俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

Smirnov Advanced Mathematics (Volume V(1))

斯米尔诺夫高等数学

（第五卷·第一分册）

[俄罗斯] 斯米尔诺夫 著　　斯米尔诺夫高等数学编译组 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

斯米尔诺夫高等数学

Smirnov Advanced Mathematics (Volume V(1))

（第五卷·第一分册）

● [俄罗斯] 斯米尔诺夫 著

● 斯米尔诺夫高等数学编译组 译

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

黑版贸审字 08－2016－040 号

内 容 简 介

本书共分三章:第一章斯蒂尔切斯积分,第二章集合函数与勒贝格积分,第三章集合函数、绝对连续性、积分概念的推广.理论部分叙述扼要,应用部分叙述详尽.

本书适合高等学校数学及相关专业师生使用,也适合数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

斯米尔诺夫高等数学.第五卷.第一分册/(俄罗斯)斯米尔诺夫著;斯米尔诺夫高等数学编译组译.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2018.3

ISBN 978－7－5603－6578－7

Ⅰ.①斯…　Ⅱ.①斯…　②斯…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 088352 号

书名:Курс высшей математики

作者:В. И. Смирнов

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　钱辰琛
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 16.5　字数 323 千字
版　　次　2018 年 3 月第 1 版　2018 年 3 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－6578－7
定　　价　58.00 元

◎ 原序

在数学物理学的现代理论系统中，实变数函数论与一般的运算子论都有重大的意义. 本书基本上就是讨论这些问题的. 从实变数函数论中，我只选择了对于上述各种学科有用的材料. 运算子论的研究是建立于希尔伯特空间的抽象理论的基础上. 本书中，实变数函数论的基本内容是勒贝格—斯蒂尔切斯积分论及完全加法的集合函数论. 在第一章中讨论古典的斯蒂尔切斯积分论和更一般的斯蒂尔切斯积分的概念，后者是建立于相应上下达尔布积分相等的条件上. 在第二章中讨论实变数函数的度量理论及勒贝格—斯蒂尔切斯积分论的基础. 我从欧几里得空间中的一般测度论出发，然后定义可测函数及勒贝格—斯蒂尔切斯积分的概念. 在第三章中讨论完全加法的集合函数论，阐明相关于一定的分布函数的绝对连续性概念，并讨论黑林格尔积分论. 在同一章中，以绝对连续的完全加法集合函数的积分表示法为基础，介绍一变数以及多变数的函数的导数的概念. 所介绍的偏导数的推广概念是与 C. Л. 索伯列夫关于中值函数理论相联系的. 在第三章末尾，很简短地讨论一下关于在抽象空间中建立测度论及积分论的可能性，并论述积分的一般定义的基础——这个定义是依照 A. H. 廓勒莫郭洛夫的. 在本卷第二分册第四章中讨论希尔伯特空间的抽象理论，首先就有界自共轭运算子的情形研究. 第五章论述与希尔伯特空间不同的空间理论的初步.

编写本书时除专门论文以外，我曾使用了很多专业书籍. 在此我举出几种最基本的来. 在第一章中曾使用了 B. И. 格里汶科的《斯蒂尔切斯积分》及 И. П. 那汤松的《实变数函数论基础》两书. 关于第二章及第三章，曾使用了萨克斯的《积分论》及瓦雷·布三的《勒贝格积分，集合函数，拜尔类》等书.

在讨论希尔伯特空间时曾引用了斯通的《希尔伯特空间中的线性变换及其在解析方面的应用》和 A. И. 蒲列斯涅尔在《数学科学的进展》期刊第九卷中的论文，以及 H. И. 阿希叶杰尔论雅可比矩阵的论文.

我对 C. M. 罗金斯基表示深深的谢意，因为他曾看过本书的全部手稿，并给予我很多宝贵的意见，这些意见在最后出版时都应用了.

