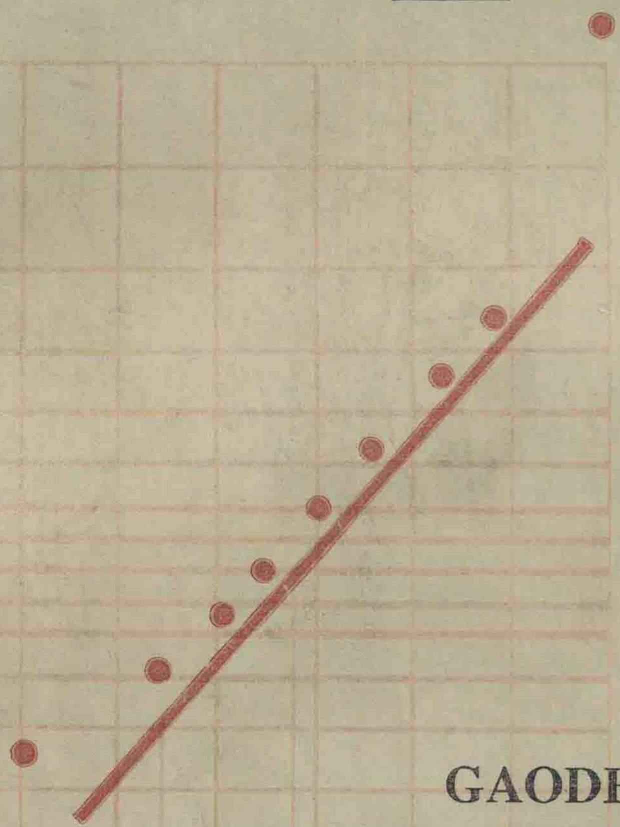
高等学校规划教材

高等工程数学

（下册）

朱儒楷 主编



GAODENG GONGCHENGSHUXUE

中国矿业大学出版社

教材

高等工程数学

（下册）

朱儒楷　主编

中国矿业大学出版社

(苏)新登字第010号

内 容 简 介

这是一本把工学硕士研究生所需的主要数学内容融为一体的教学用书。

本书根据国家教委研究生办公室1991年下达的“关于工学硕士研究生数学课程的教学基本要求的通知”的精神编写,以介绍各种应用数学方法、培养学生的计算能力、适当提高工学研究生的数学素质和理论水平为基本原则。在学以致用的前提下,本书尽可能广泛地介绍有代表性的理论和方法,少数地方还吸收了一些新的科研成果。

全书分上、下两册,共八篇。上册包括预备知识、矩阵理论、数值分析、数理统计与随机过程四篇;下册包括数学物理方程、最优化方法、模糊数学、现代数学基础引论四篇。各部分的介绍有详有略,简明精炼,通俗易懂。每篇各章后都附有习题,各篇后附有参考资料目录,各册后附有习题答案和附表。

全书各篇有相对独立性,可根据需要灵活选用。

本书除作为工科各专业硕士研究生教材以外,也可作为对数学要求高的工科专业本科生的工程数学教材,还可供广大工程技术人员参考。

责任编辑 陈贵仁
技术设计 关湘雯

高等学校规划教材
高等工程数学
(下册)
朱儒楷 主编

中国矿业大学出版社出版
新华书店经销 中国矿业大学印刷厂印刷
开本 787×1092毫米 1/16 印张 22.5 字数 546千字
1993年5月第一版 1993年5月第一次印刷
印数:1—3000册

ISBN 7-81021-640-6

O·32 定价:11.50元

前　言

为了满足教学的需要，历年来我校编写了多种研究生数学课程的讲义，积累了一些经验。根据国家教委研究生办公室1991年下达的“关于工学硕士研究生数学课程的教学基本要求的通知”的精神，结合我校培养工程型硕士研究生对数学的需求，确定在原有多种讲义的基础上，编写本教材。编写的基本原则是：以介绍各种应用数学方法为主，注重培养学生的计算能力，适当注意提高工学研究生的数学素质和理论水平；在学以致用的前提下，取材尽可能广一些，精选有代表性的理论和方法；在具体写法上，有详有略，简明精炼，通俗易懂；在少数地方还吸收了一些新的科研成果。

