大学数学 经管类

上册

贾丽丽　朴丽莎　主编

科学出版社

大学数学

（经管类）上册

主　编　贾丽丽　朴丽莎
副主编　陶　辉

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书根据高等学校经济管理类数学基础课程的教学基本要求编写而成，是云南大学滇池学院精品课程建设项目成果之一.

全书分上、下两册，共三篇内容.本书为上册，主要介绍第一篇微积分，内容包括一元函数微积分学、微分方程、多元函数微积分学、无穷级数. 书中每章配有习题，书末附有习题参考答案. 本书结构清晰，概念准确，贴近考研，可读性强，便于学生自学，且能启发和培养学生的自学能力，并配有电子教案和录屏课件，便于广大师生的教与学.

本书可作为高等学校经管类大学数学课程教材，也适合经管类考研学生学习参考.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学：经管类：全 2 册/ 贾丽丽，朴丽莎主编. —北京：科学出版社，2018.8

ISBN 978-7-03-057955-3

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①贾… ②朴… Ⅲ. ①高等数字–高等学校–教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 131189 号

责任编辑：李淑丽 孙翠勤 / 责任校对：王 瑞
责任印制：霍 兵 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http：//www.sciencep.com

文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018 年 8 月第 一 版 开本：787 × 1092 1/16
2018 年 8 月第一次印刷 印张：24 3/4
字数：587 000

定价：66.00 元（全 2 册）

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

大学数学（包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计）是高等院校理工类、经管类、农林类与医药类等各专业的公共基础课程.本书的编者在多年教学实践的基础上，结合学科发展，根据高等院校经管类数学基础课程的最新教学大纲及考研大纲编写而成.考虑到经管类专业数学教学的目标和特点，在保证数学的严谨性、逻辑性的前提下，教材删除了一些不必要的推理论证过程，突出理论的应用，强化理论与实际的结合. 此外，本书配有电子教案和录屏课件，便于广大师生的教与学.

本套教材由贾丽丽、朴丽莎主编.参加编写的工作人员完成的章节内容如下：第一篇微积分部分：第 1 章、第 2 章、第 3 章、第 6 章、第 7 章、第 8 章由朴丽莎编写，第 4 章、第 5 章由贾丽丽编写；第二篇线性代数部分共三章由贾丽丽编写；第三篇概率统计部分：第 1 章、第 2 章、第 3 章由贾丽丽、林谦共同编写，第 4 章、第 5 章由邵晶晶编写.本套教材配套的电子教案与录屏课件由贾丽丽、朴丽莎、邵晶晶、陶辉共同完成.

本套教材是云南大学滇池学院精品课程建设项目成果之一. 在教材的编写过程中，得到了云南大学、云南大学滇池学院等高校专家和领导的大力帮助，并提出了许多宝贵的意见和建议，在此对他们表示由衷的感谢！

在此还要感谢滇池学院对我们工作的支持和帮助，感谢老一辈学者为我们所奠定的学科基础，也感谢他们的各类专著和相关材料为我们提供的素材；感谢所有曾经修读过这门课程的学生，让我们在教学相长中获得了有益的反馈.同时，也向所有直接或间接被我们引用的各类文献资料的作者，致以由衷的谢意和敬意.

限于我们的学识水平，教材有需进一步修改和补充的地方，敬请前辈、同行和广大读者批评指正.

编　者

2018 年 4 月

目　录

第一篇 微 积 分

第 1 章　函数、极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象. 极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法. 因此，掌握好极限方法是学好微积分的关键. 本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法，为今后的学习打下必要的基础.

1.1　函　　数

一、概念

1. 实数与区间

由于微积分中的函数是在实数范围内来讨论的，因此我们先简单介绍实数集的有关知识.

有理数和无理数统称为**实数**，实数的全体所构成的集合称为**实数集**，记为 $\mathbf{R}$. 数轴是一条有原点、有方向和单位长度的直线，如图 1-1 所示.

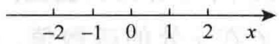

图 1-1

实数与数轴上的点是一一对应的. 此外，常用的实数集合还有区间，其定义如下：

定义 1.1　设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，定义

(1) 开区间 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$；

(2) 闭区间 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

(3) 半开、半闭区间 $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$， $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$；

(4) 无穷区间 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$，

$(-\infty,b]=\{x\mid -\infty<x\leqslant b\}$，　$(-\infty,b)=\{x\mid -\infty<x<b\}$，

$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\}$，　$(a,+\infty)=\{x\mid a<x<+\infty\}$.

