



中 国 传 统 经 济  
数 学 要 籍 解 题

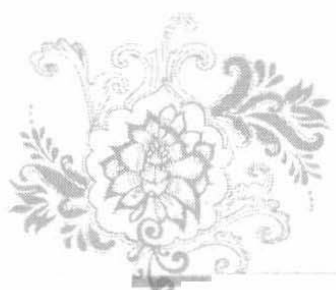
吕变庭 马晴晴 吴常富/著

 科学出版社

本书系国家社科基金重点项目“中国传统科学技术思想通史”(15AZD038)的阶段性成果  
本书由教育部省属高校人文社科重点研究基地——河北大学宋史研究中心基地建设经费  
河北大学历史学强势特色学科建设经费  
河北大学中国史学科“双一流”建设经费资助出版

# 中国传统经济数学要籍解题

吕变庭 马晴晴 吴常富/著



科学出版社  
北京

## 内 容 简 介

中国传统经济数学是一个较新的研究领域，大多数读者对它还比较陌生，本书以《中国科学技术典籍通汇·数学卷》为主要依据，对中国现存的 40 种传统数学典籍中的经济数学问题，即农业经济数学、手工业经济数学、工程经济数学、财政经济数学、金融经济数学、贸易经济数学及军事经济数学 7 个部分进行了简要介绍，以期管窥中国传统经济数学发展历史的基本面貌，从而对中国传统经济数学这门学科有一个粗浅，但又较为清晰的认识。

本书可供学习中国经济史与中国科技史的广大师生阅读和参考。

### 图书在版编目 ( CIP ) 数据

中国传统经济数学要籍解题 / 吕变庭，马晴晴，吴常富 著. —北京：科学出版社，2018.8

ISBN 978-7-03-058652-0

I. ①中… II. ①吕… ②马… ③吴… III. ①经济数学-中国-题解  
IV. ①F224-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 197240 号

责任编辑：王 媛 赵云杰 / 责任校对：何艳萍

责任印制：张克忠 / 整体设计：黄华斌

联系电话：010-64011837

E-mail: Yangjing@mail.sciencep.com

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

<http://www.sciencep.com>

三河市荣展印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2018 年 8 月第 一 版 开本：720×1000 1/16

2018 年 8 月第一次印刷 印张：10

字数：157 000

定价：79.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

# 前 言

经济数学是一门经济学和数学相互交叉的新学科，它的基本内涵是研究数学在经济学中的应用，以及对经济学中提出的各种数学问题进行探究。而中国古代的“经济”概念有其特殊含义，它与古希腊以“家庭管理”为内容的经济概念不同，中国古代的“经济”是指经世济民，即把经济作为以国家的物质生产活动为主体的社会行为，因此中国古代经济的内容不仅包括财政、经济，而且广泛涉及政治、法律、军事和教育等学科领域，所以在古人的观念中，数学应是解决现实生活问题的一种工具。

在国外，英国经济学家威廉·配第爵士在 17 世纪中叶出版的《政治算术》一书中，首次明确提出用“数字、重量和尺度”来解释经济现象的观点，并从中理出了一些规则和方法。1838 年，法国经济学家奥古斯丹·古诺发表了《财富理论的数学原理的研究》，开始用数学模型来解释经济活动，标志着经济数学这门学科的诞生。之后效仿者不断增多，今天经济数学已发展成为一门国际显学。当然，仅从利用数学工具来描述和解释经济现象这个角度分析，经济数学产生与发展的历史确实十分悠久，甚至连威廉·配第的追随者达文南特也承认，威廉·配第只是给这门古老的学问起了个名字。史学界公认，古希腊杰出的历史学家色诺芬就曾借助数学工具来分析市场流通规律，并从中揭示财富增长过程中的各种数量关系，故此，色诺芬的研究工作被视为西方经济数学的肇始。而在我国，人们将数量方法应用于经济管理，