斯米尔诺夫

1946 年 2 月 12 日

◎目录

斯蒂尔切斯积分

第一章

1. 集合及其权

应用数学分析学于近代自然科学时，各种积分概念都起着很大的作用，在第一、二两章中，将研究较以前所论更一般形式的积分论. 在讨论第一种积分方程论时，已经使用过勒贝格积分. 在本小节中先介绍一些集合论的初步知识. 这些知识是以前[Ⅳ;78]在勒贝格积分概念之前所述的补充.

设有两个由某种物体(元)形成的集合 A_1 及 A_2. 所谓两集合有相同的权，是指在 A_1 的元与 A_2 的元之间有一一对应的关系，就是说，有一对应关系，对于每一个属于 A_1 的元，必有一个属于 A_2 的确定元与它相对应. 而反之，对于 A_2 的每一个元，必有一个属于 A_1 的元，而且只有一个这样的元与它相对应. 无穷集合(即包含无穷多个元的集合)叫作可计的或可数的，是指它与全部正整数所成的集合有相同的权，也就是说，这集合的诸元可以用正整数表示出来：$a_1,a_2,a_3,\cdots$. 两个可数集合必有相同的权. 现在叙述一下可数集合的某些性质. 考察可数集合的一个子集合，设后者由 $a_{p_1},a_{p_2},\cdots$ 构成，其中 $p_1,p_2,\cdots$ 是一个正整数的增序列. 这新集合的元也可以用正整数标志出来. 每个元的标号就是 p 的角标. 如此，可数集合的无穷部分仍是可数集合. 现在考察两个可数集合：由 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 组成的 $A(a_1,a_2,a_3,\cdots)$，及由 $b_1,b_2,b_3,\cdots$ 组成的 $B(b_1,b_2,b_3,\cdots)$；作两

者之和，即把属于上面两个集合的一切元合成一个集合 C. 如此而得的新集合 C 通常叫作集合 A 与 B 的和. 这新集合仍是可数的. 事实上，只需把 C 中的各个元依下面的次序排列：$a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots$，就可以看出其可数性. 对于有穷个可数无穷集合之和，相似的推理也适用. 就是说，有穷个可数集合之和仍是可数集合. 现在考察集合的数目也是无穷的情形. 设有可数多个可数集合. 这些集合的元可以用两个整数来表示：$a_p^{(q)}$. 上标号表示这元所属的集合标号，而下标号表示这元在包含它的集合中所具有的标号. 不难把这一切元 $a_p^{(q)}$ 用正整数表示出来. 取上下标号都是 1 的元作第一个元：$a_1^{(1)}$. 此后取上下标号之和为 3 的元，并把它们依其上标号增加的顺序排列下来：$a_2^{(1)},a_1^{(2)}$，于是得到集合之和中的第二元与第三元. 再取上下标号之和为 4 的各个元，并把它们依其上标号增加的顺序排列下来：$a_3^{(1)},a_2^{(2)},a_1^{(3)}$. 这就给出了集合之和中的第四元、第五元及第六元. 继续做下去，可以看出可数多个可数集合的和仍是可数集合. 如果和中某些项不是可数集合，而是有穷集合，则上面的命题仍然有效.