我们首先在教研室内经过充分的酝酿和讨论，统一认识，确定大家遵循的指导思想和编写原则，然后由我校多年从事研究生教学的教师分工执笔，以充分反映教学中的实际经验，使编写的教材更加适合研究生的教学要求。全书分上、下两册，共八篇，统一由朱儒楷教授审校，汇总与整理。各篇章的分工如下：

上　册

第一篇　预备知识	朱儒楷
第二篇　矩阵理论	魏　兵
第三篇　数值分析	
八、九、十章	曹德欣　曹璎珞
十一、十二章	曹璎珞　曹德欣
第四篇　数理统计与随机过程	
十三、十四、十五、十六、十七章	齐京虹
十八、十九章	周晓轩

下　册

第五篇　数学物理方程	
二十、二十二章	李安昌
二十一章	李安昌　金东海
二十三章	李安昌　曹璎珞
第六篇　最优化方法	
二十四、二十六、二十七章	周长新
二十五章	林　谦
第七篇　模糊数学	宋晓秋
第八篇　现代数学基础引论	贺祖琪

本书是一本把工学硕士研究生所需的主要数学内容融为一体的教学用书。除预备知识

供学生自学或查阅外，其他各篇分别约需40学时讲授。每篇各章后都附有相当数量的习题，并在书后附有习题答案与附表。每篇后还附有参考资料目录，以方便读者。我们不强求全书数学符号的统一，而以各篇学科的习惯用法为依据。本书除可供工科各专业硕士研究生作为教材以外，也可作为对数学要求高的工科专业的大学本科生的工程数学教材，还可供广大工程技术人员参考。全书各篇有相对独立性，可根据需要灵活选用。

由于编者水平所限，书中一定会有不妥之处，希广大读者批评指正，不胜感谢。

编　者

1991年11月

下 册 目 录

第五篇 数学物理方程

第六篇 最优化方法

第七篇　模糊数学

第八篇 现代数学基础引论

第五篇 数学物理方程

17 世纪微积分产生以后，在用微积分工具处理力学、物理学中的一些问题时，产生了大量的微分方程。偏微分方程作为一门独立的学科是在 18 世纪初形成的。在两个多世纪里，偏微分方程得到了很大的发展，在近代科学技术中，起着非常重要的作用。

偏微分方程是含有未知函数偏导数的等式。出现在等式中未知函数偏导数的最高阶数称为微分方程的**阶数**。如果一个偏微分方程对于未知函数及其所有偏导数都是线性的，则称为**线性方程**。在线性方程中，不含未知函数及其各阶偏导数的非零项，称为**自由项**。不含自由项的线性方程称为**齐次方程**，否则称为**非齐次方程**。

通常把具有深刻物理背景的一些偏微分方程，叫做**数学物理方程**。本篇主要研究三种典型的数学物理方程：波动方程、热传导方程和位势方程。这些方程都是二阶线性偏微分方程，具有广泛的应用性。

对于工科研究生来说，学习数学物理方程的重点是在了解定解问题物理背景的前提下，掌握求定解问题的方法。本篇中第二十章主要讨论三种典型方程的导出及定解问题的提法；第二十一章研究对三种典型方程都有效的解法——分离变量法和积分变换法；第二十二章介绍求解波动方程初值问题的行波法和解位势方程边值问题的静电源像法；第二十三章简要讨论解数学物理方程的数值方法。

第二十章　经典方程的导出及其定解问题

任何物质的运动都受到一定的自然规律(如物理定律)的制约。常见的一些数学物理方程,作为描写物质运动的数学模型,都是从数量形式上刻划了由相应物理定律所确立的某些物理量之间的制约关系。

在这一章内,我们将首先通过微元分析法分析弦振动、热传导及稳定或平衡现象,导出三种经典方程:波动方程、热传导方程和位势方程,它们都分别描述了一类物理现象的共性。然后给出描述特定物理现象的定解条件,它反映了指定现象的个性。最后总结出几种常用定解问题的提法。

