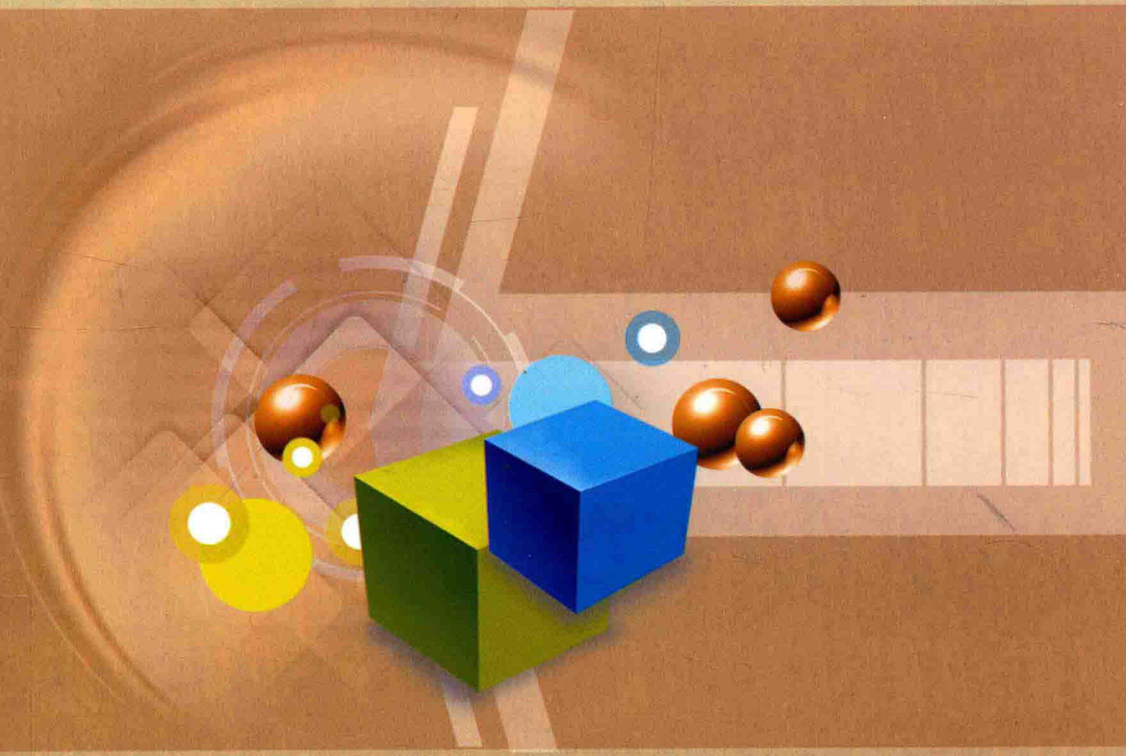
中国矿业大学教材建设工程资助教材

# 运筹学

主 编 段滋明 苗连英



中国矿业大学出版社
China University of Mining and Technology Press

建设工程资助教材

# 运 筹 学


**主 编** 段滋明 苗连英

**参 编** 姚香娟 王萃琦 付乳燕

田 记 李金波 康海燕

王艺桥




**中国矿业大学出版社**

## 内 容 提 要

本书系统地介绍了运筹学的主要分支，包括线性规划、对偶规划、运输问题、目标规划、整数规划、图论与网络规划、动态规划、对策论、决策论、排队论及存储论的主要理论与方法。内容上力求简明精炼，通俗易懂，着重介绍基本的思想和方法。各章后附有习题，供读者巩固、复习和提高使用。

本书可供高等学校理工科、经济和管理类等专业的本科生作为运筹学课程的教材使用，也是数学建模活动的必备参考书，还可供工程技术人员和其他人员自学或参考之用。

**图书在版编目(CIP)数据**

运筹学 / 段滋明主编. —徐州 ：中国矿业大学出版社，2017.6

ISBN 978 - 7 - 5646 -3151 - 2

Ⅰ. ①运… Ⅱ. ①段… Ⅲ. ①运筹学 Ⅳ. ①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 146665 号