通常，将开区间、闭区间、半开半闭区间和无穷区间统称为**区间**，并用 I 表示.

2. 邻域

在今后的讨论中，有时需要考虑由某点 x_0 附近的所有点构成的集合. 为此，引入邻域的概念.

定义 1.2　设 δ 为某个正数，称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为**点 x_0 的 δ 邻域**，x_0 为该邻域的**中心**，δ 为该邻域的**半径**，记作 $U(x_0,\delta)$ (图 1-2).

$$U(x_0,\delta)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}.$$

若把邻域 $U(x_0,\delta)$ 的中心 x_0 去掉，所得到的邻域称为**点 x_0 的去心 δ 邻域**，记为 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$ (图 1-3).

$$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)=\{x\mid x_0-\delta<x<x_0\}\cup\{x\mid x_0<x<x_0+\delta\}=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

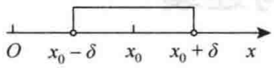

图 1-2

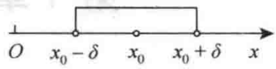

图 1-3

称开区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 为点 x_0 的左 δ 邻域, $(x_0,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的右 δ 邻域. 更一般地, 以 x_0 为中心的任何开区间均是点 x_0 的邻域, 当不需要特别辨明邻域的半径时, 简记为 $U(x_0)$.

3. 函数

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型. 本章我们先讨论两个变量的情形(多个变量的情形将在第 7 章介绍).

定义 1.3 设 D 是一个非空实数集, 如果按照某一确定的对应法则 f, 对于每一个 $x\in D$, 都有唯一确定的实数 y 与之对应, 则称对应法则 f 为定义在 D 上的函数, 记作

$$y=f(x),\ \ x\in D,$$

其中, x 称为**自变量**, y 称为**因变量**, D 称为函数的**定义域**, 也记作 D_f, $f(x)$ 称为函数 f 在 x 处的**函数值**, 全体函数值的集合, 称为函数的**值域**, 记作 R_f 或者 $f(D)$, 即 $R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D_f\}$.

关于函数的定义域, 在实际问题中应根据问题的实际意义具体确定. 如果讨论的是纯数学问题, 则往往取使函数的表达式有意义的一切实数所构成的集合作为该函数的定义域, 这种定义域又称为函数的**自然定义域**.

例如, 函数 $y=\ln(1-x^2)$ 的(自然)定义域为开区间 $(-1,1)$.

注意 由定义 1.3 知, 确定一个函数需要两个要素, 即定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域和对应法则都相同, 我们称这两个函数相同.

例 1 判断 $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是否为相同的函数.

解 $y=x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 而 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, 因此 $y=x$ 与 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是定义域不同的两个不同的函数(图 1-4 与图 1-5).

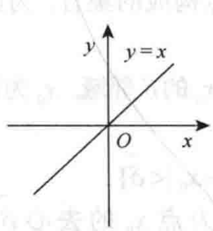

图 1-4

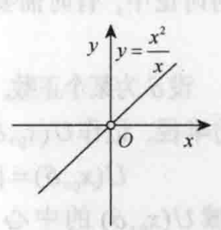

图 1-5

函数的常用表示法有三种：

(1) **表格法**　将自变量的值与对应的函数值列成表格的方法.

(2) **图像法**　在坐标系中用图形来表示函数关系的方法.

(3) **解析法**　将自变量和因变量之间的关系用数学表达式(又称为解析表达式)来表示的方法. 根据函数的解析表达式的形式不同，函数也可分为显函数、隐函数和分段函数三种.

(i) **显函数**　函数 y 由 x 的解析表达式直接表示. 例如 $y = x^2 + 2$.

(ii) **隐函数**　函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定. 例如，$Ax + By + C = 0$, $\ln y = \sin(x+y)$.

(iii) **分段函数**　函数在定义域的不同范围内，具有不同的解析表达式. 以下是几个分段函数的例子.

例 2　绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

定义域 $D = (-\infty, +\infty)$，值域 $R_f = [0, +\infty)$，如图 1-6 所示.

