生的电荷作用在 q_2 上的力. 在(3)的情况下，q_2 所受的力除 $\boldsymbol{F}_{21}$ 外，还包括导体壳上的电荷作用在 q_2 上的力.

三、关于(2)的情况，可参看后面的2.2.1题；关于(3)的情况，可参看后面的2.1.1题和2.1.2题.

1.1.2 有两个静止的点电荷，它们的电荷量都是1C，试分别求它们相距为

1m 和 1km 时，它们之间相互作用力的大小.

【解】 相距 1m 时，相互作用力的大小为

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}=9.0\times10^9\times\frac{1\times1}{1^2}=9.0\times10^9(\mathrm{N})$$

这个力相当于 90 万吨物体的重量.

相距一公里时，相互作用力的大小为

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}=9.0\times10^9\times\frac{1\times1}{(10^3)^2}=9.0\times10^3(\mathrm{N})$$

这个力相当于 900kg 物体的重量.

【讨论】 本题是使我们对于 1C 电荷量之间作用力的大小有一个概念. 由算出的值可知，从力的角度看，库仑是一个非常大的单位.

另一方面，6.242×10^{18}个电子（或质子）的电荷加在一起，才有 1C 的电荷量. 所以，从粒子所带电荷量的角度看，库仑也是一个非常大的单位.

1.1.3 铁原子核里两质子相距为 4.0×10^{-15} m，每个质子的电荷量都是 1.6×10^{-19}C. 实验证明，库仑定律在这个距离上仍然成立. 试求这两个质子间库仑力的大小.

【解】 这两个质子间库仑力的大小为

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}=9.0\times10^9\times\left(\frac{1.60\times10^{-19}}{4.0\times10^{-15}}\right)^2=14(\mathrm{N})$$

1.1.4 真空中两个点电荷静止时相距 10cm，它们间的相互作用力为 9.0×10^{-4}N；当它们合在一起时，就成为 3.0×10^{-8}C 的一个点电荷. 试问原来两电荷的电荷量各是多少?

【解】 设两电荷的电荷量分别为 q_1 和 q_2，则由题意得

$$q_1+q_2=3.0\times10^{-8} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}q_1q_2&=4\pi\varepsilon_0r^2F=\frac{1}{9.0\times10^9}\times(10\times10^{-2})^2\times(\pm9.0\times10^{-4})\\&=\pm1.0\times10^{-15}\end{aligned} \tag{2}$$

式中正号为 q_1 与 q_2 同号（即 $q_1q_2>0$）时用，负号为 q_1 与 q_2 异号（即 $q_1q_2<0$）时用. 当式(2)右边取正号时，便有

$$\begin{aligned}(q_1-q_2)^2&=(q_1+q_2)^2-4q_1q_2\\&=(3.0\times10^{-8})^2-4\times1.0\times10^{-15}<0\end{aligned} \tag{3}$$

这不可能. 所以，式(2)右边只能取负号. 这时

$$\begin{aligned}q_1-q_2&=\sqrt{(q_1+q_2)^2-4q_1q_2}\\&=\sqrt{(3.0\times10^{-8})^2+4\times1.0\times10^{-15}}\\&=\pm7.0\times10^{-8}\end{aligned} \tag{4}$$

由式(1)、(4)解得

$$q_1=5.0\times10^{-8}\mathrm{C},\quad q_2=-2.0\times10^{-8}\mathrm{C} \tag{5}$$

1.1.5 质量都是 m 的两小球，带有相同的电荷量 q，用长度都是 l 的细丝线

挂在同一点，静止时两线夹角为 2θ[图 1.1.5(1)]. 设小球的半径和线的质量都可略去不计，试求 q 的值.

