

塑性力学引论（第二版）

李 铀 著



科学出版社

塑性力学引论

(第二版)

李 铀 著

科学出版社

北京

版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229,010-64034315,13501151303

内 容 简 介

工程结构或构筑物在受载过程中,常有局部或整体应力超出弹性范围进入塑性状态的情况.塑性力学就是专门研究材料进入塑性状态后应力分布规律的一门科学.但船体塑性力学理论(增量理论和全量理论)发展与应用面临很大困难.本书引入了新型本构关系——弹性应变与塑性应变相互关系,重点介绍了作者在塑性力学理论和应用研究方面取得的重大进展——弹塑性折线理论及其应用成果.

本书在第一版的基础上增补了新的研究成果,全书共分10章,内容包括:绪论,笛卡儿坐标张量简介,应力分析,应变分析,本构关系,屈服条件、加载条件与加卸载准则,塑性力学问题的求解方法,塑性力学传统方法存在的问题与解答分析,弹塑性折线理论的重要结论与典型问题解答,工程应用专题——圆形巷道应力场与相关问题.

本书可供力学、土建结构、船舶、航空、金属加工、机械等专业师生及相关科技人员学习和参考.

图书在版编目(CIP)数据

塑性力学引论/李铨著.—2版.—北京:科学出版社,2018.8

ISBN 978-7-03-058109-9

I. ①塑… II. ①李… III. ①塑性力学 IV. ①O344

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第134210号

责任编辑:冯贵层 王 晶/责任校对:董艳辉

责任印制:彭 超/封面设计:彬 峰

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本:787×1092 1/16

2018年8月第一版 印张:12 3/4

2018年8月第一次印刷 字数:295 000

定价:48.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

第二版前言

本书第一版出版发行后,相关研究又取得了一些新进展.修订出版第二版的目的在于补充介绍这些新进展.补充的主要内容有:

(1) 第5章5.6节补充了材料强度判据研究新成果.

(2) 第一版中第9章9.1节“杆系结构的弹塑性分析”不是应用弹塑性折线理论的基本方程组求解的,最新成果可完全依据弹塑性折线理论的基本方程组进行求解,所示重写了该节,并在本书中调整为9.6节.

(3) 增加了第10章“工程应用专题——圆形巷道应力场与相关问题”.

第二版还进行一些调整与修正,主要有:

(1) 塑性力学理论新体系统一了弹性力学与塑性力学的基本方程组,也能用于求解弹性力学问题,参考传统塑性力学增量理论和全量理论的命名方法,本书将其命名为弹塑性折线理论.

(2) 调整了第一版一些章节的顺序:第一版第7章7.4节部分内容调至本书第8章8.8节;第一版第9章9.4~9.7节调整为本书的9.2~9.5节.

(3) 修正了第一版的一些笔误.

此外,感谢国家自然科学基金项目(51474251)、湖北省科技计划(2014SK3226)、“十二五”国家科技支撑计划(2012BAF14B05)等项目对本书出版与研究工作的支持,也感谢饶秋华教授、黄云林教授、郭少华教授、刘静副教授等同事们的支持与有益讨论.

李 铀

2018年4月于长沙

第一版前言

物体受力后会产生变形,受力较大时会产生不可恢复的变形——塑性变形,研究产生塑性变形时的物体力学响应特性,这包括物体的应力、应变和位移规律,是工程实践迫切需要解决的问题,这也就是塑性力学拟解决的问题。

一般认为,塑性力学理论的研究起源于1864年法国科学家特雷斯卡(Tresca)提出的最大剪应力屈服准则,至今已经历了一百多年的发展历程。在这一百多年的历程中研究人员取得了很多成果,例如逐渐形成了本书将介绍的传统塑性力学理论。传统塑性力学理论从形式上看是完善的,但实际上由于理论的方程组求解复杂且方程中包含有难以确定的东西,其解决实际问题的能力深受限制。初学者包括作者本人在最初学习传统塑性力学时,大多感觉它假设多、逻辑性不强、难学,已没有了弹性力学所具有的数学上的完美性。因此另辟蹊径,促进塑性力学的发展已形成共识。