例 3　符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 其中 $x = 0$ 为分段点，值域 $R_f = \{-1, 0, 1\}$, 如图 1-7 所示.

例 4　取整函数

$$y = [x] = n, \quad n \leqslant x < n+1, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \cdots,$$

其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大正数, 显然有 $[x] \leqslant x < [x]+1$.

例如，$[2.6] = 2$, $[-2.4] = -3$. 易见，取整函数的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$ ，值域 $R_f = \mathbf{Z}$ ($\mathbf{Z}$ 是全体整数集)，如图 1-8 所示.

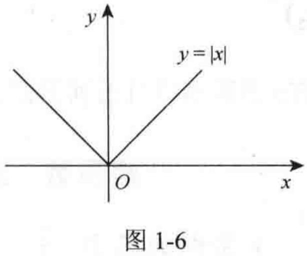

图 1-6

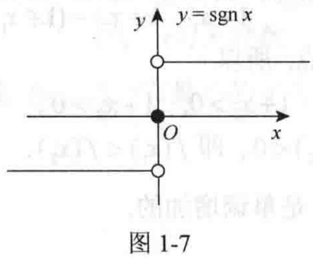

图 1-7

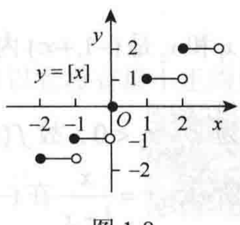

图 1-8

二、函数的性质

1. 有界性

定义 1.4　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在正数 M ，当 $x \in I$ 时，恒有 $|f(x)| \leqslant M$

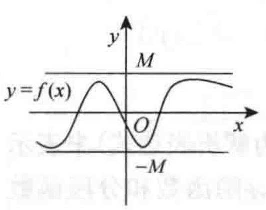

图 1-9

成立，则称函数 $f(x)$ 为区间 I 上的**有界函数**；如果不存在这样的正数 M，则称函数 $f(x)$ 为区间 I 上的**无界函数**. 如图 1-9 所示，有界函数 $y=f(x)$ 的图形夹在两条直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间.

例如，当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，恒有 $|\cos x|\leqslant 1$，所以 $f(x)=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界函数. 而 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是无界函数，有的函数可能在定义域内的某一部分有界，而在另一部分无界. 例如，$y=\ln(x-1)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 内无界，而在 $(2,3)$ 内有界. 因此，我们说一个函数是有界的还是无界的，应同时指出其自变量的相应范围.

2. 单调性

定义 1.5　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，对于任意的 $x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，有

(1) $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ (或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$)，则称 $f(x)$ 在 I 内**单调增加**(或**单调减少**)；

(2) $f(x_1)<f(x_2)$ (或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称 $f(x)$ 在 I 内**严格单调增加**(或**严格单调减少**).

例如，$y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内严格单调增加，如图 1-10 所示. 而 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内严格单调减少；在 $(0,+\infty)$ 内严格单调增加，但在整个定义域 **R** 内不是单调函数，如图 1-11 所示.

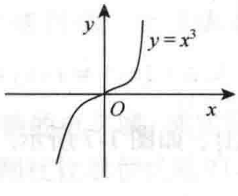

图 1-10

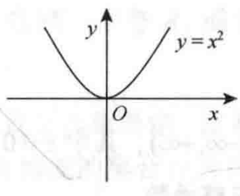

图 1-11

例 5　证明函数 $y=\dfrac{x}{1+x}$ 在 $(-1,+\infty)$ 内是单调增加的函数.

证　在 $(-1,+\infty)$ 内任取两点 x_1 和 x_2，且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+x_1}-\frac{x_2}{1+x_2}=\frac{x_1-x_2}{(1+x_1)(1+x_2)}.$$

因为 x_1 和 x_2 是 $(-1,+\infty)$ 内任意两点，所以

$$1+x_1>0,\quad 1+x_2>0,$$

又因为 $x_1-x_2<0$，故 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.

所以，$y=\dfrac{x}{1+x}$ 在 $(-1,+\infty)$ 内是单调增加的.

3. 奇偶性

定义 1.6　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，对于任意的 $x\in D$，有

(1) $f(x)=-f(-x)$，则称 $f(x)$ 为 D 内的**奇函数**；

(2) $f(x)=f(-x)$，则称 $f(x)$ 为 D 内的**偶函数**.