起源亦甚早，至少秦汉之际的《算数书》和汉代的《九章算术》就已开先河。日本学者小仓金之助在 1933 年完成了他的博士学位论文《中国数学中度量衡的社会性——在古书中看到的秦汉时代的社会状态》，这是国外学者研究中国古代经济数学的拓荒之作。可惜，自小仓金之助之后，国外的同类研究论著就非常少见了。

敦煌算书在民国时期已经散落到世界各地，而日本学者不仅设法获得了这些珍贵数学史料，并且率先对其中的社会经济内容进行了整理和研究，如石滨纯太郎主编的《敦煌吐鲁番社会经济资料（上、下）》等。

日本学者大川俊隆对《算数书》的研究，成绩比较突出，先后发表了《张家山汉简〈算数书〉“饮漆”解》等论文，其对《算数书》中的经济数学内容作了独特阐释。另外，日本学者马彪对《算数书》中的“方田”内容也颇有心得，已发表《〈算数书〉之“益栗”“与田”考——从〈龙岗秦简〉到〈张家山汉简〉的考察》一文。

我国最早把西方经济数学介绍到国内来的学者是唐庆增，他在 1926 年《科学》杂志上发表了《经济学中之算术学派》一文，在他看来，意大利的西伐应为“用算法讨论经济问题之最早者”。然而，由于当时举国上下大兴西学，传统文化遭到冷落，我国学者直到 20 世纪 60 年代才开始关注对中国古代经济数学的研究，至 20 世纪 80 年代对中国古代经济数学的研究才逐渐进入繁荣发展期。

就当时的学术影响而言，尤以宋杰和李迪两位先生的研究成果为著。其中，宋杰在《北京师院学报（社会科学版）》（1983 年第 2 期）、《自然辩证法通讯》（1984 年第 5 期）及《北京师院学报（社会科学版）》（1987 年第 2 期）连续发表了《〈九章算术〉记载的汉代“程耕”》《〈九章算术〉在社会经济方面的史料价值》《〈九章算术〉所反映的汉代交通状况》3 篇论文，在国内学界产生了巨大反响。李迪则在吴文俊院士主编的《秦九韶与〈数书九章〉》一书中发表了《〈数书九章〉中的统计资料》《〈数书九章〉与南宋社会经济》2 篇论文。宋杰在前面研究成果的基础上出版了《〈九章算术〉与汉

代社会经济》一书，这是中国古代经济数学史领域的第一部学术专著。此后，为了加快中国经济数学史的研究步伐，以与我国正在勃兴的计量经济学发展局面相适应，许多书刊都开始积极推出有关中国经济数学史方面的研究成果，其代表作有：李孝林的《〈九章算术〉经济问题再探索》及《张家山汉简〈算数书〉经济史料价值探索》、王子今的《〈九章算术〉汉代交通史料研究》、曾雄生的《〈数书九章〉与农学》、金虎俊的《〈九章算术〉和〈谢察微算经〉中的经济数学问题在朝鲜半岛的传播》、吕兴焕的《〈数书九章〉与南宋社会经济》、叶玉英的《论张家山汉简〈算数书〉的经济史料价值》、刘艳的《张家山汉简〈算数书〉所见社会经济生活问题考察》等。可以说，以上成果从不同角度对《算数书》《九章算术》《谢察微算经》《杨辉算法》《数书九章》中的经济数学问题进行了独创性的探索，阐述了不少富有启发性的观点，基本上能够反映我国经济数学史的研究现状和学术水平。尤其是经过几十年的积累和发展，目前我国已经形成了初具规模和各具特色的经济数学史研究。

笔者分了七个主要学术领域对经济数学史研究状况略加梳理，即军事经济数学史、农业经济数学史、金融经济数学史、贸易经济数学史、财政经济数学史、手工业经济数学史、工程经济数学史。当然，有些学术论著不是分门别类地去研究中国古代经济数学发展的历史，而是用整体思维来把握每部数学典籍的经济学价值。如前揭叶玉英《论张家山汉简〈算数书〉的经济史料价值》一文结合其他材料讨论了《算数书》中物价、关税、合资、利息、亩产与地租等社会经济问题。