作者自1984年开始学习传统塑性力学起,就致力于塑性力学理论的研究。1986年在第一次全国塑性力学会议上宣读了第一篇论文《材料弹性变形与塑性变形相互关系的探讨》,引进了本构关系研究的一个全新方向(该文后发表在《岩土力学》杂志1988年第3期上);1991年在中国科学院武汉岩土力学研究所学术年会上正式提出了塑性力学问题的一种新的求解方法(论文刊登在《岩土力学》杂志1992年第2/3期上)。塑性力学问题求解新方法的重要特点是,新方法的基本方程组也能用于求解弹性力学问题,它使弹性力学理论与塑性力学理论的求解基本方程融为了一体,形成了统一的形式。由于新方法融合吸收了弹性力学的成熟理论,其求解过程比传统理论简洁,逻辑性也强,能求解一些传统理论难以求解的问题,使塑性力学理论及其应用取得了重大进展。

本书重点在于介绍作者建立的塑性力学问题求解新方法及其应用成果(个别内容为首次发表),为使读者较全面地了解塑性力学理论并方便比较新方法和传统理论方法,也介绍了传统塑性力学理论。传统塑性力学理论这一部分系参考后列有关参考书籍写作而成,在此就不对原书作者一一致谢了。

特别感谢中国科学院武汉岩土力学研究所所级科技计划项目(1991年(计)字第7号)、湖南省自然科学基金(04JJ6002)、湖南省科技计划项目(2007FJ3072)和中南大学科学研究基金(No. 76163)对塑性力学新方法研究的资助。

衷心感谢中南大学研究生教育创新工程教材建设基金和中南大学土木建筑学院教材建设基金对本书出版的资助。

感谢陈至达教授、朱维申研究员、白世伟研究员、陈守义研究员在研究工作中给予的鼓励与支持。

感谢彭意高级工程师、叶梅新教授对本书写作的支持。

李 铀
2008年7月



李 铀 1961年7月生,籍贯:湖南临湘。现任中南大学土木工程学院教授、博士生导师、注册土木工程师(岩土)、中国岩石力学与工程学会地下工程分会常务理事、湖南省力学学会理事。分别在山东矿业学院、中国矿业大学(北京)研究生部和中国科学院研究生院获矿井建设学士学位、工程力学硕士学位和固体力学博士学位,曾赴美国田纳西大学进修(高级访问学者)。1982~1984年就职于山东省兖州矿务局兴隆庄煤矿,1986~2003年工作于中国科学院武汉岩土力学研究所,2003年9月开始作为高层次人才引进任职于中南大学土木工程学院。主要从事弹塑性力学、岩土力学与工程等方面的研究与教学工作,建立了弹塑性折线理论,发展了边坡稳定分析的最小势能方法,研发了一种适用于软岩大变形支护的新型可伸长锚杆,发表论文70余篇。

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 塑性力学的任务	1
1.2 塑性力学的发展简况	2
1.3 塑性力学的基本假定	3
第 2 章 笛卡儿坐标张量简介	5
2.1 预备知识	5
2.2 张量	7
2.3 张量的代数运算	9
2.4 张量识别定理	13
2.5 张量的微分运算	14
第 3 章 应力分析	16
3.1 基本概念	16
3.2 一点的应力状态与应力张量	17
3.3 任意斜截面上的应力	19
3.4 主应力及应力(张量)不变量	19
3.5 最大、最小正应力和最大剪应力	21
3.6 偏应力张量及其不变量	23
3.7 平衡方程	25
第 4 章 应变分析	27
4.1 位移和应变	27
4.2 坐标变换	30
4.3 一点的应变状态	32
4.4 主应变和应变不变量	34
4.5 变形协调方程	35
4.6 偏应变及其不变量	37