由定义 1.6 易知，奇函数的图像关于原点对称，而偶函数的图像关于 y 轴对称，例如，

$y=x^3$ 为奇函数(图 1-10)，$y=x^2$ 为偶函数(图 1-11)．$y=x^2+x$ 既不是奇函数也不是偶函数.

例 6　判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$；　　(2) $g(x)=\begin{cases}1-x, & x<0,\\ 1+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

解　(1) 因为函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且

$$f(-x)=\ln(\sqrt{(-x)^2+1}+x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=-\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=-f(x),$$

所以 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$ 是奇函数.

(2) 因为函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且

$$\begin{aligned}g(-x)&=\begin{cases}1-(-x), & -x<0,\\ 1+(-x), & -x\geqslant 0\end{cases}\\ &=\begin{cases}1+x, & x>0,\\ 1-x, & x\leqslant 0\end{cases}\\ &=g(x).\end{aligned}$$

所以 $g(x)$ 为偶函数.

4. 周期性

定义 1.7　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在常数 $T>0$，使得对任意的 $x\in D$ 都有 $x\pm T\in D$，且

$$f(x\pm T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的**周期**.

例如，$\sin x$，$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；$\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

通常周期函数的周期是指其**最小正周期**，但并非每个周期函数都有最小正周期. 如**狄利克雷函数**

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数},\end{cases}$$

易知任何正有理数都是它的周期，但显然没有最小的正有理数，所以它没有最小正周期.

三、反函数

1. 反函数的定义

定义 1.8　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f，值域为 R_f，如果对每个 $y\in R_f$，都有唯一的对应值 x 满足 $y=f(x)$，则称 x 是定义在 R_f 上以 y 为自变量的函数，记此函数为

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in R_f,$$

并称其为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**.

显然，$x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f(x)$ 互为反函数，且 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别是 $y=f(x)$ 的值域和定义域.

习惯上，常用 x 作自变量，y 作因变量，因此，$y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 常记为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in R_f$.

在平面直角坐标系下，函数 $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

由定义 1.8 知，函数 $y=f(x)$ 具有反函数的充要条件是自变量与因变量是一一对应的，因为严格单调函数具有这种性质，所以严格单调函数必有反函数.

2. 求反函数的步骤

(1) 从方程 $y=f(x)$ 中解出 x，得 $x=f^{-1}(y)$；

(2) 将所得的表达式中的 x 与 y 对换，即得 $y=f^{-1}(x)$. 最后写出定义域.

例 7　求 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数.

解　由 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 得 $e^{2x}-2ye^x-1=0$，将 e^x 看成新的变量 t，方程变为

$$t^2-2yt-1=0,$$

用求根公式得 $t=y\pm\sqrt{y^2+1}$，又 $t=e^x>0$, 故 $e^x=y+\sqrt{y^2+1}$，求得

$$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1}),$$

所以，$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数为 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

四、基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这五类函数称为**基本初等函数**. 由于在中学数学中，我们已经深入学习过这些函数，这里只作简要复习.

1. 幂函数

$y=x^{\mu}$，其中 μ 为实数，且 $\mu\neq0$，其定义域随 μ 的不同而相异. 当 $\mu=1,2,\dfrac{1}{2},-1$ 时，是最常用的幂函数(图 1-12).

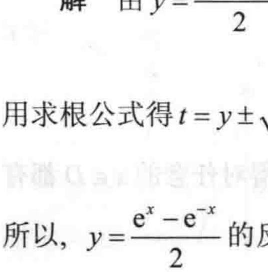

图 1-12

2. 指数函数

$y=a^x$（$a>0$，且 $a\neq1$），其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$.

当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 为严格单调减少函数；当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 为严格单调增加函数. 无论 a 为何值，$y=a^x$ 的图像均经过点 $(0,1)$ (图 1-13).

在实际问题中，常见以 e 为底的指数函数 $y=e^x$（$e=2.7182818\cdots$ 为无理数）.

3. 对数函数

$y=\log_a x$（$a>0$，且$a\neq1$），它是指数函数$y=a^x$的反函数. 其定义域为$(0,+\infty)$，值域为$(-\infty,+\infty)$.