【解】 小球静止时，作用在它上面的库仑力 $\boldsymbol{F}_c$ 和重力 $\boldsymbol{F}_g$ 两者在垂直于悬线方向上的分量必定相等[图 1.1.5(2)]，即

$$F_c\cos\theta=F_g\sin\theta \tag{1}$$

所以

$$F_c=F_g\tan\theta \tag{2}$$

故

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(2l\sin\theta)^2}=mg\tan\theta \tag{3}$$

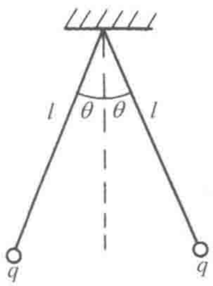

图 1.1.5(1)

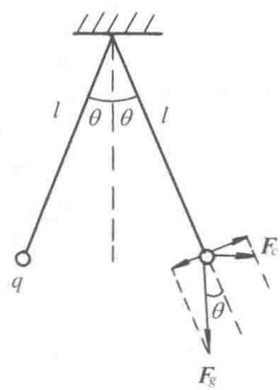

图 1.1.5(2)

解得

$$q=\pm 2l\sin\theta\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg\tan\theta} \tag{4}$$

正号用于 $q>0$，负号用于 $q<0$.

1.1.6　A、B 两个带电小球，所带电荷量都是 q，用等长的两根丝线悬于同一点，线长为 l，B 球靠在绝缘墙上，它的悬线竖直，如图 1.1.6(1)所示. 当 A 球的质量为 m 时，因静电斥力使两球相距为 x，达到静止. 试问在 A、B 两球所带电荷量不变的情况下，A 球的质量增为多大时，A、B 间的静止距离缩短为 $x/2$? 设小球的半径和丝线的质量都可略去不计.

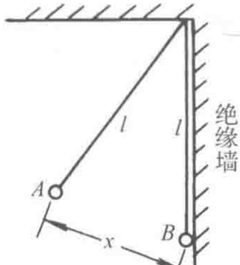

图 1.1.6(1)

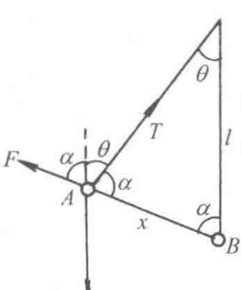

图 1.1.6(2)

【解】 A 受到 B 作用的库仑力的大小为

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{x^2} \tag{1}$$

设 A 线中的张力为 T[图 1.1.6(2)]，则 A 的平衡方程为

竖直方向： $$T\cos\theta+F\cos\alpha=mg \tag{2}$$

水平方向： $$T\sin\theta=F\sin\alpha \tag{3}$$

三角形正弦定律： $$\sin\theta/x=\sin\alpha/l \tag{4}$$

由式(3)、(4)得

$$T=\frac{l}{x}F \tag{5}$$

因为

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\cos(\pi-2\alpha)=-\cos2\alpha=1-2\cos^2\alpha\\&=1-\frac{x^2}{2l^2}\end{aligned} \tag{6}$$

将式(1)、(5)、(6)代入式(2)得

$$\frac{l}{x}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{x^2}\left(1-\frac{x^2}{2l^2}\right)+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{x^2}\frac{x}{2l}=mg$$

所以

$$m=\frac{lq^2}{4\pi\varepsilon_0 gx^3} \tag{7}$$

由此得出，当 A 的质量为 m' 时，静止时 A、B 间的距离为 x'，便有

$$m'=\frac{lq^2}{4\pi\varepsilon_0 gx'^3} \tag{8}$$

由式(7)、(8)得

$$m'/m=(x/x')^3 \tag{9}$$

令 $x'=x/2$，便得所求的质量为

$$m'=8m \tag{10}$$

1.1.7 两个固定的点电荷，电荷量分别为 q 和 $4q$，相距为 l.(1)试问在什么地方放一个什么样的点电荷，可以使这三个电荷都达到平衡(即每个电荷受另外两个电荷的库仑力之和都等于零)？(2)这种平衡是稳定平衡还是不稳定平衡？