第 5 章 本构关系	38
5.1 概述	38
5.2 基本实验结果	38
5.3 弹塑性变形的物理基础	45
5.4 应力应变本构关系	48
5.5 弹性应变与塑性应变之间的关系	55
5.6 依据弹性应变和塑性应变相互关系导出的强度判据	66
第 6 章 屈服条件、加载条件与加卸载准则	69
6.1 一维问题的屈服条件、加载条件与加卸载准则	69
6.2 复杂应力状态的屈服条件	70
6.3 几个常用的屈服条件	74
6.4 屈服条件的实验验证	79
6.5 复杂应力状态的加载条件与加卸载准则	83
第 7 章 塑性力学问题的求解方法	88
7.1 塑性力学问题的求解基本方程组	88
7.2 塑性力学问题求解的传统理论方法	89
7.3 塑性力学问题求解的新方法——弹塑性折线理论	95
7.4 弹塑性问题基本定理	108
第 8 章 塑性力学传统方法存在的问题与解答分析	111
8.1 塑性力学传统方法存在的问题	111
8.2 简单桁架的弹塑性分析	113
8.3 加载路径对简单桁架应力应变状态的影响	116
8.4 几何非线性的影响	120
8.5 矩形截面梁的弹塑性弯曲	121
8.6 理想弹塑性材料厚壁圆柱筒的弹塑性分析	127
8.7 塑性平面应变问题的近似求解方法	135
8.8 理想刚塑性体极限分析与上、下限定理	138
第 9 章 弹塑性折线理论的重要结论与典型问题解答	141
9.1 引言	141
9.2 两类边界条件下弹塑性应力场的重要结论	141

9.3 残余应力问题	143
9.4 断裂力学中的应力强度因子问题	144
9.5 弹塑性问题应力场表达式与弹性模量的关系	147
9.6 杆系结构弹塑性分析	149
9.7 弹塑性纯弯曲梁的求解	163
9.8 半空间体在水平边界上受均布压力	167
9.9 塑性力学问题的一种近似解法	171
第 10 章 工程应用专题——圆形巷道应力场与相关问题	175
10.1 引言	175
10.2 圆形巷道围岩弹塑性应力场已有结果与问题分析	175
10.3 基于弹塑性折线理论的圆形巷道弹塑性应力场解析解	177
10.4 基于弹塑性折线理论的圆形巷道弹塑性应力场数值解	178
10.5 圆形巷道破损区估算	184
10.6 地层残余强度、支护设计压力与破损区近似关系	185
10.7 圆形巷道围岩应力扰动区	188
参考文献	191

第1章 绪 论

1.1 塑性力学的任务

众所周知,物体受外力作用后形状会有所变化,即有变形.当所受外力较小时,随着外力的除去,已产生的变形能够完全恢复;但当外力大到一定程度后,再除去外力,产生的变形并不会完全恢复,而会保留一部分“残余变形”.在这个过程中,可恢复的变形称为“弹性变形”,不能恢复的“残余变形”则称为“塑性变形”.当物体在外力作用下产生的变形均是可恢复的弹性变形时,可用弹性力学的理论和方法来研究确定这种状态下物体的应力应变及位移规律;而当产生了塑性变形时,弹性力学便无力解决了,这时的问题属于塑性力学的研究范畴.塑性力学是固体力学的一个分支,它的主要任务就是研究固体发生塑性变形后的应力应变和位移规律.

固体材料的塑性变形性质既与所研究材料的本身性质有关,又与外界条件如温度、工作过程的持续时间等相关.例如,在常温条件下,钢材和各种高强度合金的塑性变形与时间无关,但在高温条件下,维持载荷不变,它们的塑性变形仍会随着时间的延续而增大,这种与时间相关的变形称之为“蠕变”;当材料受到高速载荷作用时,例如子弹的冲击、烈性炸药的爆炸作用等,材料本身的弹塑性性质将与高速载荷相关,这时,载荷与时间均是产生塑性变形的主导因素.要同时研究所有产生塑性变形的相关的因素,会使塑性力学这门课程因涉及的因素太多而非常复杂,因此,通常意义下的塑性力学仅研究与时间无关的塑性状态应力应变和位移规律,这也就是本书要介绍的内容.而与时间相关的问题另有专门课程,例如“塑性动力学”“爆炸力学”“流变力学”等进行研究.