当$0<a<1$时，$y=\log_a x$为严格单调减少函数，当$a>1$时，$y=\log_a x$为严格单调增加函数. 无论a为何值，函数$y=\log_a x$的图像均过点$(1,0)$（图1-14）.

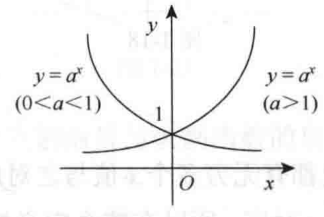

图1-13

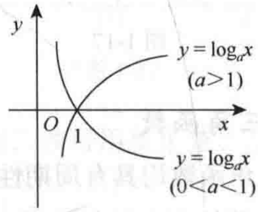

图1-14

通常以10为底的对数函数记为$y=\lg x$，称为**常用对数**，而以e为底的对数函数记为$y=\ln x$，称为**自然对数**.

4. 三角函数

常用的三角函数有：

(1) **正弦函数**$y=\sin x$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，是奇函数，且是以2π为周期的周期函数（图1-15）.

(2) **余弦函数**$y=\cos x$，定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$，是偶函数，且是以2π为周期的周期函数（图1-16）.

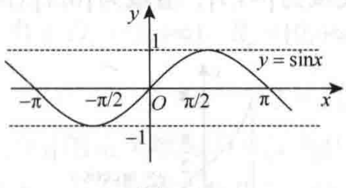

图1-15

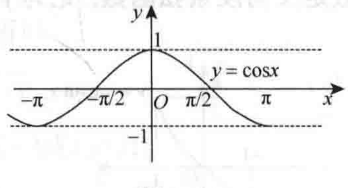

图1-16

(3) **正切函数**$y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，定义域为$D=\left\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\text{为整数}\right\}$，值域为$(-\infty,+\infty)$，是奇函数，且是以$\pi$为周期的周期函数（图1-17）.

(4) **余切函数**$y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$，定义域为$D=\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq k\pi,k\text{为整数}\}$，值域为$(-\infty,+\infty)$，是奇函数，且是以$\pi$为周期的周期函数（图1-18）.

此外，后续学习中，我们还会接触到**正割函数**$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$与**余割函数**$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$. 正割函数和余割函数都是以$2\pi$为周期的函数.

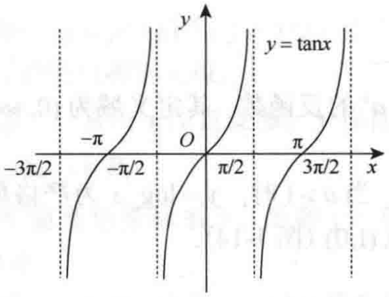

图 1-17

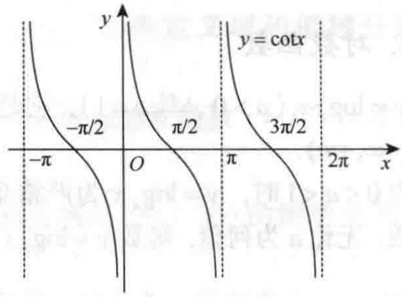

图 1-18

5. 反三角函数

由于三角函数均具有周期性，对值域中的任何 y 值都有无穷多个 x 值与之对应，这表明在三角函数的定义域与值域之间的对应关系不是一一对应，所以在整个定义域上三角函数不存在反函数，为了考虑它们的反函数，必须限制 x 的取值区间，使得三角函数在该区间上是严格单调的.

1) 反正弦函数 $y=\arcsin x$

正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上严格单调增加，值域为 $[-1,1]$，将 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的 $y=\sin x$ 的反函数定义为**反正弦函数**，记为 $y=\arcsin x$，其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ (图 1-19).

2) 反余弦函数 $y=\arccos x$

余弦函数 $y=\cos x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上严格单调减少，值域为 $[-1,1]$，将 $[0,\pi]$ 上的 $y=\cos x$ 的反函数定义为**反余弦函数**，记为 $y=\arccos x$，其定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$ (图 1-20).