**书　　名** 运筹学
**主　　编** 段滋明　苗连英
**责任编辑** 褚建萍
**出版发行** 中国矿业大学出版社有限责任公司
（江苏省徐州市解放南路　邮编 221008）
**营销热线** (0516)83885307　83884995
**出版服务** (0516)83885767　83884920
**网　　址** http://www.cumtp.com　**E-mail**:cumtpvip@cumtp.com
**印　　刷** 徐州中矿大印发科技有限公司
**开　　本** 787×960　1/16　**印张** 18.75　**字数** 360 千字
**版次印次** 2017 年 6 月第 1 版　2017 年 6 月第 1 次印刷
**定　　价** 33.00 元

# 前　言

运筹学是一门研究系统最优化问题的应用性学科。以数学和计算机为主要工具，通过建立实际问题的数学模型并分析求解，为决策者进行决策提供科学依据，其理论与方法已广泛应用于科学、社会、经济、军事等诸多领域和国民经济的各个部门。

本书共分十一章，内容包括线性规划、对偶规划、运输问题、目标规划、整数规划、图论与网络规划、动态规划、对策论、决策论、排队论及存储论的基础理论与方法。在教材内容和形式上，力求简明精炼，通俗易懂，着重介绍基本的思想和方法，其中一些内容体现了编者近年来在教学改革上的某些成果，便于教师教学和学生自学。每章后均安排了习题供学生巩固知识和复习使用，部分章节还安排了综合题供学生提高之用。

本书可作为高等学校理工科、经济和管理类等专业的本科生运筹学课程的教材或参考书，也可供广大工程技术人员参考。由于运筹学极其广泛的应用性，它也是数学建模训练及各种数学建模竞赛必备的基础。因此本书也可以作为数学建模活动的培训用书和参赛学生的必备参考书。

讲授本书前五章需要 32 学时左右，全部讲授完则需要 72 学时左右。除前五章外，其余各章内容相对独立，可以根据学时和专业选择不同的内容讲授。

全书由段滋明和苗连英策划和统一安排编写内容，具体编写分工如下：苗连英编写第一、二章，段滋明编写第三、四章，姚香娟编写第五章，王萃琦编写第六章，付乳燕编写第七章，王艺桥编写第八章，康海燕编写第九章，田记编写第十章的，李金波编写第十一章。在本书的成稿过程中，得到了中国矿业大学数学学科多位老师的帮助与支持，在此表示衷心的感谢。同时，本书的编写也参考了各种现行教材，向所有被引用文献资料的同行致以诚挚的谢意。

由于编者水平有限，书中错误及疏漏在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2017 年 3 月

# 目　录

# 绪　论

看到“运筹学”，人们往往会想到中国古代的一句名言“运筹帷幄之中，决胜千里之外”。的确，运筹与决策是人类相互关联的两个行为，运筹是决策前的行为过程，而决策是运筹的结果。大智大略是伟大的政治家、军事家所运筹帷幄的结果，这种运筹与本书所讨论的运筹学是不同的。

## 一、运筹学的概念

运筹学是20世纪40年代发展起来的一门学科，其英文名称是“operational research”，简记为“O. R”。汉语直译为“（军事）行动研究”。目前，人们对运筹学说法不一。莫斯（P. M. Morse）和金博尔（G. E. Kimball）曾说：运筹学是决策机构在对其控制下的业务活动进行决策时，提供的以数量化为基础的科学方法，是以定量化为基础的。因而，运筹学应属于应用数学，是为决策、管理服务的数学。事实上，西方现代管理科学的主要内容是运筹学。但是，由于一般的决策过程往往涉及事物的定性和定量两个方面的影响，因此，运筹学又不同于决策科学或管理科学。还有人认为：运筹学是一门应用科学，它广泛地应用现有的科学技术知识和数学方法，来解决实际中提出的专门问题，并为决策者选择最优决策提供定量依据。这里强调运筹学的多学科交叉和最优决策。最优的含义是指在多种可行方案中选取最能满足我们目标要求的方案，如以少的投入得到多的产出等。但在实际生活中，由于人们的决策目标是多样的，要使每个目标都达到最好往往是不可能做到的，比如多、快、好、省四个目标都得到满足是不大现实的，因此，人们往往用满意来代替最优。另外一种说法是，运筹学是确定有限资源的合理利用的科学。

