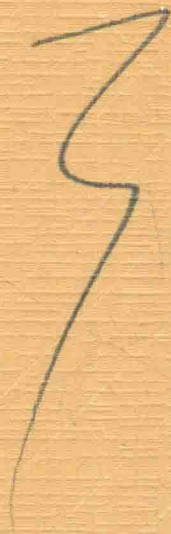


分析哲学译文集·第一辑

逻辑与哲学的交融

THE FUSION OF
LOGIC AND PHILOSOPHY

刘靖贤 主编



社会科学文献出版社
SOCIAL SCIENCES ACADEMIC PRESS (CHINA)

分析哲学译文集·第一辑

逻辑与哲学的交融

刘靖贤 主编



THE FUSION OF
LOGIC AND PHILOSOPHY



社会科学文献出版社
SOCIAL SCIENCES ACADEMIC PRESS (CHINA)

图书在版编目(CIP)数据

逻辑与哲学的交融 / 刘靖贤主编. -- 北京: 社会科学文献出版社, 2018. 8

ISBN 978 - 7 - 5201 - 3029 - 5

I. ①逻… II. ①刘… III. ①逻辑哲学 IV.

①B81 - 05

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 146880 号

逻辑与哲学的交融

主 编 / 刘靖贤

出 版 人 / 谢寿光

项目统筹 / 梁艳玲 刘同辉

责任编辑 / 刘同辉 高欢欢

出 版 / 社会科学文献出版社 (010) 59367238

地址: 北京市北三环中路甲 29 号院华龙大厦 邮编: 100029

网址: www.ssap.com.cn

发 行 / 市场营销中心 (010) 59367081 59367018

印 装 / 三河市尚艺印装有限公司

规 格 / 开 本: 787mm × 1092mm 1/16

印 张: 17 字 数: 287 千字

版 次 / 2018 年 8 月第 1 版 2018 年 8 月第 1 次印刷

书 号 / ISBN 978 - 7 - 5201 - 3029 - 5

定 价 / 78.00 元



本书如有印装质量问题, 请与读者服务中心 (010 - 59367028) 联系

版权所有 翻印必究



刘靖贤

辽宁大学哲学与公共管理学院副教授，硕士生导师。研究方向为分析哲学和逻辑学。主持国家社会科学基金青年项目1项、教育部哲学社会科学研究后期资助项目1项。在《哲学动态》《世界哲学》《自然辩证法研究》《中国高校社会科学》《学术界》等期刊上发表学术论文和译文30多篇，其中9篇被中国人民大学复印报刊资料转载，参与撰写学术著作3部。

国家社会科学基金重点项目“现代中国哲学史资料库建设和研究（1919—1949）”
（编号：14AZD088）

辽宁省高等学校创新团队支持计划项目“马克思主义与当代中国哲学发展”
（编号：WT2014001）

编者序言

逻辑哲学既是对逻辑的哲学反思，也是对哲学的逻辑分析。21 世纪以来，逻辑哲学已经成为国际哲学研究的主流方向，众多国际知名哲学期刊中有近半数的论文讨论逻辑哲学问题，各种有关逻辑哲学的专著和文集层出不穷。正是在逻辑哲学研究的推动下，当代国际哲学界在形而上学、知识论、语言哲学、数学哲学、心灵哲学、人工智能哲学等方面形成了各种新的观点和争论。近年来，国内哲学界开始重视逻辑哲学的研究，取得了一些重要研究成果；但从总体上看，还没有与国际哲学界展开实质性的对话。因此，有必要直接面向逻辑哲学的前沿问题，积极参与当代国际哲学的理论建构，发展有中国特色的逻辑哲学理论，为中国哲学家在国际哲学界赢得话语权和影响力。这是中国哲学家必须走也应该走的学术道路。21 世纪是逻辑和哲学水乳交融的世纪，哲学为逻辑奠定基础，逻辑为哲学提供指引。充分加强逻辑哲学的研究，可以为我国实现哲学研究的跨越式发展提供重要契机。