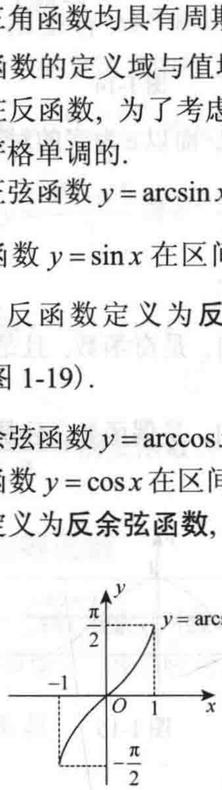

图 1-19

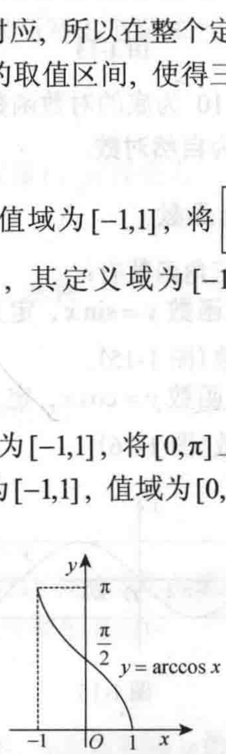

图 1-20

3) 反正切函数 $y=\arctan x$

正切函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内严格单调增加，值域为 $(-\infty,+\infty)$，将 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内的 $y=\tan x$ 的反函数定义为**反正切函数**，记为 $y=\arctan x$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ (图 1-21).

4) 反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$

余切函数 $y=\cot x$ 在 $(0,\pi)$ 内严格单调减少，值域为 $(-\infty,+\infty)$，将 $(0,\pi)$ 内的 $y=\cot x$

的反函数定义为**反余切函数**，记为 $y=\operatorname{arccot}x$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,\pi)$（图 1-22）.

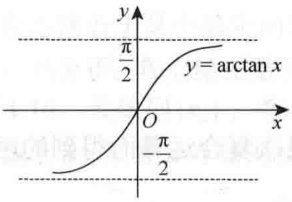

图 1-21

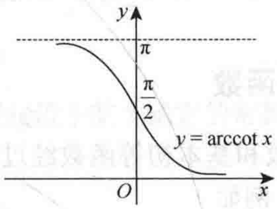

图 1-22

至于正割函数与余割函数的反函数无需专门定义，因二者可用反正弦、反余弦函数表示.

五、复合函数

定义 1.9　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，而函数 $u=g(x)$ 的值域为 R_g，若 $R_g\cap D_f\neq\varnothing$，则称函数 $y=f[g(x)]$ 是由 $u=g(x)$ 和 $y=f(u)$ 构成的**复合函数**，其中 x 为自变量，u 为中间变量，y 为因变量.

由复合函数的定义可知，不是任何两个函数都能复合成一个复合函数. 例如，函数

$$y=f(u)=\ln(u-2),\quad D_f=(2,+\infty),$$

$$u=g(x)=\cos^2 x,\quad R_g=[0,1],$$

由于 $R_g\cap D_f=\varnothing$，故这两个函数不能复合.

例 8　设 $y=f(u)=\sqrt{u-1}$，$u=g(x)=\lg(1+x^2)$，求 $y=f[g(x)]$ 及其定义域.

解　由于 $D_f=[1,+\infty)$，$R_g=[0,+\infty)$，$D_f\cap R_g\neq\varnothing$，所以

$$y=f[g(x)]=\sqrt{\lg(1+x^2)-1},$$

而 $y=f[g(x)]$ 的定义域为 $D=\{x\mid\lg(1+x^2)\geqslant 1\}=\{x\mid x\leqslant -3\text{或}x\geqslant 3\}$.

类似地，可以考虑三个及三个以上函数的复合函数.

例 9　设 $y=2^u$，$u=\ln v$，$v=\arccos t$，$t=\dfrac{1}{x}$，试将 y 表示为 x 的函数.

解　将上述各函数按顺序复合，得

$$y=2^{\ln\arccos\frac{1}{x}},\quad x\in(-\infty,-1]\cup(1,+\infty).$$

例 10　将下列函数分解成基本初等函数的复合.

(1) $y=\sqrt{\ln\cos x^2}$；　　(2) $y=\mathrm{e}^{\arcsin^2 x}$.

解　(1) 所给函数是由 $y=\sqrt{u}$，$u=\ln v$，$v=\cos t$，$t=x^2$ 四个函数复合而成的.

(2) 所给函数是由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=v^2$，$v=\arcsin x$ 三个函数复合而成的.

例 11　设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f[1+f(x)]$.