20世纪50年代，钱学森、许国志等教授将运筹学引入我国。当时，有人曾将其译为“运用学”，不久才定名为“运筹学”。后来，许国志教授在谈起运筹学时，曾提出“事理学”一词，来概括运筹学的各个分支。因为相对于研究事物运动变化规律的“物理学”，研究事物的存在形态、数量及最佳事物的“事理学”，正是运筹决策的实质，“事理学”一词对于我们分析问题、理解问题和说明问题有一定的帮助。

## 二、运筹学的发展简史

一般说运筹学起源于第二次世界大战，发展于20世纪五六十年代。但是苏联学者康托洛维奇的《生产组织与管理中的数学方法》一书（规划论）出版于

1939 年，冯 · 诺伊曼等所著《对策论和经济行为》一书（对策论的创始作）中许多结论于 1928 年开始刊出，确实，“运筹学”一词在第二次世界大战期间出现，最早是在英国皇家空军战斗指挥部管辖下的名为“（军事）行动研究”小组于 1938 年提出的，其英文是“operational research”。这个小组以它对英国当时的空防的一些战术或战略所作的研究和建议而出名；之后，美国、加拿大等国也组成同名小组，进行战术评价、战术改进、作战计划、战略选择等方面的研究，同时也研究如何改进后勤调度和训练计划。这些研究，由于综合地运用了科学方法和技术，纠正了人们一些直观想象的错误，解决了当时战争中提出的一些新问题，取得了人们对这项研究的重视，也为运筹学争得了荣誉。

战后，运筹学得到了蓬勃发展，出现了应用研究和理论研究相互促进的局面。从应用方面来说，在工商业管理中的应用尤为突出。从理论方面来说，形成了运筹学的许多分支：线性规划、非线性规划、整体规划、动态规划、目标规划、随机规划、图论与网络规划、排队论（随机服务系统理论）、存贮论、对策论、系统可靠性分析与质量管理等，还有组合分析、搜索论、价值论、决策论、投入产出论等。

**三、运筹学的特点**

运筹学是一门研究如何有效地组织管理和管理人机系统的科学。在一个复杂的人机系统中，涉及大量人才和其他资源的统筹组织安排，运筹学应用分析的、经验的和数量的方法，通过系统的概念模型和数学模型，对各种可供选择的方案进行比较评价，为制订最优的管理决策提供数量上的依据。

从运筹学的发展历程中可以看出运筹学具有下列特点：

① 数学研究方法渗入到社会科学。生产与管理的规模日益庞大，其间的数量关系也越来越复杂，从其间的数量关系来研究问题是运筹学的一大特点。例如，当研究物资如何调运才能使总运费最省，或者研究桥梁结构如何设计才能既满足工程设计要求又能使所用钢材最省时，可以建立相应的数学规划模型。又比如，对于一个大型工程，研究如何组织管理才能早日完工时，就提出了统筹方法，或 PERT/CPM 法。

② 着重实际应用。运筹学中的理论或问题模型往往是从实际问题中得出的，有着明显的实际背景。如网络最大流理论与方法可以用于处理像货流、资金流等问题。但在实际应用中，由于现实问题情况多样，理论上的最优解往往不能满足实际需要，这就需要全面考察实际情况得出有效的满意解。