塑性力学是一门理论性很强、应用范围很广的学科,它既是基础学科又是技术学科.塑性力学的产生与发展与工程实践的需求是密不可分的.工程中存在的实际问题,如构件上开有小孔,在小孔周边附近区域会产生“应力集中”现象,导致局部产生塑性变形;地下工程开挖会使开挖面周边围岩局部进入塑性状态;又如杆件、薄壳结构的塑性失稳问题,金属的压力加工问题等,均是因产生塑性变形而超出了弹性力学的范畴,需要用塑性力学理论来解决的问题.另一方面,塑性力学能为更有效地利用材料的强度并节约材料、金属压力加工工艺设计等提供理论依据.正是这些广泛的工程实际需要,促进了塑性力学的发展.

1.2 塑性力学的发展简况

金属材料产生塑性变形后的应力应变和位移规律研究,作为一门独立的学科距今已有一百多年的历史,一般认为它始于1864年特雷斯卡(Tresca)公布关于冲压和挤压的初步实验报告,这一报告提出了最大剪应力屈服准则.1870年,圣维南(Saint-Venant)应用Tresca屈服准则计算了理想塑性圆柱体受扭转或弯曲时的弹塑性应力,并建立了二维流动平面应变方程式;同年,莱维(Levy)推广了圣维南的工作,列出了三维情况下的方程式.此后,塑性力学的发展在一段时间里相对较缓慢,直到1909年,哈尔(Haar)和冯·卡门(T. Von Kármán)才从某些变分原理出发建立了塑性理论方程式.

在20世纪初,人们已通过实验研究工作总结了多种屈服准则.不过对比研究表明,其中较令人满意的还是米泽斯(Mises)在1913年提出的屈服准则,同时Mises还提出了类似于Levy的方程.Mises的屈服准则及应力应变关系发表以后,引起强烈反应.1924年,亨基(Hencky)采用Mises屈服准则提出另一理论,用于解决塑性微小变形问题;1926年,洛德(Lode)证实了Levy-Mises应力应变关系在一级近似下是准确的;1930年,罗伊斯(Reuss)依据普朗特(Prandtl)的观点,考虑弹性应变分量后,将Prandtl所得二维方程式推广到了三维;1937年,那达依(Nadai)研究了材料的加工硬化,建立了大变形情况下的应力应变关系;1943年,依留辛(Ильюшин)的“微小弹塑性变形理论”问世,由于计算方便而很受欢迎;1949年,巴道夫(Batdorf)和布第扬斯基(Budiansky)从晶体滑移的物理概念出发提出了滑移理论.

1950年前后,学者们曾应用塑性势理论,讨论了满足德鲁克(Drucker)假定的屈服条件及与之相联系的一般应力应变关系;1953年,考依特(Koiter)和普拉格(Prager)提出了与Tresca屈服条件相关联的流动法则,这给极限分析带来了很大的方便.20世纪50年代,塑性力学的研究在许多国家得到重视,那一时期开展了大量的理论和实验研究工作.20世纪60年代,由Drucker和Prager针对三维应力状态提出的极值原理,导出了上限及下限定理,使结构承载能力的研究取得了进展.

以上介绍的工作主要是针对金属材料的,岩土材料与金属材料相比有如下更加复杂的强度特性和变形特性:

(1) 岩土材料系由颗粒材料堆积或胶结而成,其强度和变形特性与颗粒材料界面或胶结面的摩擦特性(内聚力、内摩擦角及界面压应力)相关,表现形式为岩土材料抗剪强度和刚度在一定范围内随压应力的增大而增大.这种特点称为岩土材料的压硬性.