§20-1　波动方程及其定解条件

本节重点利用微元分析法导出一维波动方程——弦振动方程,然后给出相应的定解条件,并在此基础上总结出波动方程的定解问题。

一、弦振动方程的导出

物理模型:一长为 l 的柔软均匀细弦,拉紧以后,在垂直于弦线的外力作用下,使它在平衡位置附近作微小的横振动,求弦上各点的运动规律。

为了导出上述问题的数学模型,我们首先建立坐标系。取弦的平衡位置为 x 轴,在弦线的运动平面内,垂直于弦线的平衡位置且通过弦线的一个端点的直线为 u 轴(图 20-1)。这样,在任意时刻 t,弦线上 x 点的位移为 $u(x,t)$。

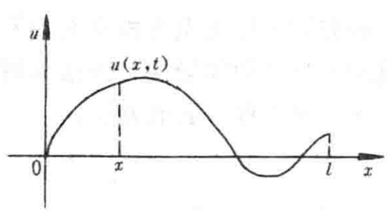


图 20-1

1. 基本假设

为了使问题简化,必须对问题作一些理想化的基本假设,即假设是理想的弦和理想的运动。其具体含义如下:

(1) 弦均匀、很细、很轻。即设弦的线密度 ρ 是一个常数,弦的截面大小比起长度 l 来小得多,弦在振动过程中重力可以忽略不计;

(2) 弦柔软,具有弹性。这表明弦在形变过程中,只抵抗拉压,不抵抗弯曲,产生反抗形变的弹性力遵守虎克定律。把组成弦质点之间的一种相互作用力称之为**张力**,而这种张力是沿弦的切线方向;

(3) 弦作微小横振动。这就是说,弦的运动发生在同一平面内,弦上各点的位移与平衡位置垂直。这时弦线上各点的切线斜率 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 绝对值很小,以至于 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ 与 1 相比可以忽略不计。

根据上述基本假设，我们很容易推出弦在振动过程中，张力的大小 T 是一个常量，即 T 与 t 和 x 无关。

事实上，在弦线上任取一小段 $[x,x+\Delta x]$，它的弧长为

$$\Delta s = \int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \approx \int_x^{x+\Delta x} \mathrm{d}x = \Delta x$$

这表明弦段在振动过程中几乎不伸长。因此由虎克定律知道，弦在每一点所受张力大小在运动过程中保持不变，即张力的大小与时间 t 无关。

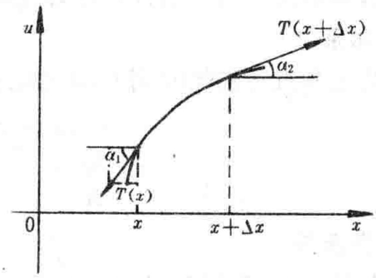


图 20-2

若设在点 x 处的张力与水平方向夹角为 α_1，大小为 $T(x)$；在点 $x+\Delta x$ 处的张力与水平方向的夹角为 α_2，大小为 $T(x+\Delta x)$（图 20-2）。利用水平受力平衡条件，得

$$T(x+\Delta x)\cos\alpha_2 - T(x)\cos\alpha_1 = 0 \tag{20-1}$$

又因

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha_1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}\Bigg|_x \approx 1 \tag{20-2}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha_2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}\Bigg|_{x+\Delta x} \approx 1 \tag{20-3}$$

所以在考虑的精度范围内，式(20-1)变为 $T(x+\Delta x)-T(x)=0$，即

$$T(x+\Delta x) = T(x) = T \tag{20-4}$$

这里 T 是一个与 x 无关的常数。

通过以上分析可以看出：张力的大小 T，是一个与时间 t 和位置坐标 x 无关的常量。

2. 方程的导出

考虑到表达式(20-2)、(20-3)及(20-4)，因此由动量守恒定律，得弦段运动满足的积分方程

$$\int_t^{t+\Delta t}\mathrm{d}t\int_x^{x+\Delta x}\left[\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - p(x,t)\right]\mathrm{d}x = 0 \tag{20-5}$$

在式(20-5)中，被积函数连续时（需假设 $u(x,t)$ 二阶偏导数都连续），利用积分中值定理，得

$$\left(\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - p(x,t)\right)\Bigg|_{(x^*,t^*)} = 0$$

这里，$x<x^*<x+\Delta x$，$t<t^*<t+\Delta t$。令 $\Delta x\to 0$，$\Delta t\to 0$ 及 $a^2=\dfrac{T}{\rho}$，$f(x,t)=p(x,t)/\rho$，就得到**弦的强迫振动方程**：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \tag{20-6}$$