③ 理论与应用的发展相互促进。如线性规划问题是在研究生产的组织和计划中出现的，后来才发展成一套较完整的理论和方法，如单纯形理论和方法，进而又开拓了线性规划的应用范围。

④ 跨学科性。运筹学综合应用学科的知识来解决实际问题，这也是运筹学

存在多种不同学科分支的特点。在实际应用中,对于某些确定性问题,人们首先探讨能否用有严密理论和较成熟算法的数学规划去解;对于非确定性问题,则考虑用对策论或决策论;而对于无现成方法可用的问题,人们往往求助于计算机模拟技术。

总之,运筹学是一门新兴学科,它在工业、商业、交通、工程技术、行政管理等领域有着广泛的应用,它已成为管理科学的重要内容,成为各行各业管理人员所需的工具。随着电子计算机的日益普及,运筹学中所提供的模型和方法会有更多应用。

# 第一章 线性规划

线性规划(linear programming)是运筹学的一个重要分支。线性规划问题是康托洛维奇(L. V. Kantorovich)在解决工业生产组织和计划问题时(1939 年)提出的。1947 年,丹捷格(G. B. Dantzig)提出了线性规划的单纯形理论与单纯形方法。之后,线性规划得到了广泛应用。本章讨论线性规划问题的数学模型和基本概念,基可行解的特征与几何意义以及单纯形算法等。

## 第一节 线性规划问题

线性规划问题是针对一类有限资源的合理利用而提出的,其中所谓的资源包括人力、物力、资金、时间、里程等。为了更好地理解线性规划问题的实际意义和应用背景,我们先讨论两个具体的例子。

**例 1-1** 生产计划问题。

某企业要在规定的计划期内安排生产甲、乙两种产品,这个企业现有的生产资料是:设备 18 台时,原材料 A 4 t,原材料 B 12 t。已知生产单位产品所需要消耗的设备台时及原材料 A、B 的数量由表 1-1 给出,并且单位产品的利润也给出。问:企业领导应如何确定生产计划使企业获利最多?

**表 1-1**

| | 甲 | 乙 | 现有生产资料 |
|---|---|---|---|
| 设备/台时 | 3 | 2 | 18 |
| 原材料 A/t | 1 | 0 | 4 |
| 原材料 B/t | 0 | 2 | 12 |
| 单位利润/万元 | 3 | 5 | |

**分析** 确定生产计划实质上就是确定甲、乙两种产品的生产量。为了定量分析解决这个问题,应建立其数学模型。设 $x_1$、$x_2$ 分别表示在计划期内甲、乙两种产品的产量。首先分析 $x_1$、$x_2$ 应满足什么条件,才能使生产正常进行。由于现有的生产资料总量是有限的,正常生产过程中生产资料不能超过现有量,因此,$x_1$、$x_2$ 应同时满足下列条件:

设备台时限制　$3x_1+2x_2\leqslant 18$

原材料 A 限制　$1\cdot x_1+0\cdot x_2\leqslant 4$

原材料 B 限制　$0\cdot x_1+2\cdot x_2\leqslant 12$

同时，由产品产量不能是负的，因而又有非负限制：$x_1\geqslant 0$，$x_2\geqslant 0$。该生产计划的总利润为 $z=3x_1+5x_2$。

现在的问题是找出 $x_1$、$x_2$，在上述各种条件限制下，使 $z$ 达到最大值。

综上所述，该生产计划问题的数学模型应是：

$$\max z=3x_1+5x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}3x_1+2x_2\leqslant 18\\ x_1\leqslant 4\\ 2x_2\leqslant 12\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

例 1-1 中的问题实质上是合理利用生产资源问题。一般的资源利用问题可表述为：

设某企业利用 $m$ 种不同的资源来生产 $n$ 种产品，已知该企业拥有的第 $i$ 种资源的数量是 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$，生产一个单位第 $j$ 种产品所消耗的第 $i$ 种资源的数量为 $a_{ij}$，第 $j$ 种产品的单位利润是 $c_j(j=1,2,\cdots,n)$。现欲做一个能够充分利用现有资源的生产计划，使每种产品的生产消耗在不超过现有资源的条件下，总利润最大。