(2) 岩土材料的体积应变与剪应力有关,这一特点称为剪胀性(或剪缩性).

(3) 岩土材料的剪应变与平均应力相关.

(4) 静水压力可引起塑性体积变化.

(5) 岩土材料的弹性模量随塑性变形发展而减小,称为弹塑性耦合.而金属材料的弹性模量与塑性变形无关,称为弹塑性不耦合.

由于岩土材料有上述不同于金属材料的特点,在研究其塑性性质时,相关表述与金属

材料有所差异,如岩土材料的剪切屈服与破坏必须考虑平均应力及岩土材料的内摩擦,因而它们必须采用不同于金属材料的屈服准则、破坏准则和本构关系等。

文献表明,针对岩土类介质材料塑性性质的研究起源很早.例如,1773年,库仑(Coulomb)提出了土质破坏条件,其后推广为莫尔-库仑准则(Mohr-Coulomb);1857年,兰金(Rankine)研究了半无限体的极限平衡,提出了滑移面概念;1929年,费伦纽斯(Fellenius)提出了极限平衡法;1943年,太沙基(Terzaghi)等人发展了 Fellenius 的理论,用来求解土力学中的各种稳定问题,其后陈惠发(W. F. Chen)等人又在发展土的极限分析方面做过许多工作.不过,上述工作没有考虑材料的应力应变关系,一般只局限于求解岩土类材料的极限承载力,因而有一定的局限性。

随着传统塑性力学、近代土力学、岩石力学及有限元法等数值计算方法的发展,岩土材料塑性性质的研究也随之发展.1957年,德鲁克等人首先指出平均应力或体应变会导致岩土材料产生体积屈服,因而需要在 Mohr-Coulomb 的锥形空间屈服面上再加上一族帽形的屈服面.1958年,英国剑桥大学的罗斯科(Roscoe)及其同事提出了土的临界状态概念,1963年又提出了剑桥黏土的弹塑性本构模型.自20世纪70年代前后至今,岩土材料本构模型的研究十分活跃,一直处于百花齐放、方兴未艾的阶段。

随着塑性力学的发展,上面介绍的一些早期研究成果有些已不适用,因此本书不再一一涉及。

1986年,李铀提出了材料弹性应变和塑性应变之间相互关系的研究方向,这是材料本构方程研究的一个新方向.以此新型本构方程的研究为出发点,通过塑性力学问题求解基本方程组的分解,1991年本书作者提出了塑性力学问题的求解新方法,参考传统的塑性增量理论与全量理论命名方法,2016年该新方法被命名为塑性折线理论.塑性折线理论的一个重要特点是,新方法的基本方程组也能用于求解弹性力学问题,它使弹性力学与塑性力学的求解基本方程融为了一体,形成了统一的形式.考虑到塑性折线理论也能求解弹性力学问题这一特点,本书将其更名为弹塑性折线理论.弹塑性折线理论的求解过程比较简洁,能求解一些传统理论方法难以求解的问题,使塑性力学理论及其应用取得了重大进展.例如,在弹塑性应力场研究中取得了如下重要成果:当边界条件全为应力边界条件,或有位移边界条件但在塑性区边界上仅有零位移边界条件时,塑性力学问题的应力场表达式完全等同于把所讨论问题当成弹性问题求解所获得的应力场表达式等,这些将是本书的重点介绍内容。

1.3 塑性力学的基本假定

塑性力学和弹性力学都是固体连续介质力学的基本组成部分,因而它们有不少共同的东西,例如均将所研究的对象看成是均匀连续介质,都只考虑小变形问题等.因此弹性力学中的大部分基本概念和与材料性质无关的基本方程如平衡方程、几何方程、边界条件等,在塑性力学中仍然适用.塑性力学与弹性力学的主要区别在于本构关系的不同,弹性力学中本构关系(应力应变关系)遵循广义胡克定律,而塑性力学中的本构关系是一种非