自 2011 年以来，陈波教授在北京大学召开了一系列逻辑哲学会议，会议主题分别为：“弗雷格、逻辑和哲学”国际学术会议（2011 年），“克里普克、逻辑和哲学”国际学术会议（2012 年），“蒯因、逻辑和哲学”国际学术会议（2013 年），“威廉姆森、逻辑和哲学”国际学术会议（2015 年），“悖论、逻辑和哲学”国际学术会议（2016 年），“真理、逻辑和哲学”国际学术会议（2017 年）。按照陈波教授的计划，2018 年举办“亨迪卡、逻辑和哲学”国际学术会议。这一系列逻辑哲学国际学术会议的召开，不仅为国内外学者提供了一个国际交流平台，而且有助于提升中国哲学学者的研究水平和国际影响力。本译文集在某种程度上是这一系列国际学术会议的副产品。本译文集的 14 篇译文都是陈波教授在与国外学者面对面的交流与讨论中精挑细选出来的，代表了国外逻辑哲学界的最新研究成果。这些译文也都是在陈波教授的主导下翻译完成的，从译者的选择到译

文的校对，陈波教授都是亲力亲为的。

虽然这些译文先前都已经在国内学术期刊上发表过，但把它们完整编辑起来，收集在一本译文中，对读者参考和查阅来说还是非常有必要的。目前由于篇幅的限制，尚不能把所有译文全部收集在一起。我们计划出版一系列译文集，本译文集是这一系列译文集中的第一辑。本译文集在编辑和出版过程中不仅得到了作者和译者的支持，也受到了辽宁大学哲学与公共管理学院的资助，特在此表示感谢。最后，我们列出作者和译者以及这 14 篇译文的期刊出处。