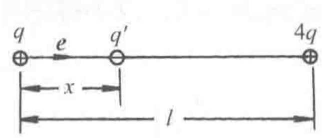

图 1.1.7

【解】 (1)设所放的点电荷其电荷量为 q'. 若 q' 与 q 同号，则三者相互排斥，不可能达到平衡，故 q' 只能与 q 异号. 若 q' 在 q 和 $4q$ 连线之外的任何地方，也不可能达到平衡. 由此得知，只有 q' 与 q 异号(即 $q'q<0$)且 q' 在 q 和 $4q$ 的连线上，才有可能达到所要求的平衡. 设这时 q' 到 q 的距离为 x，$\boldsymbol{e}$ 为从 q 到 $4q$ 方向上的单位矢量(图 1.1.7)，则 q' 所受的力为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}'&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{x^2}\boldsymbol{e}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4qq'}{(l-x)^2}(-\boldsymbol{e})\\&=\frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x^2}-\frac{4}{(l-x)^2}\right]\boldsymbol{e}\end{aligned} \tag{1}$$

平衡时 $\boldsymbol{F}'=0$，所以 $(l-x)^2=4x^2$，解得

$$x=l/3 \quad 和 \quad x=-l \tag{2}$$

其中 $x=-l$ 是 q' 在 q 和 $4q$ 的连线之外，故舍去. 于是得所求的值为 $x=l/3$.

这时 q 所受的力为

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{(l/3)^2}(-\boldsymbol{e})+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4q^2}{l^2}(-\boldsymbol{e})$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l^2}[9q'+4q](-\boldsymbol{e}) \tag{3}$$

平衡时 $\boldsymbol{F}=0$，故得

$$q'=-\frac{4}{9}q \tag{4}$$

很容易验证，这时 $4q$ 所受力的力也是零. 即三个电荷都达到平衡.

(2)这种平衡是不稳定平衡，因三者中任何一个稍微移动一点，它们受的力并不都指向平衡点.

1.1.8 电荷量都是 q 的三个点电荷，分别放在正三角形的三个顶点. 试问：(1)在这三角形中心放一个什么样的点电荷，就可以使这四个电荷都达到平衡(即每个电荷受其他三个电荷的库仑力之和均为零)? (2)这种平衡与三角形的边长有无关系? (3)这样的平衡是稳定平衡还是不稳定平衡?

【解】 (1)设所放的电荷量为 q'，要达到平衡，q' 必须与 q 异号. 因三个 q 在三角形中心产生的电场强度为 $\boldsymbol{E}=0$，故 q' 不论为何值，它所受的力总是零. 所以只需考虑任一个角上的 q 所受的力. 如图 1.1.8，设三角形的边长为 a，则 q 所受的合力的大小为

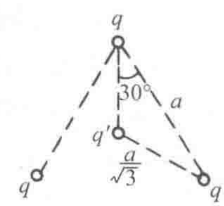

图 1.1.8

$$F=2\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2}\cos30°+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{(a/\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}(\sqrt{3}q+3q')$$

达到平衡时，$F=0$. 于是得

$$q'=-q/\sqrt{3}$$

(2)由上式可以看出，这种平衡与三角形的边长 a 无关.

(3)这种平衡是不稳定平衡. 因其中任一电荷稍有任何位移，每个电荷所受的力并不都指向平衡点.

1.1.9 电荷量都是 $q=1.6\times10^{-19}$ C 的三个点电荷，分别固定在边长为 $a=3.0\times10^{-10}$ m 的正三角形的三个顶点；在这三角形的中心 O，有一个质量为 $m=2.3\times10^{-26}$ kg、电荷量为 $Q=-4.8\times10^{-19}$ C 的粒子. (1)试论证这个粒子处在平衡位置；(2)设这粒子以 O 为中心，沿垂直于三角形平面的轴线作微小振动，试求振动频率.