线性、非单值的关系,并且这种关系对于不同的材料、不同的加载过程表现都不一样。

由于塑性问题的规律很复杂,全部考虑所有影响因素存在很大困难,因此有必要根据材料的主要性质作出一些假设,忽略一些次要因素。传统塑性力学理论采用了以下假设:

- (1) 材料是均质连续的,只产生小变形,而且是初始各向同性的。
- (2) 塑性变形部分的体积变化为零,即体积变化是弹性的。因体积变化本身是微小的,有时也采用不可压缩的假设。
- (3) 静水压力不影响屈服应力,也不引起塑性变形,只引起体积的弹性改变。在静水压力不太大的情况下,这个假设对金属和饱和土质是适用的,但对岩石一类材料是不符合实际的。
- (4) 时间因素对塑性变形规律无影响,即不考虑蠕变、松弛效应及变形速度(应变速率)对塑性变形规律的影响。
- (5) 材料的拉、压屈服应力相等。一般不考虑包辛格(Bauschinger)效应(第5章详细介绍)。
- (6) 只考虑稳定材料,即只考虑后面将提到的满足 Drucker 公设的材料(第5章详细介绍)。

本书将重点介绍的弹塑性折线理论仍在发展中,目前可只采用上述假设中的(1)和(4)。

第 2 章 笛卡儿坐标张量简介

2.1 预备知识

张量(tensor)这一术语最初是用来描述弹性介质各点应力状态,后来发展成为力学和物理学的一个有力数学工具,目前力学方面的理论性文献都不同程度地使用了这一工具,所以本章简单介绍一下笛卡儿坐标张量.

由坐标原点和三条不共面的标架直线构成的坐标系称为直线坐标系,如果三条标架直线上的单位尺度相同,则称为笛卡儿坐标系,否则称为仿射坐标系.

笛卡儿坐标系又分为笛卡儿直角坐标系和斜角坐标系:三条标架直线互相垂直时为笛卡儿直角坐标系,否则为笛卡儿斜角坐标系.下面的讨论只针对笛卡儿直角坐标系.

通常习惯用 x, y, z 三个坐标值来定义笛卡儿直角坐标系中的一点,以后将用 x_1, x_2, x_3 来分别代表 x, y, z ,并简记为 x_i ($i=1, 2, 3$).类似地,用 i_j ($j=1, 2, 3$)表示三个坐标的单位矢量 i, j, k .下标 j ($j=1, 2, 3$)称为自由指标,它可用其他字母替代.无限定时,下标的取值均是 1, 2 或 3.

2.1.1 求和约定

在同一项中,如果某个下标重复出现两次,就表示要对这个指标从 1 到 3 求和.例如,算式中有一项 $A_i B_i$,下标 i 出现了两次,则应理解为

$$A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \quad (= \sum_{i=1}^3 A_i B_i)$$

又如 $C_{mm} D_n$, 意义为

$$C_{mm} D_n = C_{m1} D_1 + C_{m2} D_2 + C_{m3} D_3 \quad m = 1, 2, 3$$

式中: m 为自由指标,将其完全展开,则等同于

$$\left. \begin{aligned} C_{1n} D_n &= C_{11} D_1 + C_{12} D_2 + C_{13} D_3 \\ C_{2n} D_n &= C_{21} D_1 + C_{22} D_2 + C_{23} D_3 \\ C_{3n} D_n &= C_{31} D_1 + C_{32} D_2 + C_{33} D_3 \end{aligned} \right\}$$

以后我们称重复出现的下标 i 为约定求和指标,约定求和指标在展开式中不再出现,因此也称为“哑指标”,哑指标的字母可以更换成其他字母而不影响结果.

2.1.2 克罗内克符号

δ_{ij} 称为克罗内克(Kronecker Symbol)符号,其定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

由定义可知 $\delta_{ij} = \delta_{ji}$.