理查德·赫克 (Richard Heck)，美国布朗大学哲学系教授。

迈克·比尼 (Michael Beaney)，英国约克大学哲学系教授，《英国哲学史杂志》主编。

野本和幸 (Kazuyuki Nomoto)，日本首都大学东京教授。

索尔·克里普克 (Saul Kripke)，普林斯顿大学荣誉退休教授，纽约城市大学研究生中心哲学特聘教授。

蒂莫西·威廉姆森 (Timothy Williamson)，英国牛津大学哲学系威克汉姆逻辑学讲座教授，英国皇家学会会员，英国科学院院士。

苏珊·哈克 (Susan Haack)，美国迈阿密大学资深教授。

陈波，北京大学哲学系教授。

刘叶涛，燕山大学文法学院教授。

张留华，华东师范大学哲学系教授。

刘靖贤，辽宁大学哲学系副教授。

徐召清，四川大学哲学系副教授。

赵震，安徽大学哲学系讲师。

彭彬彬，吉林师范大学马克思主义学院讲师。

万美文，北京大学哲学系 2012 级硕士研究生。

第一章 弗雷格

1. 理查德·赫克：《弗雷格定理》，刘靖贤译，《哲学分析》2014 年第 2 期。

2. 迈克·比尼：《弗雷格的解释性分析》，刘靖贤译，《哲学分析》2012 年第 5 期。

3. 野本和幸：《弗雷格的语境方法》，刘靖贤译，《哲学分析》2012年第5期。

第二章 克里普克

1. 索尔·克里普克：《第一人称》，赵震、万美文译，《世界哲学》2013年第2期。

2. 索尔·克里普克：《空名与虚构实体》，刘叶涛译，《世界哲学》2013年第2期。

3. 索尔·克里普克：《通向哥德尔之路》，徐召清译，《哲学分析》2013年第3期。

第三章 威廉姆森

1. 蒂莫西·威廉姆森：《溯因哲学》，刘靖贤译，《哲学动态》2017年第7期。

2. 蒂莫西·威廉姆森：《近40年来分析哲学的转变》，徐召清译，《世界哲学》2015年第4期。

3. 蒂莫西·威廉姆森：《21世纪的逻辑与哲学》，张留华译，《北京大学学报》2009年第1期。

4. 蒂莫西·威廉姆森：《关于逻辑哲学的问答》，徐召清译，《湖北大学学报》2013年第4期。

第四章 哈克

1. 苏珊·哈克：《捍卫科学》，陈波译，《湘潭师范学院学报》2002年第1期。

2. 苏珊·哈克：《实在论及其竞争者》，赵震、万美文译，《哲学分析》2013年第2期。

3. 苏珊·哈克：《自然主义视角下的信念》，刘叶涛、彭杉杉译，《哲学分析》2013年第6期。

4. 苏珊·哈克：《关于逻辑哲学的访谈》，彭杉杉译，《湖北大学学报》2015年第5期。

目 录

第一章 弗雷格	/ 001
第一节 弗雷格定理	理查德·赫克 刘靖贤译 / 001
第二节 弗雷格的解释性分析	迈克·比尼 刘靖贤译 / 018
第三节 弗雷格的语境方法	野本和幸 刘靖贤译 / 035
第二章 克里普克	/ 058
第一节 第一人称	索尔·克里普克 赵 震、万美文译 / 058
第二节 空名与虚构实体	索尔·克里普克 刘叶涛译 / 090
第三节 通向哥德尔之路	索尔·克里普克 徐召清译 / 115
第三章 威廉姆森	/ 129
第一节 溯因哲学	蒂莫西·威廉姆森 刘靖贤译 / 129
第二节 分析哲学的转变	蒂莫西·威廉姆森 徐召清译 / 145
第三节 21 世纪的逻辑与哲学	蒂莫西·威廉姆森 张留华译 / 174
第四节 关于逻辑哲学的问答	蒂莫西·威廉姆森 徐召清译 / 191
第四章 哈 克	/ 201
第一节 捍卫科学	苏珊·哈克 陈波译 / 201
第二节 实在论及其竞争者	苏珊·哈克 赵 震、万美文译 / 217
第三节 自然主义视角下的信念	苏珊·哈克 刘叶涛、彭彬彬译 / 237
第四节 关于逻辑哲学的访谈	苏珊·哈克 彭彬彬译 / 254

第一章 弗雷格

第一节 弗雷格定理

理查德·赫克 刘靖贤译

一 开篇

我们关于算术真理的知识具有什么样的认识论地位？莱布尼茨认为它们是分析的，是纯粹理性的产物；经验主义者（尤其是密尔）认为它们是后天的，是高级的经验真理；康德则认为，虽然我们关于 $5 + 7 = 12$ 的知识从根本上取决于经验，但它们是先天的。谁是正确的？这正是弗雷格在他的哲学生涯中主要关注的问题。他的目的是证实莱布尼茨的看法，说明算术真理是从逻辑真理推出的。我们现在称这种观点为逻辑主义。

弗雷格从不同方面讨论了这个问题，可以简单地分为否定的方面和肯定的方面。否定的方面是对密尔和康德等人的批评。这些批评出现在许多地方，但集中于《算术基础》^① 的前三章。肯定的方面是证明从逻辑真理可以推出算术真理，以此来说明算术真理是如何建立在纯粹理性的基础上的。因此弗雷格的方案有一个纯粹数学的方面，笔者将主要关注这个方面。

弗雷格并不是第一个试图说明如何从基本假设推出数学真理的人。然而，相比前人，他的方法更为严格和全面。莱布尼茨也曾尝试证明“ $2 + 2 = 4$ ”这样的算术真理。但是，和欧几里得一样，莱布尼茨的证明依赖不明晰的假设。例如，莱布尼茨随意地使用加法结合律，即 $(a + b) + c = a + (b + c)$ ，也就是说，他任意地重新安排括号。但是，任何为算术规律提供

① Gottlob Frege, *The Foundations of Arithmetic*, tr. by J. L. Austin (Evanston, I. L.: Northwestern University Press, 1980). 此后缩写为 G1 并标明章节。

认识论基础的做法，都必须严格规定证明算术规律所依赖的假设。也就是说，证明必须以严格的方式给出：一旦它们所依赖的假设被规定以后，任何多余的假设都不能悄悄溜进来。弗雷格的方案是在“形式系统”内给出证明：根据语法标准明确规定所有的推理步骤，以至于只需经过简单的计算，就可以确定证明过程所依赖的假设。

当时的逻辑系统来自布尔（从根本上应该来自亚里士多德），但是这些逻辑系统并不适合弗雷格，原因有二：首先，这些系统不适合给出证明；其次，这些系统也不适合表达证明中所包含的语句。具体来说，布尔系统不能表达全称语句，例如“所有马的头都是动物的头”，或者更为相关的，“所有的数都有一个后继”。虽然在某种意义上这些语句也可以表达在布尔逻辑中，但这种表达并不能让我们清楚地看出：为什么从“所有的马都是动物”可以推出“所有马的头都是动物的头”。因此，即使如此简单的事实也无法在布尔逻辑中得到证明。