设有某无穷集合 A. 由其中取某一元，并附以标号 1. 剩余的集合仍是无穷的. 由它再取出一元，并附以标号 2. 继续下去，可知由任一无穷集合必可提出一个可数集合. 经过如此提取后所余的集合可能是空的，就是说，它可能不含任何元，也可能是有穷的，也可能是无穷的. 我们证明，如果所余集合是无穷的，那么它与原来的集合有相同的权，就是说，下面的命题是正确的：如果由无穷集合 A 中提取出可数集合 P 来，而余下的是一无穷集合 B，那么集合 A 及 B 有相同的权. 由无穷集合 B 重新取出某一可数集合 Q，并设 C 是所余集合. 如此原来的集合 A 分解成三个集合 $A=P+Q+C$，而其中的集合 C 可能是空的，也可能是无穷的，而 P 及 Q 都是可数集合. 在第二次提取之前，$A=P+B$. 不难在 A 及 B 的各个元间建立一一对应关系. 事实上，$A=P+Q+C,B=Q+C$. 可数集合之和 $P+Q$ 仍是可数集合，所以在 $P+Q$ 及 Q 的各个元之间可以建立一一对应. 集合 C 中的每一元与它自己对应. 如此可以在 A 及 B 的各个元间建立一一对应. 由所证的命题直接可得：如果对于无穷集合增添一可数集合，则所得的新集合与原来的集合是有相同权的. 在上述关于减去或增添可数集合的命题中，如果把可数集合换成有穷集合，则命题依然有效. 证明与上面完全一样.

以前曾证明过，属于某一区间 $[a,b]$ 的一切有理数的集合是可数集合，一切有理数的集合也是可数集合. 其证明与证明“可数多个可数集合之和仍是可数”这一命题完全一样. 分数的分子起着上标号的作用，分母起着下标号的作用，而首先只要考察正分数. 现在举一个不可数集合的例子. 考察凡属于区间 $[0,1]$ 的实数. 除零以外，其中每个数都可以表示成无尽十进制小数，其整数部分是零，反之，凡如此的十进制小数一定与上述区间中的一个实数相应. 我们不使用有尽小数，因为这种有尽小数与那些以 9 为周期的无尽小数表示同样的

数，例如0.37＝0.369 99…．我们证明上述实数的集合是不可数的．用归谬法证明．设上述一切十进制小数，包括代表区间左端的小数 0.00…，是可数的并附好标号．依下述方式作一个新的十进制小数，其整数部分是零．取某一与第一个十进制小数的第一位数不同的数字作第一位数，取某一与第二个十进制小数的第二位数不同的数字作第二位数，等等．作新的十进制小数时我们不使用 0 作位数，于是所得的无尽十进制小数与原有的一切十进制小数相异．如此与它相应的实数没有包含在上面那可数集合之中，这与所设区间[0,1] 中一切实数已附好标号这一事实相冲突．如此证明了：属于区间[0,1] 的一切实数是不可数的．我们说这集合具有连续统的权．不难看出，属于任意一个有穷区间[a,b] 的一切实数的集合与属于区间[0,1] 的一切实数的集合具有同样的权．公式 $y=\frac{x-a}{b-a}$ 就建立了这两个集合诸元间的一一对应关系．当 x 遍历区间[a,b] 时，变数 y 就遍历区间[0,1]．如果引用公式 $y=\tan\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right)$，那么当变数 x 在区间[0,1] 内部变化时，变数 y 遍历一切实数的集合，就是说由一切实数所组成的集合也具有连续统的权．如果不把区间的端点算在集合之中，那么其权并不改变，因为对于无穷集合增添或减去一个有穷集合并不改变其权．

在下面，常用记号[a,b] 表示闭集合，而不包含端点的开集合则用记号(a,b) 表示．如果左端不算入，而右端算进去，我们用记号(a,b] 表示，同样可规定记号[a,b) 的意义．这里的数 a 及 b 也可以取无穷值：$a=-\infty$，$b=+\infty$，就是说所论的区间可以在左边或在右边是无穷的．例如闭区间[$-\infty$，$+\infty$] 包含两个无穷远点．与这相应，函数 $f(x)$ 也可以在 $x=-\infty$ 及 $x=+\infty$ 处定义，例如，可以引用记号 $f(-\infty)$．在 $x=-\infty$ 处的连续性与条件 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=f(-\infty)$ 同效．同样可以处理 $x\to+\infty$ 的情形．

此外，也可以应用通常的表示法 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=f(-\infty+0)$ 及 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(+\infty-0)$．