采用克罗内克符号和约定求和方法,可使复杂公式的书写和运算简捷化.例如,单位矩阵可表示成

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} = (\delta_{ij})$$

又在笛卡儿直角坐标系中,两单位矢量的点乘 $\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j$ 可表示成

$$\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j = \delta_{ij}$$

2.1.3 偏导数的下标记法

以后我们将记 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 为 $f_{,i}$, 记 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ 为 $f_{,ij}$, 下标中的逗号即为导数记号.

例如, $B_{ij,k}$ 意为 $\frac{\partial B_{ij}}{\partial x_k}$, 又 $A_{i,i}$ 应理解为

$$A_{i,i} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$$

2.1.4 置换符号 ϵ_{ijk}

置换(permutation)符号 ϵ_{ijk} 其定义为

$\epsilon_{ijk} = 1$, 当 i, j, k 为 1, 2, 3 的循环序列;

$\epsilon_{ijk} = -1$, 当 i, j, k 为 1, 2, 3 的逆循环序列;

$\epsilon_{ijk} = 0$, 当 i, j, k 中有两个赋值相同时.

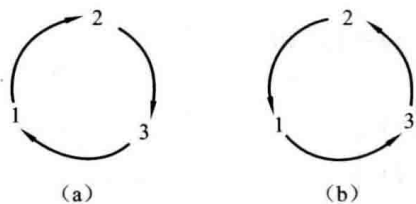


图 2-1 循环序列与逆循环序列

1, 2, 3 的循环序列与逆循环序列可参见图 2-1, 三个数字按图 2-1(a) 顺时针转时, 有 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2; 这种序列即称为循环序列, 也称偶排列. 三个数字按图 2-1(b) 逆时针转时, 则为逆循环序列, 也称奇排列, 这时有 1, 3, 2; 3, 2, 1; 2, 1, 3.

利用置换符号可简化复杂表达式的书写, 例如, 可用置换符号表示三阶行列式的值

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21} \\ = \epsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3} = \epsilon_{ijk} a_{i1} a_{2j} a_{3k} \quad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

2.2 张 量

张量是由一组元素组成的一个整体,它在坐标变换时满足一定的关系.为便于理解张量的定义,我们先介绍坐标轴旋转时空间一点的坐标变换关系.

2.2.1 坐标变换

参见图 2-2,图中两个坐标系原点相同,设原坐标系为 $Ox_1x_2x_3$,新坐标系为 $Ox'_1x'_2x'_3$,新旧坐标轴的夹角余弦示如表 2-1 所示.

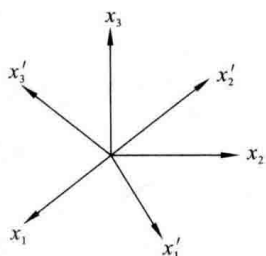


图 2-2 新旧坐标系示意图

表 2-1 新旧坐标轴的夹角余弦

	x_1	x_2	x_3
x'_1	β_{11}	β_{12}	β_{13}
x'_2	β_{21}	β_{22}	β_{23}
x'_3	β_{31}	β_{32}	β_{33}

研究一矢量 \mathbf{P} ,其始端在原点,终端在旧坐标系中的坐标为 x_i ($i=1,2,3$);在新坐标系中的坐标为 x'_i ($i=1,2,3$).我们知道 x'_i 可用 x_i 表示成

$$x'_1 = \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2 + \beta_{13}x_3$$