正是由于这一原因，弗雷格被迫发明了新的逻辑系统，也就是在《概念文字》^①中所给出的系统。正如弗雷格所一再强调的，这一系统适合表达前面所提到的语句；其推理规则虽然很少，但可以完成在布尔系统中不能形式化的证明。一旦发明出一个适合于表达数学证明的系统，关于算术认识论地位的问题就得到了转化。不过，这一问题还不能直接转化为“证明算术规律的前提假设是什么”，因为即使能够识别出这些假设，我们也要追问“这些假设的认识论地位是什么”。但是，哲学问题毕竟以纯粹数学的面貌呈现出来，因此数学的方法将对其产生影响。

笔者认为由此可见，弗雷格的方法是利用数学来解决哲学问题。笔者认为，无论怎么强调这种方法的重要性都不过分。这种方法通过罗素、维特根斯坦、卡尔纳普等人的著作流传至今，遍及当代分析哲学，但其影响并不局限于哲学。“从特定前提可以推出或推不出什么”也是数理逻辑所关心的问题。只有在弗雷格这样的逻辑系统中，数理逻辑的问题才能以数学化的方式表述出来。

正是在这种意义上，弗雷格的方法比任何先前的方法都更为严格。在另一种意义上，这种方法又更为全面。当莱布尼茨尝试证明算术规律的时

① Gottlob Frege, "Begriffsschrift: A Formula Language Modeled Upon That of Arithmetic for Pure Thought," in J. van Heijenoort, ed. and tr., *From Frege to Gödel: A Sourcebook in Mathematical Logic* (Cambridge, M. A.: Harvard University Press, 1967), pp. 5–82.

候，他仅仅关注 $2 + 2 = 4$ 这样的断言；而弗雷格却关注更为根本的算术真理。然而，即使能够表明所有的算术真理都可以从逻辑规律推出，也无法将这些算术规律逐个证明，因为有无穷多个算术规律。可行的办法是，找出基本的算术真理，从它们可以推出所有其他的算术真理，然后证明从逻辑规律可以推出这些基本的算术真理。也就是说，正如欧几里得已将几何公理化，算术也需要公理化，然后只需给出这些公理的证明。弗雷格并非第一个给出这些公理的人，一般将其归功于皮亚诺；不过，历史的考证表明，戴德金实际上是第一个表述这些公理的人。^① 弗雷格确实以不同于戴德金的方式给出了算术公理的一种表述，而且与戴德金一样，他还证明：这些公理在同构的意义上可以充分刻画自然数的抽象结构（同构是检验公理化是否充分的标准）。^②

当然，我们还不能在严格的意义上从逻辑系统推出算术公理：逻辑系统的语言没有任何用于指称数的表达式，所以我们还不能写出这些算术公理。必须用逻辑符号定义基本算术符号，然后根据这些定义把算术公理翻译到逻辑系统中。用现在的术语说，这是在逻辑系统中“解释”算术。在一个理论（称其为“基础理论”）中解释另一个理论（称其为“目标理论”），即表明：可以用基础理论的初始词汇定义目标理论的初始词汇，使得目标理论的公理都可以转化为基础理论的定理。弗雷格的目的是在某种逻辑理论中“解释”算术。^③ 这种解释至少能够表明：如果基础理论是一致的，则目标理论也是一致的。换言之，假如在目标理论中可以推出一个矛盾，这个推理过程可以复制到基础理论中，由此在基础理论中也可以推出一个矛盾。所以如果可以证明基础理论没有矛盾，则目标理论也没有矛盾。

与弗雷格同时代的几何学家非常熟悉这种解释的方法，弗雷格本人也是一名训练有素的几何学家。解释的方法通常用来证明不接受平行公理的非欧几何的一致性。如果在某种公认一致的理论中可以解释非欧几何，则可以证明这些非欧几何的一致性。

① 参见 Richard Dedekind, “The Nature and Meaning of Numbers,” in W. W. Beman, trans., *Essays on the Theory of Numbers* (New York: Dover Publications, 1963), pp. 44–115。