当没有强迫外力时，即 $f(x,t)\equiv 0$，这时由式(20-6)得到**弦的自由振动方程**：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{20-7}$$

二、弦振动方程的定解条件

弦振动方程(20-6)描述了弦作微小横振动时，位移函数 $u(x,t)$ 所满足的一般规律。要确定特定的运动规律，还必须知道弦的初始状态，以及弦两端点的状态。也就是说，需要附加初始条件和边界条件。这些条件统称为**定解条件**。

1. 初始条件

给出弦上各点在初始时刻 $t=0$ 的位移 $\varphi(x)$ 和速度 $\psi(x)$，则初始条件为

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \quad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{20-8}$$

2. 边界条件

边界条件一般有下列三种类型：

1) 第一类边界条件

已知弦两端点的运动规律，则得非齐次的第一类边界条件：

$$u|_{x=0} = \mu(t) \qquad u|_{x=l} = \nu(t) \qquad (t \geqslant 0) \tag{20-9}$$

这里 $\mu(t)$ 和 $\nu(t)$ 是不恒为零的已知函数。特别地，当弦的两端固定时，则得齐次第一类边界条件：

$$u|_{x=0} = 0 \quad u|_{x=l} = 0 \quad (t \geqslant 0) \tag{20-10}$$

2) 第二类边界条件

已知弦在端点处受垂直于弦线的外力作用，这说明弦在端点处张力在垂直方向的分量 $T\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 为已知，则得非齐次第二类边界条件：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \mu(t) \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \nu(t) \qquad (t \geqslant 0) \tag{20-11}$$

这里 $\mu(t)$ 和 $\nu(t)$ 是不恒为零的已知函数。特别是当弦的两端自由时(可视为让弦的端点联结在无摩擦套筒上在垂直方向作自由滑动，如图 20-3)，则得齐次第二类边界条件：

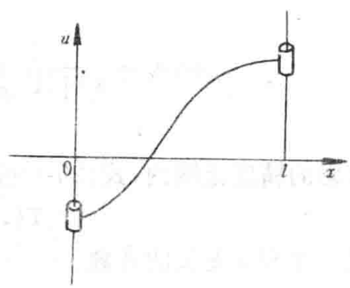


图 20-3

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0 \quad (t \geqslant 0) \tag{20-12}$$

3) 第三类边界条件

已知弦的端点受弹性支承。可理想化地视为弦的端点缚在与 x 轴垂直且弹性系数为 k_1 的弹簧上，如图 20-4 所示的右端点 $x=l$ 的情形。这时弹性力与张力的垂向分量平衡，又由虎克定律知道：弹性力与伸长成正比且符号相反，于是得

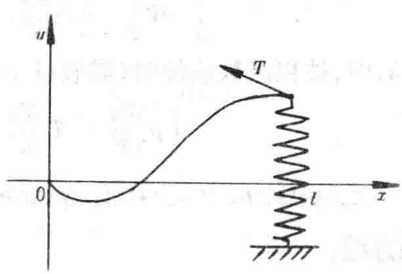


图 20-4

$$T\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = -k_1 u|_{x=l}$$

因此得如下齐次的第三类边界条件：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma_1 u\right)\bigg|_{x=l}=0 \qquad (t\geqslant 0) \tag{20-13}$$

其中，$\sigma_1=\frac{k_1}{T}>0$。类似地，如果左端点 $x=0$ 也固定在弹性支承上，得到的边界条件为

$$\left(-\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma_0 u\right)\bigg|_{x=0}=0 \quad (t\geqslant 0) \tag{20-14}$$

其中，常数 $\sigma_0>0$。

如果在端点处，除了固定在弹性支承上以外，还受已知的持续垂向外力作用，就可得到非齐次的第三类边界条件：

$$\left.\begin{aligned}&\left(-\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma_0 u\right)\bigg|_{x=0}=\mu(t)\\&\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\sigma_1 u\right)\bigg|_{x=l}=\nu(t)\end{aligned}\right\} \quad (t\geqslant 0) \tag{20-15}$$