我们用 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 表示第 $j$ 种产品的生产数量。可以建立资源利用问题的数学模型为：

$$\max z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2\\ \qquad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0\end{cases}$$

**例 1-2**　物资运输问题。

某公司要运销一种物资。该物资有甲、乙两个产地，产量分别是 2 000 t、1 000 t；另有 A、B、C 三个销地，销量分别是 1 700 t、1 100 t、200 t。已知该物资的单位运价如表 1-2 所示。问公司领导应如何确定调运方案，才能使在产销平衡（总产量等于总销量）的条件下，总运费最低？

**表 1-2**

| 单位运价 销地 / 产地 | A | B | C | 产量 |
|---|---|---|---|---|
| 甲 | 21 | 25 | 7 | 2 000 |
| 乙 | 51 | 51 | 37 | 1 000 |
| 销 量 | 1 700 | 1 100 | 200 | |

**分析** 确定调运方案就是确定从不同产地到各个销地的运输量。设 $x_{ij}$ 表示这些要找的运量，即 $x_{11}, x_{12}, x_{13}$ 分别表示从甲地调往 A、B、C 三地的运量，$x_{21}, x_{22}, x_{23}$ 分别表示从乙地调往 A、B、C 三地的运量。由于产销平衡，从甲、乙两地分别调往 A、B、C 三地的物资的数量应该分别等于甲、乙两地的产量，所以 $x_{ij}$ 应满足：

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=2\ 000 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=1\ 000 \end{cases}$$

同时，运到 A、B、C 三地的物资数量应分别等于 A、B、C 三地的销量，所以 $x_{ij}$ 还应该满足：

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}=1\ 700 \\ x_{12}+x_{22}=1\ 100 \\ x_{13}+x_{23}=200 \end{cases}$$

由于 $x_{ij}$ 是运量，不能是负数，所以还应该满足：

$$x_{ij} \geqslant 0 (i=1,2; j=1,2,3)$$

利用给出的单位运价，得出调运方案的总运费为：

$$z=21x_{11}+25x_{12}+7x_{13}+51x_{21}+51x_{22}+37x_{23}$$

综上所述，建立产销平衡下运费最省的调运问题的数学模型：

$$\min z=21x_{11}+25x_{12}+7x_{13}+51x_{21}+51x_{22}+37x_{23}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} x_{11}+x_{21}=1\ 700 \\ x_{12}+x_{22}=1\ 100 \\ x_{13}+x_{23}=200 \\ x_{11}+x_{12}+x_{13}=2\ 000 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=1\ 000 \\ x_{ij} \geqslant 0 (i=1,2; j=1,2,3) \end{cases}$$

运输问题的一般提法是：某种物资有 $m$ 个产地 $A_1$、$A_2$、…、$A_m$，产量分别是 $a_1$、$a_2$、…、$a_m$ 个单位，另有 $n$ 个销地 $B_1$、$B_2$、…、$B_n$，销量分别是 $b_1$、$b_2$、…、$b_n$ 个单

位。假设产销是平衡的。已知产地 $A_i$ 向销地 $B_j$ 运输一个单位物资的运价为 $c_{ij}$，问应该怎样调运物资才能使总运费最省？

令 $x_{ij}$ 表示从产地 $A_i$ 向销地 $B_j$ 的运量，则运输问题的数学模型为：

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i(i = 1,2,\cdots,m)\\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j(j = 1,2,\cdots,n)\\ x_{ij} \geqslant 0\end{cases}$$