还应注意，在闭区间[$-\infty$，$+\infty$] 中有穷而且连续的函数 $f(x)$ 一定在这区间中一致连续．

2. 斯蒂尔切斯积分及其基本性质

回忆一下黎曼积分的定义，这种积分是常用的．设[a,b] 是一个有穷区间，而 $f(x)$ 是定义于这区间上的有界函数．把这区间分割成部分：$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，在每一部分区间[$x_{k-1}$，$x_k$] 上取某一点 ξ_k，并做出积的和

$$\sigma=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \tag{1}$$

如果无限地把区间细分，并随意地取点 ξ_k 时，上面的和有确定的极限 A，那么这极限值称作 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的积分. 设 δ 是差 $x_k - x_{k-1}$ 中的最大的. 无限地细分区间$[a,b]$成部分与 $\delta \to 0$ 同义；而所谓在(1) 中的和有确定的极限 A 存在，与下面所说的同义：对于任意预定的正数 ε，存在一正数 η，使当 $\delta \leqslant \eta$ 时

$$\left| A - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \leqslant \varepsilon$$

我们可以用同样方式建立更一般的积分观念. 这是由荷兰数学家斯蒂尔切斯在 1894 年研究连分数时首先介绍的，其后得到很广阔的发展，在纯粹数学问题与精密自然科学问题中都有应用. 设在有穷区间$[a,b]$上给出两个函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，并设二者在这区间之上每一点处都取有穷值. 现在不用和(1)，而代之以和

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] \tag{2}$$

如果无限地细分区间，并随意地取点 ξ_k 时，上面写的和趋向于确定的有穷极限，那么我们说函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上依 $g(x)$ 是可积分的，并写成

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x) = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

在黎曼积分中 $g(x)$ 的任务由 x 担当. 显然现在介绍的新积分有很多类似黎曼积分的性质，而这些性质的证明也与对于黎曼积分的证明完全相同. 现在枚举这些性质，并设下列各式中的一切积分都存在

$$\begin{cases} \displaystyle\int_a^b \sum_{k=1}^{p} a_k f_k(x)\mathrm{d}g(x) = \sum_{k=1}^{p} a_k \int_a^b f_k(x)\mathrm{d}g(x) \\ \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}\sum_{k=1}^{p} a_k g_k(x) = \sum_{k=1}^{p} a_k \int_a^b f(x)\mathrm{d}g_k(x) \qquad (a_k \text{ 都是常数}) \\ \displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x) = \int_a^c f(x)\mathrm{d}g(x) + \int_c^b f(x)\mathrm{d}g(x) \end{cases} \tag{3}$$

此外还有一个极显然的公式

$$\int_a^b \mathrm{d}g(x) = g(b) - g(a) \tag{4}$$

在(3) 的前两式中，由右面的积分的存在可推知左面积分存在.

现在详细地推出分部积分式. 设函数 $g(x)$ 依 $f(x)$ 的积分存在，我们证明 $f(x)$ 依 $g(x)$ 的积分存在. 取和(2)，把含相同点的函数 $g(x)$ 值的项合并，得

$$\sigma = -\sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)[f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k)] + g(b)f(\xi_n) - g(a)f(\xi_1)$$

加上差值

$$f(x)g(x)\Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

并减去它,可写成

$$\sigma=f(x)g(x)\Big|_a^b-\Big\{\sum_{k=1}^{n-1}g(x_k)[f(\xi_{k+1})-f(\xi_k)]+$$

$$g(a)[f(\xi_1)-f(a)]+g(b)[f(b)-f(\xi_n)]\Big\} \tag{5}$$

在花括号中的式子恰是 $g(x)$ 依 $f(x)$ 的积分之黎曼 — 斯蒂尔切斯和(2).依所知条件,$g(x)$ 依 $f(x)$ 的积分存在,这就是说当无限地细分区间时,花括号中式子的和趋向于这积分值.如此,由(5),和 σ 有一极限值,也就是说,$f(x)$ 依 $g(x)$ 的积分存在,并且可以写成

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x) \tag{6}$$

或

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)+\int_a^b g(x)\mathrm{d}f(x)=f(x)g(x)\Big|_a^b \tag{7}$$

而在这两个式子中,由两积分中一个存在可推得第二个存在.