② 关于弗雷格的公理和他对它们的证明，参见拙作 “Definition by Induction in Frege’s Grundgesetze der Arithmetik,” in W. Demopoulos, ed., *Frege’s Philosophy of Mathematics* (Cambridge, M. A.: Harvard University Press, 1995), pp. 295–333。

③ 解释的定义非常复杂，我们在此不对其深究。

需要强调的是，即使我们承认弗雷格的“逻辑系统”是逻辑的，承认其所有定理都是分析真理，其中解释算术的做法也不一定有助于我们发现算术的认识论地位。原因如下。弗雷格认为算术和解析（关于实数的理论）都是分析的。但是，假如给出有序对的定义，在解析中可以通过笛卡尔坐标的方式解释欧几里得几何。这样看来，欧几里得几何岂不是分析的？而弗雷格认为欧几里得几何是先天综合的，在这方面他同意康德的说法。但是弗雷格的上述观点并非前后矛盾。“解释”仅仅表明：在解析中可以证明看起来像欧几里得公理的东西。而问题在于，这些看起来像平行公理的东西真的就是平行公理？也就是说，对于几何基本概念的定義真的表达了这些概念的通常意义？例如，“实数的三元有序组”是对点的合适定义吗？如果不是，则这种解释并没有表明在解析中可以证明几何真理。也就是说，如果不是按照字面意思而是按照实际意义来理解欧几里得几何，即使可以在解析中解释它们，也无法证明它们的真理性。

与上述问题相应的是弗雷格关于算术基本概念的定义。康德主义者可以质问：弗雷格的定义真的表达了算术概念的通常意义吗？如果没有，则弗雷格并没有表明在逻辑中可以证明算术真理，而只是表明：在逻辑中可以证明与算术真理在语法上不可分辨的语句。因此，弗雷格方案的一个重要部分是：表明算术基本概念确实是逻辑概念。也就是说，通过逻辑术语对算术基本概念的定义确实是恰当的定义。

将以上讨论总结如下。弗雷格的哲学计划是要表明算术规律是分析的，我们可以在纯粹理性的基础上认识这些规律。通过建立逻辑系统，弗雷格把这项计划以数学的面貌呈现出来。首要的目标是用逻辑概念定义算术基本概念，然后在逻辑系统中证明算术公理。正是通过这种方式，弗雷格可以识别出算术基本规律，即算术推理基于其上的基本假设。但从另一个同样重要的方面来看，关于这些基本假设的认识论问题仍然没有回答，因为以下两类问题仍然没有解决。首先，弗雷格对算术基本概念的定义是否真的表达了它们的意义？我们是否能够成功地证明算术公理并且识别出算术基本规律？其次，我们还是要追问：这些基本规律的认识论地位是什么？只有在这些基本规律是逻辑真理和分析真理的前提下，我们才能表明算术公理是分析真理。我们将会看到，这两类问题在有关逻辑主义的文献中都很突出。

二 弗雷格的逻辑系统

如我们现在所知，弗雷格在《概念文字》中发明的逻辑系统实质上是非直谓的二阶逻辑：除了量化对象外，它还允许量化概念（谓词的指称）和关系。然而，《概念文字》的系统并不满足弗雷格所要求的严格性。具体来说，这个系统有一个没有明确表述的推理规则，即代入规则。或许有人认为弗雷格的这种遗漏是无关紧要的：如果能证明一个公式，则也能证明把其他表达式代入这个公式的变元后所得到的结果，定理经过代入仍然是定理。或许如此，但在二阶逻辑中断言代入规则的有效性，这是一个非常强的论断。

代入规则在弗雷格系统中所扮演的角色正是我们现在的概括公理所扮演的角色：概括公理刻画了二阶变元（概念和关系）的取值范围，也就是说，作为一种公理模式，概括公理的每一个例示都断言一个特定的概念或关系的存在。在非直谓的二阶逻辑中，我们可以对任何公式进行概括：每个形如 $A(x)$ 的公式都可以定义一个概念，这个概念由满足 $A(x)$ 的对象构成；每个形如 $B(x, y)$ 的公式都可以定义一个二元关系；其余以此类推。如果取消概括公理，二阶逻辑就会非常弱。即使对概括公理进行直谓的限制，即定义概念和关系的公式不包含二阶量词，二阶逻辑也会非常弱。