其中，σ_0、σ_1 为正常数；$\mu(t)$、$\nu(t)$为已知函数。

以上三种边界条件，在实际应用时，可根据弦的各端点给定的物理状态选择，因此两端点可以有不同类型的边界条件。

三、波动方程的定解问题

弦振动方程(20-6)，决不只用来刻画弦的横振动问题，还有很多其它的实际问题也可用方程(20-6)来描述。例如，在研究杆的纵振动及电流振荡等问题时，也可得到同样形式的方程。这种方程反映了只有一个空间变量时的波动现象的共性，通常称为**一维波动方程**。

在研究均匀薄膜微小横振动时，可得到**二维波动方程**：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=f(x,y,t) \tag{20-16}$$

在研究三维弹性体的振动或声波、电磁波在空间中传播问题时，可得**三维波动方程**：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=f(x,y,z,t) \tag{20-17}$$

在波动方程(20-6)、(20-16)、(20-17)中，f 为方程的自由项。如果 $f\equiv 0$，则称为齐次方程，否则称为非齐次方程。

对于二维、三维波动方程，和弦振动情况类似，定解条件也可以分为初始条件和边界条件。下面以二维波动方程为例，给出它的定解条件。

1. *初始条件*

给出初始位移状态及初始速度，即

$$u|_{t=0}=\varphi(x,y) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x,y) \qquad (x,y)\in \bar{D} \tag{20-18}$$

这里 $\bar{D}$ 表示区域 D 加上其边界 Γ 的闭区域。

2. *边界条件*

(1) 给出边界 Γ 上的位移，得第一类边界条件：

$$u|_{\Gamma}=u(x,y,t) \qquad (x,y)\in\Gamma,\ t\geqslant 0 \tag{20-19}$$

(2) 给出边界 Γ 上各点的受力状况，得第二类边界条件：

$$\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma}=\mu(x,y,t) \qquad (x,y)\in\Gamma,\ t\geqslant 0 \tag{20-20}$$

(3) 设边界 Γ 固定在弹性支承上，得第三类边界条件：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+ku\right)\bigg|_{\Gamma}=\mu(x,y,t)\qquad (x,y)\in\Gamma,\ t\geqslant 0 \tag{20-21}$$

波动方程加上适当的定解条件就可以构成定解问题。常见的定解问题有下列两种类型：

$$\begin{array}{c}\textbf{混合问题}\\(\text{初边值问题})\end{array}\left\{\begin{array}{l}\text{波动方程}\\\text{初始条件}\\\text{边界条件}\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c}\textbf{初值问题}\\(\text{柯西问题})\end{array}\left\{\begin{array}{l}\text{波动方程}\\\text{初始条件}\end{array}\right.$$

初值问题适用于在考察的较短时间内，离边界较远的区域上，且边界条件影响可以忽略不计的情况。

§20-2 热传导方程及其定解条件

物体由于温度分布不均匀，热量从温度高的地方向温度低的地方转移。这种热量传递现象称为**热传导**。本节将利用微元分析法推出空间某物体在热传导时所满足的方程及其定解条件。

一、热传导方程的导出

物理模型：在三维空间中，考虑一均匀且各向同性并在内部有热源的物体，研究此物体内部的温度变化规律。

用函数 $u(x,y,z,t)$ 表示物体在时刻 t 点 (x,y,z) 处的温度；用矢量 $\boldsymbol{q}(x,y,z,t)$ 表示物体在时刻 t 经过点 (x,y,z) 处的热量的流向及大小，称为**热流密度**；用 ρ、k、c 分别表示物体的介质密度、热传导系数、比热。由于这里假设物体均匀且各项同性，所以 ρ、k、c 均为正的常数。

1. 导出方程所依据的物理定律

傅立叶定律 热流密度 $\boldsymbol{q}$ 与温度梯度 grad u 成正比，符号正相反，即

$$\boldsymbol{q}=-k\ \mathrm{grad}\ u \tag{20-22}$$

其中，比例系数 k 前面的负号，反映了热流总是从温度高处流向低处的事实；而温度梯度的计算表达式为

$$\mathrm{grad}\ u=\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial y}j+\frac{\partial u}{\partial z}k$$