斯蒂尔切斯积分有两种特殊情形,现在提一下.设区间$[a,b]$分割成有穷多的部分:$a=c_0<c_1<\cdots<c_{p-1}<c_p=b$,并且在每个部分区间$(c_{k-1},c_k)$中函数 $g(x)$ 的值是常数 g_k.如此在位于区间$[a,b]$中每一点 c_k 处,函数 $g(x)$ 有一跃度 $s_k=g_{k+1}-g_k$.可能在区间两端也有跃度:在左端是 $s_0=g_1-g(a)$,而在右端是 $s_p=g(b)-g_p$.再设函数 $f(x)$ 在一切间断点 c_k 处并在区间端点处连续.设点 c_q 不是和(2)中分割区间的点,但 c_0 与 c_p 除外.在和(2)中,如一项里的 x_{k-1} 与 x_k 是在同一区间(c_{q-1},c_q)中,那么这项必等于零,因为在这情形下,$g(x_{k-1})=g(x_k)$.如果区间$[x_{k-1},x_k]$包含间断点 c_q,则当无限地细分区间时,$f(\xi_k)$ 趋向于 $f(c_q)$,$g(x_k)-g(x_{k-1})$ 趋向于 s_q,而显然(2)中的和趋向于下列的有穷和

$$\lim\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]=\sum_{q=0}^{p}f(c_q)s_q \tag{8}$$

如果点 c_q 是分割$[a,b]$的点,那么要考虑以 c_q 为端点的两个区间,而其结果一样.现在考察第二种特殊情形.设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在$[a,b]$中是连续的,而 $g(x)$ 在$[a,b]$中有导函数 $g'(x)$,并且后者是黎曼可积的,从而是有界的.对于差值 $g(x_k)-g(x_{k-1})$ 使用拉格朗日公式,可以把和(2)写成下面的形式

$$\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)g'(\xi'_k)(x_k-x_{k-1}) \tag{9}$$

而 ξ'_k 是位于$[x_{k-1},x_k]$内部的数.令 $f(\xi_k)=f(\xi'_k)+\varepsilon_k$,而既然 $f(x)$ 在$[a,b]$中是一致连续的,当无限地细分区间时,$|\varepsilon_k|$中的最大者趋向于零,也就是说,对于任意预定的正数 ε,存在一个正数 η,使由 $\delta<\eta$ 可知 $|\varepsilon_k|<\varepsilon$.于是可以把(9)中的和写成

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]=\sum_{k=1}^{n} f(\xi'_k)g'(\xi'_k)(x_k-x_{k-1})+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k g'(\xi'_k)(x_k-x_{k-1}) \tag{9'}$$

两个黎曼可积的函数的积还是可积分的，而在上面的公式中右边第一项当无限地细分区间时趋向于积 $f(x)g'(x)$ 的黎曼积分. 不难证明第二项趋向于零. 事实上，依假设，函数 $g'(x)$ 是有界的，就是说，有一确定的正数 M，使 $|g'(x)|<M$. 上面已经说过，如果预定一个正数 ε，必有一正数 η 存在，使由 $\delta<\eta$ 可知 $|\varepsilon_k|<\varepsilon$. 于是

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k g'(\varepsilon'_k)(x_k-x_{k-1})\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\varepsilon M(x_k-x_{k-1})=\varepsilon M(b-a)$$

而由此，既然 ε 是任意的，式(9′) 中右边的第二项趋向于零. 如此取极限可得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)=\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x \tag{10}$$