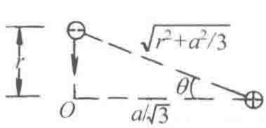

图 1.1.9

【解】 (1)由于对称性，三个 q 在中心 O 产生的电场强度为 $\boldsymbol{E}=0$，故这个粒子所受的合力为零，所以它处在平衡位置.

(2)设 Q 离开平衡位置 O，到 O 的距离为 r，如图 1.1.9 所示，则 Q 所受的力的方向指向 O，其大小为

$$F=3\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2+a^2/3}\sin\theta=\frac{3qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{(r^2+a^2/3)^{3/2}} \tag{1}$$

在这个力的作用下，粒子的运动方程为

$$m\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{3qQ}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{(r^2+a^2/3)^{3/2}} \tag{2}$$

当 $r\ll a$ 时，$(r^2+a^2/3)^{-3/2}\approx(a^2/3)^{-3/2}=\frac{3\sqrt{3}}{a^3}$. 这时式(2)化为

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{9\sqrt{3}qQ}{4\pi\varepsilon_0 ma^3}r \tag{3}$$

因为 $qQ<0$，故上式是一个简谐振动的方程，振动频率为

$$\begin{aligned}\nu&=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{-9\sqrt{3}qQ}{4\pi\varepsilon_0 ma^3}}\\&=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(-9\sqrt{3})\times(-4.8\times10^{-19})\times1.6\times10^{-19}\times9.0\times10^9}{2.3\times10^{-26}\times(3.0\times10^{-10})^3}}\\&=2.1\times10^{13}(\text{Hz})\end{aligned}$$

1.1.10 电荷量都是 q 的四个点电荷，分别处在正方形的四个顶点，如图 1.1.10(1)所示. (1)在这正方形中心放一个什么样的点电荷，就可以使每个电荷都达到平衡？(2)这样的平衡是稳定平衡还是不稳定平衡？

【解】 (1)设所放的电荷量为 q'，要达到平衡，q' 必须与 q 异号. 由于对称性，四个 q 在正方形中心产生的电场强度为 $\boldsymbol{E}=0$，故 q' 不论为何值，它所受的力总是零. 所以只需考虑任一个角上的 q 所受的力.

设正方形边长为 a，则另外三个角上的电荷作用在 q 上的库仑力之和为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}&=2\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2}\cos45^\circ\boldsymbol{e}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{(\sqrt{2}a)^2}\boldsymbol{e}\\&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2\sqrt{2}+1}{2}\right)\frac{q^2}{a^2}\boldsymbol{e}\end{aligned} \tag{1}$$

图 1.1.10(1)

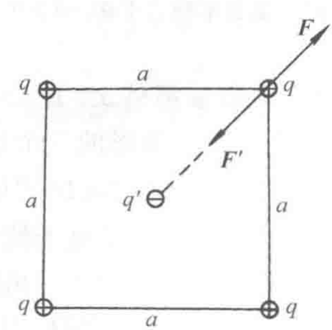

图 1.1.10(2)

式中 $\boldsymbol{e}$ 是沿对角线方向上的单位矢量，$\boldsymbol{F}$ 的方向如图 1.1.10(2)所示. q'作用在 q 上的库仑力为

$$\boldsymbol{F}'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{(a/\sqrt{2})^2}\boldsymbol{e}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qq'}{a^2}\boldsymbol{e} \tag{2}$$

由于 $qq'<0$，故 $\boldsymbol{F}'$ 的方向如图 1.1.10(2)所示. 由式(1)、(2)得，q 所受的库仑力的合力为

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2\sqrt{2}+1}{2}q+2q'\right)\frac{q}{a^2}\boldsymbol{e} \tag{3}$$

当 $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}'=0$ 时，便达到平衡. 这时由式(3)得

$$q'=-\frac{2\sqrt{2}+1}{4}q \tag{4}$$

(2)因五个电荷中任一电荷稍有任何位移，每个电荷所受的力并不都指向平衡点，故这样的平衡是不稳定平衡.