许多哲学家担心：非直谓的概括公理会把某种循环引入对概念和关系的刻画中。罗素就认为通过对概念的量化来刻画概念的做法是循环的。弗雷格从未讨论过这个问题，但笔者认为他的回答可能是：论域中的概念并不是由概括公理决定的，所有的概念都应该包括在论域中，也就是说，概念的存在不是由概念的定义方式决定的，而概括公理仅仅是断言每个公式都可以定义一个概念。^①

弗雷格没有在《概念文字》中给出代入规则的清晰表述，这是一个疏忽。但在后来的《算术基本规律》中，他对这个疏忽进行了弥补。实际上，《算术基本规律》所给出的系统与哥德尔之前的任何形式系统都一样严格。

^① 参见 Gottlob Frege, *Grundgesetze der Arithmetik* (Hildesheim: Georg Olms Verlagsbuchhandlung, 1966), Vol. I, section 66.

然而，仅有二阶逻辑还不能证明算术公理。因为即使存在两个对象的断言也不是二阶逻辑的定理，而算术不仅断言两个对象的存在，而且断言无穷多个自然数的存在。这个断言是从逻辑推出算术的主要障碍。我们关于无穷多个数的知识到底来源于哪里？无论人们如何确定算术的认识论地位，它们都要面临这个最大难题。

三 三个教益和一个问题

在《算术基础》前三章，弗雷格认为，康德和经验主义者的算术哲学是行不通的。为了说明自己的观点，他给出了三个教益，也留下了一个问题。第一个教益是：如莱布尼茨所说，自然数可以用“0”和“加1”来刻画。下面将会看到，弗雷格是如何定义“0”和“加1”的。第二个教益是：“数的陈述包含着概念的断定”（G1, § 55）。这句话的意思：数不能在严格的意义上归属于对象。假如我指着一堆扑克牌，问道：“有多少？”点完这些牌的数目，你会告诉我：“共有104张牌。”但你也可能告诉我：“共有2副牌。”这取决于你如何理解我的问题。这个问题本身有些含糊，可以更具体地问：“有多少什么？”——“有多少张牌？”或者“有多少副牌？”然而，这堆扑克牌是离散的对象，它作为一个聚合是由其部分而构成的，既可以把一张牌看作这个聚合的部分，也可以把一副牌看作这个聚合的部分。似乎不能直接把104这个数归属于这堆牌，因为2这个数也可以归属于这堆牌。由此可见：数的归属是主观的，它取决于我们如何看待眼前的这堆扑克牌。然而弗雷格认为：数是归属于概念的，这个概念可以是关于牌的张数，也可以是关于牌的副数。

因此，很自然的想法是：数是一种高阶属性，是概念的属性。^①例如，0是空概念的属性，空概念是没有任何对象落在其中的概念。如果有一个对象落在某个概念中，则1是这个概念的属性。因此，1是“与乔治·克林顿相同的对象”这个概念的属性，因为只有乔治·克林顿落在这个概念中。如果有一个对象 x 落在某个概念中，而且还有 n 个不同于 x 的对象落在这个概念中，则 $n+1$ 是这个概念的属性。因此， $1+1$ 是“与乔治·克林顿相同或者与詹姆斯·布朗相同的对象”这个概念的属性，因为除乔治

① 关于这一想法的详细讨论，参见拙作“The Julius Caesar Objection,” in R. Heck, ed., *Language, Thought, and Logic: Essays in Honour of Michael Dummett* (Oxford: Oxford University Press, 1997)。

外，詹姆斯也落在这个概念中。

弗雷格在《算术基础》(G1, § § 55 - 61) 中讨论了上述想法。但并不清楚为什么他后来又拒绝了这个想法。一个似乎合理的解释是：这个想法不能使我们证明算术公理。假定世界上只有两个对象：一个叫乔治，另一个叫詹姆斯。由此可以得到三个概念：一个概念具有 0 的属性，一个概念具有 1 的属性，还有一个概念具有 2 的属性。但无法得到一个具有 $1 + 1 + 1$ 属性的概念，因为仅有两个对象存在，我们找不到有三个对象落在其中的概念。基于同样的原因，也无法得到一个具有 $1 + 1 + 1 + 1$ 属性的概念。如何解释这种结果？我们可以说：“根本不存在 $1 + 1 + 1$ 这个数”，或者“ $1 + 1 + 1$ 和 $1 + 1 + 1 + 1$ 是相同的”。但这两种说法都得出了同样的结论：只存在有限多个数，而且无法证明算术规律。例如，根据上面的解释，要么 $2 + 2$ 根本不存在，要么 $2 + 2$ 和 $2 + 1$ 相同。