上述两个例子，虽然有不同的实际内容，但是它们都是要求一组变量的值，这组值满足一定的约束条件，如资源限制、供求关系等。这种约束条件都可以用一组线性不等式或线性方程式来表示，同时使某个线性函数指标达到最大或最小。具有这些特征的问题称为线性规划问题(linear programming problem)。

## 第二节　图　解　法

对于只有两个变量的线性规划问题：

$$\max(\min)\ z=c_1x_1+c_2x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2\leqslant b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\leqslant b_2\\ \quad\vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2\leqslant b_m\\ x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

可以用图解法来解。图解法简单直观，有助于了解线性规划问题求解的基本原理和思想。

在平面 $R^2$ 上取定直角坐标系，两个坐标是 $x_1$、$x_2$；满足所有约束条件的点 $(x_1,x_2)$ 为线性规划问题的可行解，所有可行解的集合称为可行域，记为 $\Omega$。

先讨论 $R^2$ 中的哪些点 $(x_1,x_2)$ 满足约束条件。由于平面 $R^2$ 被直线 $a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1$ 划分成两个半平面，易知满足条件 $a_{11}x_1+a_{12}x_2\leqslant b_1$ 的点，即是一个半平面 $M_1$。类似的，可确定满足 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2\leqslant b_i(i=2,\cdots,m)$ 的半平面 $M_i$。令 $R_+^2=\{(x_1,x_2):x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\}$，即 $R^2$ 的第一象限，故线性规划问题的可行域 $\Omega$ 由 $m$ 个半平面 $M_i$ 与 $R_+^2$ 所围成：

$$\Omega = \left(\bigcap_{i=1}^{m} M_i\right) \bigcap R_+^2$$

交集 $\Omega$ 可能是空集合，此时说明线性规划问题无可行解。如果 $\Omega$ 不是空集，那么 $\Omega$ 是平面上的一个凸多边形，这个凸多边形可能是有界的（封闭的），也可能是无界的（不封闭的）。现在的问题是在 $\Omega$ 中找到一点 $(x_1^*, x_2^*)$，使 $c_1x_1^* + c_2x_2^*$ 达到最大。

为表述方便，把目标函数改写成：

$$h = \frac{1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}(c_1x_1 + c_2x_2) = d_1x_1 + d_2x_2$$

这种改动对寻找最优解不会产生影响。可以看出：

$$d_1x_1 + d_2x_2 = h$$

表示一个以 $h$ 为参数的平行直线束。对于 $\Omega$ 中的任意一点 $(x_1^0, x_2^0)$，

$$d_1x_1 + d_2x_2 = d_1x_1^0 + d_2x_2^0 \triangleq h_0$$

就是直线束中一条通过点 $(x_1^0, x_2^0)$ 的直线，而坐标原点(0,0)到这条直线的距离正好是 $h_0 = d_1x_1^0 + d_2x_2^0$。因此，我们的问题就变成在直线束 $d_1x_1 + d_2x_2 = h$ 中找一条直线，这条直线既通过 $\Omega$ 中的一点，又使原点到这条直线的距离达到最大（最小）。

我们知道，让直线束 $d_1x_1 + d_2x_2 = h$ 沿着它的正法线方向 $(n = (d_1, d_2))$ 移动，移动到刚开始要离开 $\Omega$ 的时候，原点到这条直线的距离 $h$ 达到最大；反之，让直线束 $d_1x_1 + d_2x_2 = h$ 沿着它的负法线的方向 $(-n = (-d_1, -d_2))$ 移动，$h$ 逐步减小，移动到刚要离开 $\Omega$ 时，$h$ 达到最小。由此可见，如果线性规划有最大值（最小值），则最大值（最小值）一定在可行域的边界上。这种点可能只有一个（$\Omega$ 的一个顶点），也可能充满一段线段。

下面举例说明图解法求线性规划问题的步骤。

**例 1-3** $\max z = 3x_1 + 5x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \\ x_1 \leqslant 4 \\ 2x_2 \leqslant 12 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