1.1.11 两个固定的点电荷，电荷量都是 Q，相距为 l，连线中点为 O；另一点电荷，电荷量为 q，在连线的中垂面上距离 O 为 r 处，如图 1.1.11 所示. (1)求 q 受的力；(2)若开始时 q 是静止的，然后让它自己运动，问它将如何运动？试分别就 q 与 Q 同号和异号两种情况加以讨论.

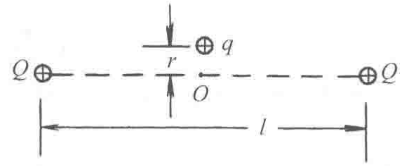

图 1.1.11

【解】 (1)q 所受的力为

$$\boldsymbol{F}=2\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{(l/2)^2+r^2}\frac{r}{\sqrt{(l/2)^2+r^2}}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

$$=\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{[(l/2)^2+r^2]^{3/2}} \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 是从 O 到 q 的位矢.

(2)q 与 Q 同号时，$\boldsymbol{F}$ 背向 O 点，故 q 将沿两 Q 的中垂线加速地趋向无穷远. q 与 Q 异号时，$\boldsymbol{F}$ 指向 O 点，故 q 将以 O 为中心作周期性振动，振幅为 r.

【讨论】 设 q 是质量为 m 的粒子，则这粒子的加速度为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 m}\frac{\boldsymbol{r}}{[(l/2)^2+r^2]^{3/2}} \tag{2}$$

当 $r\ll l$ 时，略去上式分母中的 r^2，便得

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{4qQ}{\pi\varepsilon_0 ml^3}\boldsymbol{r} \tag{3}$$

这时若 q 与 Q 异号(即 $qQ<0$)，则式(3)便是简谐振动的方程，其振动的角频率为

$$\omega=\sqrt{-\frac{4qQ}{\pi\varepsilon_0 ml^3}} \tag{4}$$

因此，在 $r\ll l$ 和 q 与 Q 异号的情况下，m 的运动近似于角频率为 ω 的简谐振动.

1.1.12 卢瑟福实验证明：当两个原子核之间的距离小到 10^{-15} m 时，它们之

间的排斥力仍遵守库仑定律. 金的原子核中有 79 个质子，氦的原子核(即 α 粒子)中有 2 个质子. 已知每个质子的电荷量为 1.60×10^{-19}C，α 粒子的质量为 6.68×10^{-27}kg. 当 α 粒子与金核相距为 6.9×10^{-15}m 时，设它们都可当作点电荷，试求金核作用在 α 粒子上的库仑力和 α 粒子因此而产生的加速度.

【解】 金核作用在 α 粒子上的库仑力的大小为

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}$$

$$=8.99\times10^9\times\frac{2\times79\times(1.60\times10^{-19})^2}{(6.9\times10^{-15})^2}$$

$$=7.6\times10^2(\mathrm{N})$$

α 粒子的加速度为

$$a=\frac{F}{m}=\frac{7.6\times10^2}{6.68\times10^{-27}}=1.1\times10^{29}(\mathrm{m/s^2})$$

1.1.13 真空中有一个质子和一个电子，相距为 1m，开始时都静止，然后在它们之间的库仑力的作用下，相向运动. 已知质子质量为 $m_p=1.673\times10^{-27}$kg，电荷量为 $e=1.602\times10^{-19}$C，电子质量为 $m=9.109\times10^{-31}$kg，电荷量为 $-e$. 试求它们相碰的时间.