热量守恒定律 假设热能不会转化成其它能量时，物体在一段时间内吸收的热量等于在这段时间内通过物体边界流入的热量与由物体内部的热源产生的热量的总和，即有下列热量平衡关系：

$$\boxed{\begin{array}{c}[t,t+\Delta t]\\\text{物体吸收的热量}\end{array}}=\boxed{\begin{array}{c}[t,t+\Delta t]\\\text{通过边界流入的热量}\end{array}}+\boxed{\begin{array}{c}[t,t+\Delta t]\\\text{热源产生的热量}\end{array}}$$

2. 方程的导出

为了用微元分析法导出方程，在物体内部任取一块由光滑封闭曲面 Σ 所围的区域 Ω，在任意时段 $[t,t+\Delta t]$ 上利用热量平衡关系。

当温度由 $u(x,y,z,t)$ 变到 $u(x,y,z,t+\Delta t)$ 时，Ω 所吸收的热量为

$$Q_1 = \iiint_\Omega c\rho[u(x,y,z,t+\Delta t) - u(x,y,z,t)]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_\Omega c\rho\left[\int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_t^{t+\Delta t}\mathrm{d}t\iiint_\Omega c\rho\,\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

在边界曲面 Σ 上任意点 (x,y,z) 处取曲面微元 $\mathrm{d}S$，从瞬时 t 开始的 $\mathrm{d}t$ 时段内沿单位外法向 $\boldsymbol{n}$ 流过曲面 $\mathrm{d}S$ 的热量为

$$\mathrm{d}Q_2 = \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t$$
$$= -k\,\mathrm{grad}u\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t$$
$$= -k\,\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t$$

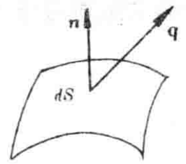


图 20-5

因此在时段 $[t,t+\Delta t]$ 内，流进曲面 Σ 的热量为

$$Q_2 = \int_t^{t+\Delta t}\mathrm{d}t\iint_\Sigma k\,\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S$$

$$= \int_t^{t+\Delta t}\mathrm{d}t\iiint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\,\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad \text{（利用高斯公式）}$$

$$= \int_t^{t+\Delta t}\mathrm{d}t\iiint_\Omega k\Delta u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

其中
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

当物体的内部有电流通过或者有化学反应等情况时，物体内部就有热源，设热源密度为 $F(x,y,z,t)$，则在 $[t,t+\Delta t]$ 时段 Ω 内产生的热量为

$$Q_3 = \int_t^{t+\Delta t}\mathrm{d}t\iiint_\Omega F(x,y,z,t)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

由热平衡关系 $Q_1=Q_2+Q_3$，就得到

$$\int_t^{t+\Delta t}\mathrm{d}t\iiint_\Omega\left[c\rho\,\frac{\partial u}{\partial t}-k\Delta u-F\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0 \tag{20-23}$$

由于区域 Ω 及时段 $[t,t+\Delta t]$ 的任意性，当假设式(20-23)的被积函数连续时，利用积分中值定理，容易导出**热传导方程**：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = f(x,y,z,t) \tag{20-24}$$

其中，$a^2=\dfrac{k}{c\rho}$，$f=\dfrac{F}{c\rho}$。

如果物体内部无热源，即 $F\equiv 0$，则得到齐次热传导方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = 0 \tag{20-25}$$

最后我们说明两点：

(1) 热传导方程反映了传导或扩散一类物理现象的共性，它同样可以从研究物质(固体、液体或气体)的扩散问题中导出，推导方法非常类似(二者对比见表 20-1)。

表 20-1

	物理规律	符号意义			
传热问题	傅立叶定律 热量守恒定律	u 温度	k 热传导系数	$\boldsymbol{q}$ 热流密度	F 热源密度
扩散问题	菲克扩散定律 质量守恒定律	u 浓度	D 扩散系数	$\boldsymbol{q}$ 扩散流向量	F 物质源强

(2) 对于某些三维问题，可根据问题的特殊性，适当选取坐标系，可以化归为或近似地化归为一维或二维问题来处理。例如，在研究均匀细杆或均匀薄片的热传导问题时，可以导出一维或二维热传导方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \tag{20-26}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x,y,t) \tag{20-27}$$