综合学界已有的研究成果，我们不难看出，学界同仁从不同角度和侧面阐释了《算数书》《九章算术》《五曹算经》等数学典籍中有关社会经济的丰富内容。裒合诸家，述以己见，这些成果不仅有他们对中国经济数学史诸多应用成果的经验总结，更有他们对中国经济数学史研究本身所存在“缺陷”的批评和反思。所以，无论是广度还是深度，前人成果在研究视野、史料挖掘、思维向度、知识集约等方面都有新的拓展和创获，并为后人站在更高层

面去研究中国经济数学史奠定了坚实的理论基础。

当然，本书仅仅是对专业数学典籍中经济数学问题的梳理，至于非严格意义上的数学典籍中的经济数学问题，本书暂不列入。由于各种原因，书中难免存在不足和疏漏之处，敬请读者批评指正。

吕变庭

2018年7月15日

# 目 录

|              |     |
|--------------|-----|
| 前言           | i   |
| 一 张家山汉简《算数书》 | 001 |
| 二 刘徽注《九章算术》  | 005 |
| 三 《海岛算经》     | 008 |
| 四 《孙子算经》     | 012 |
| 五 《张丘建算经》    | 015 |
| 六 《五曹算经》     | 018 |
| 七 《缉古算经》     | 020 |
| 八 《夏侯阳算经》    | 024 |
| 九 《梦溪笔谈》     | 026 |
| 十 《河防通议》     | 031 |
| 十一 《数书九章》    | 034 |
| 十二 《测圆海镜》    | 038 |
| 十三 《益古演段》    | 041 |
| 十四 《杨辉算法》    | 044 |
| 十五 《算学启蒙》    | 048 |
| 十六 《四元玉鉴》    | 051 |
| 十七 《透帘细草》    | 054 |

|     |            |     |
|-----|------------|-----|
| 十八  | 《丁巨算法》     | 056 |
| 十九  | 《算法全能集》    | 058 |
| 二十  | 《详明算法》     | 060 |
| 二十一 | 《永乐大典算法》   | 062 |
| 二十二 | 《诸家算法及序记》  | 064 |
| 二十三 | 《九章算法比类大全》 | 066 |
| 二十四 | 《算学宝鉴》     | 071 |
| 二十五 | 《勾股算术》     | 075 |
| 二十六 | 《弧矢算术》     | 077 |
| 二十七 | 《盘珠算法》     | 079 |
| 二十八 | 《数学通轨》     | 081 |
| 二十九 | 《算法统宗》     | 083 |
| 三十  | 《算法指南》     | 086 |
| 三十一 | 《天下郡国利病书》  | 089 |
| 三十二 | 《数理精蕴》     | 093 |
| 三十三 | 《同文算指》     | 096 |
| 三十四 | 《欧逻巴西镜录》   | 099 |
| 三十五 | 《方程论》      | 101 |
| 三十六 | 《缉古算经考注》   | 103 |
| 三十七 | 《九章算术细草图说》 | 105 |
| 三十八 | 《艺游录》      | 107 |
| 三十九 | 《求一术通解》    | 109 |
| 四十  | 《四元玉鉴细草》   | 113 |
| 附录  | 算题分类       | 116 |

## 一 张家山汉简《算数书》

1983 年，湖北张家山三座西汉古墓出土了大批竹简，主要包括《二年律令》《奏谳书》《算数书》《脉书》《引书》《盖庐》《历谱》《遣策》等 8 种古文献资料。其中《算数书》现存竹简 190 枚，简长 29.6 至 30.2 厘米，宽 6 至 7 毫米，3 道编绳，约 7000 字，用墨书写在每枚竹简正面两竹节之间，首尾分为 68 个段落，每个段落有一个小标题，计有 69 道算题，题名之下一般有例题、答案和术，大多属于具体的经济生活问题，详见表 1，而大部分算题的形成年代当在秦代，甚至更早。该书原本有书题，其“算数书”三字就抄写在书首第 6 简的简背，其年代当在公元前 186 年之前。