$$x'_2 = \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{23}x_3$$

$$x'_3 = \beta_{31}x_1 + \beta_{32}x_2 + \beta_{33}x_3$$

进而可表示成

$$x'_i = \beta_{ij}x_j \quad (2-1)$$

反过来, x_i 也可用 x'_i 表示成

$$x_1 = \beta_{11}x'_1 + \beta_{21}x'_2 + \beta_{31}x'_3$$

$$x_2 = \beta_{12}x'_1 + \beta_{22}x'_2 + \beta_{32}x'_3$$

$$x_3 = \beta_{13}x'_1 + \beta_{23}x'_2 + \beta_{33}x'_3$$

即

$$x_i = \beta_{ji}x'_j \quad (2-2)$$

由式(2-1)和式(2-2),可以导出一个很有用的关系式.将式(2-2)改写成 $x_j = \beta_{kj}x'_k$ 代入式(2-1)有

$$x'_i = \beta_{ij}x_j = \beta_{ij}\beta_{kj}x'_k \quad (2-3)$$

展开式(2-3)有

$$\begin{aligned}
 x'_i &= \beta_{i1}\beta_{k1}x'_k + \beta_{i2}\beta_{k2}x'_k + \beta_{i3}\beta_{k3}x'_k \\
 &= \beta_{i1}(\beta_{11}x'_1 + \beta_{21}x'_2 + \beta_{31}x'_3) + \beta_{i2}(\beta_{12}x'_1 + \beta_{22}x'_2 + \beta_{32}x'_3) \\
 &\quad + \beta_{i3}(\beta_{13}x'_1 + \beta_{23}x'_2 + \beta_{33}x'_3) \\
 &= (\beta_{i1}\beta_{11} + \beta_{i2}\beta_{12} + \beta_{i3}\beta_{13})x'_1 + (\beta_{i1}\beta_{21} + \beta_{i2}\beta_{22} + \beta_{i3}\beta_{23})x'_2 \\
 &\quad + (\beta_{i1}\beta_{31} + \beta_{i2}\beta_{32} + \beta_{i3}\beta_{33})x'_3
 \end{aligned} \tag{2-4}$$

显然,当 $i=1$ 时,等式右侧第一项系数应等于 1,其余项系数应为 0,即应有

$$\beta_{11}\beta_{11} + \beta_{12}\beta_{12} + \beta_{13}\beta_{13} = \beta_{11}^2 + \beta_{12}^2 + \beta_{13}^2 = 1$$

$$\beta_{11}\beta_{21} + \beta_{12}\beta_{22} + \beta_{13}\beta_{23} = 0$$

$$\beta_{11}\beta_{31} + \beta_{12}\beta_{32} + \beta_{13}\beta_{33} = 0$$

当 $i=2$ 和 3 时,有类似的结果,综合起来,即

$$\text{当 } i=k \text{ 时, } \beta_{ij}\beta_{kj} = 1$$

$$\text{当 } i \neq k \text{ 时, } \beta_{ij}\beta_{kj} = 0$$

所以

$$\beta_{ij}\beta_{kj} = \delta_{ik} \tag{2-5}$$

类似地,还有

$$x_i = \beta_{ji}\beta_{jk}x_k \tag{2-6}$$

由式(2-6)有

$$\beta_{ji}\beta_{jk} = \delta_{ik} \tag{2-7}$$

2.2.2 张量的定义

张量元素的个数由空间的维数 N 及张量的阶数 n 决定,即它等于 N^n 个,在笛卡儿坐标系中, $N=3$,下面给出 $N=3$ 时各阶张量的定义.

1. 零阶张量

零阶张量元素个数为 $N^0 = 3^0 = 1$,它是坐标变换的不变量,即

$$f'(x'_1, x'_2, x'_3) = f(x_1, x_2, x_3) \tag{2-8}$$

这实际上是我们熟知的标量,是与坐标系无关的量.

2. 一阶张量

一阶张量元素个数为 $N^1 = 3^1 = 3$,设为 T_i ($i=1,2,3$),当坐标轴旋转时,它的变换规律满足式(2-1)或式(2-2),即有

$$T'_i = \beta_{ij}T_j \quad (i=1,2,3) \tag{2-9}$$

或

$$T_i = \beta_{ji}T'_j \quad (i=1,2,3) \tag{2-10}$$

由定义可知,一阶张量即我们熟知的矢量.