**解** 该线性规划问题的可行域见图 1-1。使直线束 $z = 3x_1 + 5x_2$ 沿正法线方向 $n = \left(\frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{5}{\sqrt{34}}\right)$ 移动，通过点(2,6)的直线就是所求的直线。

从而最优解为(2,6)，$\max z = 36$。

说明：例 1-3 的最优生产方案为：生产产品甲 2 件，生产产品乙 6 件，可得最

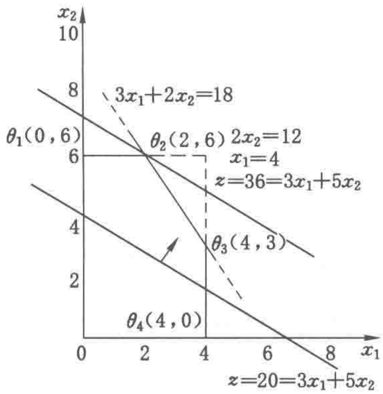



图 1-1

大利润 36 万元。

分析:该问题的可行域是一个有界的凸多边形,其边界是由 5 条直线段所围成的,最优解是凸多边形的某个顶点。

**例 1-4** $\max z=3x_1+x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_2\leqslant 5\\-x_1+x_2\leqslant 0\\6x_1+2x_2\leqslant 21\\x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

**解** 该问题的可行域 $\Omega$ 是一个有界的凸多边形(见图 1-2)。让直线束 $z=3x_1+x_2$ 沿着正法线方向 $\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ 移动,到达线段 $\overline{AB}$ 时,$z$ 达到最大。所以线段 $\overline{AB}$ 的每一点都可使 $z$ 达到最大值,从而 $\overline{AB}$ 上每一点都是最优解。$\max z=f\left(\frac{21}{6},0\right)=f\left(\frac{11}{4},\frac{9}{4}\right)=\frac{21}{2}$。

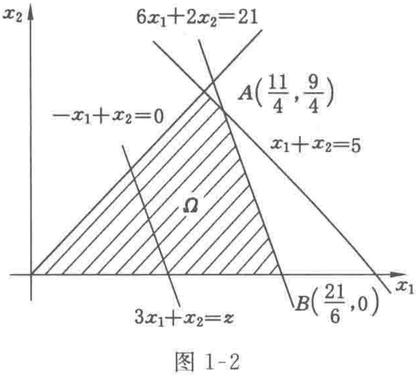



图 1-2

**例 1-5** $\min z=-2x_1+x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_2\geqslant 1\\x_1-3x_2\geqslant -3\\x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

**解** 该问题的可行域 $\Omega$ 是一个无界的凸多边形(见图 1-3),让直线束 $z=-2x_1+x_2$ 沿着负法线的方向 $\left(\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ 移动,可以无限制地移动下去,一直与 $\Omega$ 相交,所以其最小值为 $-\infty$,或者说函数 $z=-2x_1+x_2$ 在 $\Omega$ 上无下界。

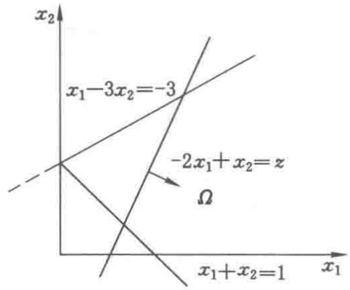



图 1-3

**例 1-6** $\max z=3x_1+x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1-x_2\leqslant -1\\x_1+x_2\leqslant -1\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

**解** 该问题的可行域 $\Omega$ 是空的,即无可行解(见图 1-4)。

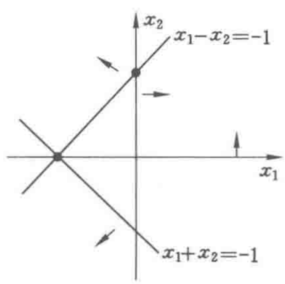



图 1-4