表 1 《算数书》中的问题分类<sup>①</sup>

| 算题性质    | 涉及内容                     | 《算数书》算题                       |
|---------|--------------------------|-------------------------------|
| 分数的四则运算 | 分数的四则运算，大整数的乘法           | 相乘，分乘，乘，增减分，分当半者，分半者，约分，合分，径分 |
| 一般经济生活  | 金重，出资比例，金价，铸铜，箭，漆，盐，金钱，米 | 出金，共买材，金贾，铜耗，羽矢，漆钱，贾盐，分钱，米出钱  |
| 税收计算    | 关税                       | 狐出关，狐皮，负米                     |
|         | 田租计算及修正                  | 税田，取程，耗租，误券，租吴券               |
|         | 麻田租税                     | 取泉程                           |
|         | 多种谷物田租分配                 | 并租                            |
| 农田管理    | 田地广、从计算                  | 启广，启从                         |
|         | 田地面积计算                   | 少广，大广，方田，里田                   |

<sup>①</sup> 吴朝阳：《张家山汉简〈算数书〉校证及相关研究》，南京：江苏人民出版社，2014 年，第 221—222 页。

续表

| 算题性质      | 涉及内容      | 《算数书》算题               |
|-----------|-----------|-----------------------|
| 田税收取、官禀发放 | 谷物换算      | 程禾，稗毁，粟为米，粟求米，粟求米，米求粟 |
|           | 换算公式应用    | 米粟并，粟米并               |
| 制造业管理     | 制炭        | 负炭                    |
|           | 竹编        | 卢唐                    |
|           | 造箭        | 羽矢                    |
|           | 食品制造      | 挈脂                    |
|           | 竹简制造      | 程竹                    |
|           | 禀漆差额计算    | 饮漆                    |
| 工程管理      | 土方工程体积    | 除，斩都，刳，畹亭，并材          |
|           | 谷堆体积      | 旋粟，困盖                 |
|           | 方形木材加工    | 以畹材方，以方材畹             |
|           | 木材直径测算    | 畹材                    |
| 其他管理      | 官禀差额计算    | 舂粟                    |
|           | 传马饲料分配    | 传马                    |
|           | 超幅宽布帛价值计算 | 缙幅                    |
|           | 借贷利息计算    | 息钱                    |
|           | 医生考核      | 医                     |
|           | 单位换算      | 石率，丝练                 |
|           | 谷物损耗      | 耗                     |
|           | 行程计算      | 行                     |
| 趣味数学题     | 纺织        | 女织，妇织                 |

《算数书》比《九章算术》要早至少 150 年，然据表 1 二者间相似的内容较多，故存在着明显的继承关系，且都具有明显的重经济和实用的特点，遂成为引领中国传统经济数学向前发展的航标。不过，从体例上看，《算数书》的分类远没有《九章算术》那样系统和完整。

由于数学是古代官吏必备的行政计算能力，所以《算数书》中涉及的经济管理数学问题就比较多，而每道算题基本上都是按照“题—答—术”的模式，主要是方便各地基层官吏的学习和应用。下面是《算数书》中有关比例的实际应用算题。

第 11 题：共同买木材（共买材）。

- 第 12 题：狐皮等出关的关税（狐出关）。
- 第 13 题：与第 12 题相类似（狐皮）。
- 第 14 题：四个或更多的数依次成比例地计算关税（负米）。
- 第 15 题：妇女的织布量（女织）。
- 第 16 题：合并一起计算租金（并租）。
- 第 17 题：黄金价钱（金价）。
- 第 18 题：舂粟米的损耗量（舂粟）。
- 第 19 题：铸铜时的损耗量（铜耗）。
- 第 20 题：驿站用马匹的刍料供应（传马）。
- 第 21 题：三妇女织布（妇织）。
- 第 22 题：给箭竿尾部装羽毛（羽矢）。
- 第 23 题：买漆的钱（漆钱）。
- 第 24 题：缙布幅宽（缙幅）。
- 第 25 题：利息钱（息钱）。
- 第 26 题：向盛储生漆的容器里注水（饮漆）。
- 第 27 题：田地租税（税田）。
- 第 28 题：用竹子量计的标准数值（程竹）。
- 第 29 题：医生考核（医）。
- 第 30 题：用石来运算（石率）。
- 第 31 题：售盐（贾盐）。
- 第 32 题：清水煮沸脱去丝胶的熟丝（丝练）。
- 第 33 题：揉制米糕（拏脂）。
- 第 34 题：运输距离（取程）。
- 第 35 题：稻禾的湿种折算成干种或损耗的计算（秬租）。
- 第 36 题：粮食互换比例的规定（程禾）。
- 第 37 题：粗麻的湿种折算成干种或损耗的计算（取枲程）。
- 第 38 题：租券所列租数与应收数有误（误券）。