当然，并非仅仅存在两个对象。然而，即使假定存在有限多个对象，也会出现类似的问题。如果直接假设存在无穷多个对象，就可以消解这个问题。罗素和怀特海在《数学原理》中就假设了无穷公理。但弗雷格对这种解决方法完全不感兴趣。如前面所说，关于算术认识论地位的最大难题是：如何说明我们关于无穷多个数的知识。“存在无穷多个对象”这一假设无助于认识论问题的解决。从这个假设证明算术规律的做法只是简单地回避了认识论问题，因为我们还要追问这个假设的认识论地位是什么。另外，如果我们承认其存在的对象只是像乔治·克林顿这样的物理对象，则逻辑根本不可能断言：存在无穷多个物理对象。人们甚至会怀疑这样的断言是不是真的。

第三个教益是：虽然数的陈述包含着概念的断定，但数本身并不是概念的属性，它们是对象。从语法上说，数词并不是谓词的谓词，而是专名。人们一定会好奇地问：第二个和第三个教益不矛盾吗？对此的回答是：我们仅仅认为命名数的基本表达式是专名，这类表达式形如“属于概念 F 的数”。数的陈述（“桌子上有 104 张牌”）可以重新表述为同一陈述（“属于‘桌子上的牌’这个概念的数与 104 相同”）。这个同一陈述包含着概念的断定，但 104 并不是作为概念的属性而出现的。

然而，弗雷格留给我们一个没有解决的问题。因为数既不是通过知觉，也不是通过直观给予我们的，所以他认为算术既不是先天综合的，也不是后天的。数究竟是如何给予我们的？我们是通过什么方式

来认识算术对象的？弗雷格在回答这个问题的同时也微妙地改变了这个问题：

只有在一个语句的语境中，一个语词才有意义。因此，（为了说明数词的意义）只需解释数词出现于其中的那个语句的意义……对于当前的情形，我们需要给出如下语句的意义：属于概念 F 的数和属于概念 G 的数相同。也就是说，我们需要以其他方式重新表述这个语句，避免使用“属于概念 F 的数”这样的表达。（ Gl , § 62）

正是此处，弗雷格做出了“语言转向”。这并不是说弗雷格之前的哲学家不关心语言。洛克就曾被语言所困扰，他一再强调：许多哲学问题是由于对语言的误解而造成的（洛克可能是第一个逻辑实证主义者）。弗雷格的原创性在于，他所提出的认识论问题被转化为语言哲学问题，并以此来解决而非回避这个问题。

对于认识论问题，弗雷格此处的暗示是：我们通过指称数的能力（我们能够理解指称数的表达式）来解释对数的认识。当然，如果用专名指称对象的能力依赖于我们知觉到或直观到这个对象，则弗雷格的暗示并没有带来多大好处。然而弗雷格提出“语境原则”的目的正是摆脱对我们所具有的知觉和直观的依赖，语境原则是：通过理解整个语句的意义来理解语句所包含的表达式的意思。这样就需要用逻辑概念给出“属于概念 F 的数和属于概念 G 的数相同”的定义。如果这是可能的，我们就能够以逻辑的方式理解指称数的表达式，也就是说，能够以逻辑的方式指称数，因此能够以逻辑的方式认识数。

在引用休谟的一段话后，弗雷格给出了数的相同的标准。假如我想证实盘子的数和杯子的数是相同的，一种方法是：分别对它们进行计数，也就是说，把两个数分别归属于“桌子上的盘子”和“桌子上的杯子”这两个概念，然后比较这两个数是否相同。另一种方法是：把盘子和杯子进行配对，然后看一看“是否每个盘子上都有一个杯子”，或者“是否有杯子没有放到盘子上”，也就是说，能否建立杯子和盘子之间的一一对应关系。如果存在这样的对应关系，则杯子的数和盘子的数就是相同的；否则，就是不相同的。