图 1.1.13

【解】 因无外力，故它们的质心 C 不动. 以 C 为原点取 x 轴，使质子和电子都在 x 轴上，如图 1.1.13 所示. 设开始($t=0$)时，质子与电子相距为 l，电子的坐标为 $x_0(>0)$；t 时刻，电子的坐标为 $x(>0)$，质子的坐标为 $x_p(<0)$，则有

$$mx=m_p|x_p| \tag{1}$$

电子的运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(x+|x_p|)^2} \tag{2}$$

将式(1)代入式(2)消去 x_p 得

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{e^2m_p^2}{4\pi\varepsilon_0m(m_p+m)^2}\frac{1}{x^2} \tag{3}$$

为求解上式，将它乘以 $2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$得

$$2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{e^2m_p^2}{2\pi\varepsilon_0m(m_p+m)^2}\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2=\frac{e^2m_p^2}{2\pi\varepsilon_0m(m_p+m)^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{x}\right) \tag{5}$$

积分得

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_0^2=\frac{e^2m_p^2}{2\pi\varepsilon_0m(m_p+m)^2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right) \tag{6}$$

式中 x_0 和 $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_0$ 分别是开始($t=0$)时电子的坐标和速度. 因题给

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_0=0 \tag{7}$$

故式(6)化为

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2=\frac{e^2m_\mathrm{p}^2}{2\pi\varepsilon_0 m(m_\mathrm{p}+m)^2}\frac{x_0-x}{x_0x} \tag{8}$$

开方,因 e、m、x、x_0 均为正,且 $x_0>x$,$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}<0$,故得

$$-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon_0 m}}\frac{em_\mathrm{p}}{m_\mathrm{p}+m}\sqrt{\frac{x_0-x}{x_0x}} \tag{9}$$

积分

$$\begin{aligned}-\int_{x_0}^{x}\sqrt{\frac{x_0x}{x_0-x}}\mathrm{d}x&=-\sqrt{x_0}\left[x_0\arcsin\sqrt{\frac{x}{x_0}}-\sqrt{x(x_0-x)}\right]_{x_0}^{x}\\&=\sqrt{x_0}\left[\frac{\pi}{2}x_0-x_0\arcsin\sqrt{\frac{x}{x_0}}+\sqrt{x(x_0-x)}\right]\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon_0 m}}\frac{em_\mathrm{p}}{m_\mathrm{p}+m}t\end{aligned} \tag{10}$$

所以

$$t=\sqrt{2\pi\varepsilon_0 m}\,\frac{m_\mathrm{p}+m}{em_\mathrm{p}}\sqrt{x_0}\left[\frac{\pi}{2}x_0-x_0\arcsin\sqrt{\frac{x}{x_0}}+\sqrt{x(x_0-x)}\right] \tag{11}$$

这便是电子的坐标 x 与时间 t 的关系. 相碰时,$x=0$,故由上式得

$$t=\frac{\pi}{2}\frac{m_\mathrm{p}+m}{em_\mathrm{p}}x_0\sqrt{2\pi\varepsilon_0 mx_0} \tag{12}$$

因开始($t=0$)时质子与电子相距为 l,故由式(1)得

$$x_0=\frac{m_\mathrm{p}}{m_\mathrm{p}+m}l \tag{13}$$

代入式(12)得

$$t=\frac{\pi l}{2e}\sqrt{\frac{2\pi\varepsilon_0 m_\mathrm{p}ml}{m_\mathrm{p}+m}} \tag{14}$$

代入数值得

$$\begin{aligned}t&=\frac{\pi}{2\times1.602\times10^{-19}}\times\sqrt{\frac{2\pi\times8.854\times10^{-12}\times1.673\times10^{-27}\times9.109\times10^{-31}\times1}{1.673\times10^{-27}+9.109\times10^{-31}}}\\&=6.978\times10^{-2}(\mathrm{s})\end{aligned} \tag{15}$$

【讨论】 因电子与质子之间的万有引力远小于它们之间的库仑力(参看1.1.14题),故万有引力可略去不计.

1.1.14 氢原子由一个质子(即氢原子核)和一个电子组成. 根据经典模型,在