第 39 题：因租券误书而引出的计算（租吴券）。

第 40 题：两种精细程度不同的米（稗毁）。

第 41 题：损耗（耗）。

第 42 题：粟与米的换算（粟为米）。

第 43 题：同第 42 题（粟求米）。

第 44 题：同第 42 题（粟求米）。

第 45 题：米与粟的换算（米求粟）。

第 46 题：两种粮食混合后按照比例应各取若干的换算（米粟并）。

第 47 题：同第 46 题（米粟并）。

第 48 题：背着木炭（负炭）。

由此可见，《算数书》中的比例算题约占全书内容的二分之一，涵盖了现代数学中的所有比例算题，它体现了汉代租税计算的复杂性和普遍性。而儒家把算数作为“六艺”之一，其主要目的就是满足各地基层官吏日常征收赋税的实际需要，这与古希腊的学园式数学研究取向大不相同。因此，有学者评论说：“公元前 3 世纪，柏拉图在雅典建立学派，创办学园。他非常重视数学，但片面强调数学在训练智力方面的作用，而忽视其实用价值。他主张通过几何的学习培养逻辑思维能力，因为几何能给人以强烈的直观印象，将抽象的逻辑规律体现在具体的图形之中。”<sup>①</sup>

① 高文君编著：《高等数学》，郑州：郑州大学出版社，2006 年，第 40 页。

## 二 刘徽注《九章算术》

《九章算术》(图1)是中国古代重要的数学经典,历来被视为算经之首。传本《九章算术》集《九章算术》文本、晋刘徽注、唐初李淳风注释三种内容于一体。该书原分为九卷,分别为《方田》《粟米》《衰分》《少广》《商功》《均输》《盈不足》《方程》《勾股》,其中涉及农业、工程、贸易的算题最多,农业74问、工程39问、贸易54问,财政、手工业涉及较少,分别为12问和8问,军事仅以一题带过,金融则没有涉及。

《方田》章涉及农业经济问题的算题有24问,主要是关于田亩的计算,田亩的类型包括圭田、斜田、圆田、孤田、环田等;涉及贸易经济问题的算题有2问,是关于钱币的差额分配。

《粟米》章涉及农业经济问题的算题有25问,主要是以粟换米、日常生活的食用等;涉及贸易经济问题的算题有21问,主要是以物易物、以钱易物。

《衰分》章涉及农业经济问题的算题有4问,其中一问涉及农业赔偿问题,例题为:“今有牛、马、羊食人苗。苗主责之粟五斗。羊主曰:‘我羊食半马。’马主曰:‘我马食半牛。’今欲衰偿之,问各出几何?”<sup>①</sup>涉及贸易经济问题的算题有7问,主要是以钱易丝、布等纺织品,田亩收租等;涉及手工业经济问题的算题有4问,主要是手工织布、手工制造耗损等;涉及财政经济问题的算题有5问,主要是仕人的赏赐、关税等。

<sup>①</sup> (晋)刘徽注,(唐)李淳风注释:《九章算式》卷3《衰分》,郭书春主编:《中国科学技术典籍通汇·数学卷》,郑州:河南教育出版社,1993年,第一册,第121页。