二、热传导方程的定解条件

为了具体确定物体内部的温度分布，我们还需要知道物体内部的初始温度分布及通过物体的边界受周围介质的影响。

1. 初始条件

已知初始时刻 $t=0$ 的温度分布，则有初始条件：

$$u|_{t=0} = \varphi(x,y,z) \tag{20-28}$$

2. 边界条件

边界条件的提法也可以有下列三类：

1) 第一类边界条件

已知物体表面 Γ 的温度分布，则有第一类边界条件：

$$u|_{\Gamma} = \mu_1(x,y,z,t) \tag{20-29}$$

2) 第二类边界条件

已知物体表面 Γ 上每一点的热流密度 $\boldsymbol{q}$，由傅立叶定律有

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \text{grad}u \cdot \boldsymbol{n} = -\frac{1}{k}\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n}$$

则有第二类边界条件：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \mu_2(x,y,z,t) \tag{20-30}$$

特别地，当 $\mu_2 \equiv 0$ 时，表示表面绝热（与周围介质无热交换）。

3) 第三类边界条件

已知物体与周围介质间有热交换，设周围介质的温度分布为 u_0，根据牛顿热交换定律可知，在 $\mathrm{d}t$ 时段由表面元 $\mathrm{d}S$ 散失的热量为 $\alpha(u-u_0)\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t$（$\alpha$ 为热交换系数）。由于热量不能积累，所散失的热量是来自物体内非常贴近曲面元 $\mathrm{d}S$ 的热量，根据傅立叶定律，由前面推导可知此热量为 $-k\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t$。因此得到边界条件为

$$-k\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \alpha(u-u_0)|_{\Gamma}$$

整理后，则有第三类边界条件：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+hu\right)\Big|_{\Gamma}=\mu_3(x,y,z,t) \tag{20-31}$$

类似波动方程情形，热传导方程根据不同定解条件也有两类定解问题：混合问题及初值问题。

§20-3 位势方程及其定解问题

许多描述稳定或平衡现象的物理问题，可以归结为位势方程。例如，当热传导过程达到稳定状态时，温度的分布就不再随时间 t 变化，从而有 $\frac{\partial u}{\partial t}=0$，这时由热传导方程(20-24)就得到位势方程：

$$\Delta u=g(x,y,z) \tag{20-32}$$

其中，$g=-\frac{1}{a^2}f$。特别地，当 $f\equiv 0$ 时，则有方程

$$\Delta u=0 \tag{20-33}$$

通常把方程(20-32)和(20-33)分别称为**泊松方程**和**调和方程**(或拉普拉斯方程)。在实际中也经常碰到二维位势方程，如膜振动得到平衡时，就产生二维泊松方程或二维调和方程。

要具体确定位势方程的解，也需要附加定解条件，但由于位势方程所描述的是稳定或平衡现象，因此方程及其解均与时间 t 无关，所以在定解条件中，只有边界条件而无初始条件。与波动方程及热传导方程的情形类似，位势方程也有三种类型的边界条件提法。把含有第一类、第二类、第三类边界条件的边值问题，分别称为**第一边值问题**(或狄利克莱问题)、**第二边值问题**(或诺伊曼问题)、**第三边值问题**(或洛平问题)。在应用中，根据确定物体内部还是外部的不同稳定场，又可分为**内问题**和**外问题**。由于外问题是在无限区域上给出，为了保证解的唯一性，常常要在无限远处加上一定的限制条件。

前面我们推出的三种典型方程，它们分别描述的物理现象本质不同，从而方程的性质也不同。例如：

波动方程——描述波动现象，对时间 t 可逆①；

热传导方程——描述传输过程，对时间 t 不可逆；

位势方程——描述稳恒状态，与时间 t 无关。

我们可以进一步对二阶线性偏微分方程进行分类。前面推出的三种典型方程，正好分别属于**双曲型**、**抛物型**、**椭圆型**三种不同类型的方程。

在实际中，定解条件除了有初始条件及边界条件外，对研究区域上性质不同的问题，在交界处还需增加**衔接条件**。定解条件要加的合理，才能保证定解问题具有所谓**适定性**，即

解的**存在性**——定解问题至少存在一个解；

解的**唯一性**——定解问题只存在一个解；

---

① 在 u 中，用 $-t$ 代替 t，仍能满足原方程。