## 九章算術卷一

唐 晉  
李 劉  
淳 徽  
風 注  
注 釋

方田以御田疇界域

今有田廣十五步，從十六步，問爲田幾何？答曰：一畝。

又有田廣十二步，從十四步，問爲田幾何？答曰：一百六十八步。

方田術曰：廣從步數相乘，得積步。

此積爲田畝，凡廣從相乘，謂之畝。

淳風等按：經云廣從相乘得積步，注云廣從相乘謂之畝，觀斯注意，積畝義同，以理推之，固當不爾。何則？畝是方面單布之名，積乃衆數聚居之稱，循名責實，二者全殊，雖欲同之，竊恐不可。今以凡言畝者，據廣從之一方，其言積者，舉衆步之都數，經云相乘得積步，卽是都數之明文，注云謂之爲畝，全乖積步之本意。此注前云積爲田畝，於理得通，復云謂之爲畝，繁而不當。今者注釋，存善去非，略爲科簡，遺諸後學。

以畝法二百四十步除之，卽畝數，百畝爲一頃。

九章算術 卷一

一

图1 《九章算术》局部（中华书局，1985年版）

《少广》章涉及农业经济问题的算题有 11 问，主要是关于田亩的计算。

《商功》章涉及工程经济问题的算题有 31 问，主要是方亭、圆亭、堤坝、城池、堑堵、阳马等建筑、工程的计算。

《均输》章涉及农业经济问题的算题有 1 问，是田地的耕种；涉及手工业经济问题的算题有 1 问，是手工制造；涉及财政经济问题的算题有 7 问，

主要是国家雇用工人、关税和普通税收等；涉及贸易经济问题的算题有 6 问，主要是以物易物、以钱易物、钱币的等额分配等；涉及军事经济问题的算题有 1 问，是武器制造。

《盈不足》章涉及手工业经济问题的算题有 1 问，是粮食的加工；涉及贸易经济问题的算题有 12 问，主要是经营盈利、以物易物、以钱易物等。

《方程》章涉及农业经济问题的算题有 9 问，主要是农作物的贮存、农产品的日常食用；涉及工程经济问题的算题有 1 问，是水井的建造；涉及贸易经济问题的算题有 6 问，主要是以钱易物等。

《勾股》章涉及手工业经济问题的算题有 2 问，主要是木材制作；涉及工程经济问题的算题有 7 问，主要是水井的建造、城邑的大小、户高等。

### 三 《海岛算经》

《海岛算经》<sup>①</sup>（图2）一卷原为刘徽注《九章算术》的最后一卷，题为《重差》，因第一题是测量海岛的高和远而得名。惜从宋至明，其书“已世无传本”。现存的文本是由戴震从《永乐大典》中辑录出来的九个问题订成的。其第一题“测望海岛”，第二题“测望山上松高”，第三题“南望方邑”，第四题“俯测深谷”，第五题“登山望楼”，第六题“遥望波口”，第七题“下望深渊”，第八题“登山望津”，第九题“登山临邑、测邑广长”。可见，书中九道题全是利用测量来计算高深广远的问题。当然，它们也都间接属于工程测量的应用算题。

例如：

第1题：“今有望海岛，立两表，齐高三丈，前后相去千步，令后表与前表参相直。从前表却行一百二十三步，人目着地取望岛峰，与表末参合。从后表却行一百二十七步，人目着地取望岛峰，亦与表末参合。问岛高及去表各几何？答曰：岛高四里五十五步；去表一百二里一百五十步。术曰：以表高乘表间为实；相多为法，除之。所得加表高，即得岛高。求前表去岛远近者：以前表却行乘表间为实；相多为法。除之，得岛去表数。”<sup>②</sup>（图3）

按：汉代1里等于300步，1步等于6尺计算，则有

- 
- ① 刘徽注《九章算术》在“缀于勾股之下”附有一卷《重差》，因该卷是对《九章算术》体系的补充，具有一定的独立性，所以唐代李淳风在编的《算经十书》时将其单独成书，并改名为《海岛算经》。
- ② （晋）刘徽撰，（唐）李淳风注：《海岛算经》，郭书春主编：《中国科学技术典籍通汇·数学卷》，第一册，第218页。