就是说，在第二种情形的假定下，斯蒂尔切斯积分蜕化成平常的黎曼积分. 在前面的第一种情形中，则蜕化成有穷和. 不难证明，如果不设 $f(x)$ 连续而设它是依黎曼可积分的，那么公式(10) 依然成立. 在以后我们将讨论上面所定义的斯蒂尔切斯积分存在的问题，也将论及一些将来再定义的更一般的积分的存在问题. 重要的是函数 $g(x)$ 将算作在 $[a,b]$ 内是不减的. 为简便起见，以后常把不减函数叫作增函数. 对于这样的函数 $g(b)$ 是其最大值，$g(a)$ 是其最小值. 下面一小节是准备性的. 它不但对于研究上面所定义的斯蒂尔切斯积分的存在问题有基本的意义，就是对于研究以后将介绍的更一般型的积分问题也是如此.

3. 达尔布和

在讨论黎曼积分时曾介绍过所谓达尔布和. 对于以后将介绍的一切一般积分的概念，相类似的和也起着基本的作用. 本小节中将就上面所定义的斯蒂尔切斯积分做出这种和，并研究其性质. 凡在本小节中介绍的概念与所证明的事实只要经过一些无关宏旨的改变就对于以后推广的积分概念仍然成立，将来常要参考本节的结果.

首先回忆一下实数集合的确界定义[见 Ⅰ;39]. 设有一实数集合 E，并设它是有上界的，就是说有一数 L 存在，使凡集合 E 中的数必小于 L. 如此则存在一确定的数 M，这数有下列特性：凡集合 E 中的数必不大于 M，而对于任意正数 ε 必有一属于集合 E 的数存在，这数大于 $M-\varepsilon$. 这数 M 叫作集合 E 的上确界. 同样如果集合有下界，就是说凡集合中的数必大于同一个固定数，那么这集合有一下确界 m，这数 m 有下列特性：凡集合 E 中的数必不小于 m，而对于任意正数 ε，集合 E 中必有小于 $m+\varepsilon$ 的数. 如果集合无上界，我们说它的上确界是 $+\infty$，而如果这集合无下界，我们说它的下确界是 $-\infty$. 确界的表示我们使用下面的

写法

$$m = \inf E,\quad M = \sup E$$

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是在区间$[a,b]$上有界的函数,而这区间可能是有穷的,也可能是无穷的,并且 $g(x)$ 是不减函数,又设有一种分割区间$[a,b]$成部分的方法

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

用 δ 表示这分割. 在区间左边无穷时,$a=-\infty$,而在区间右边无穷时,$b=+\infty$. 设 m_k 与 M_k 各是 $f(x)$ 在区间$[x_{k-1},x_k]$上值的下确界及上确界. 作与区间$[a,b]$的分割 δ 相应的达尔布 - 斯蒂尔切斯和

$$s_\delta = \sum_{k=1}^{n} m_k[g(x_k) - g(x_{k-1})],\quad S_\delta = \sum_{k=1}^{n} M_k[g(x_k) - g(x_{k-1})] \tag{11}$$

对于有界函数 $f(x)$,必有一正数 L 存在,使 $|f(x)| \leqslant L$. 注意 $g(x_k) - g(x_{k-1}) \geqslant 0$,对于任意分割 δ 可得

$$|s_\delta| \leqslant \sum_{k=1}^{n} L[g(x_k) - g(x_{k-1})] = L[g(b) - g(a)]$$

$$|S_\delta| \leqslant L[g(b) - g(a)]$$

与和(11)并列,还可以作下面的黎曼 - 斯蒂尔切斯和

$$\sigma_\delta = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)[g(x_k) - g(x_{k-1})] \tag{12}$$

而 ξ_k 是区间$[x_{k-1},x_k]$中的某一点. 注意 $m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k$,而 $g(x_k) - g(x_{k-1}) \geqslant 0$,则对任意的分割 δ 可得不等式

$$s_\delta \leqslant \sigma_\delta \leqslant S_\delta \tag{13}$$

现在介绍一些新名词. 分割 δ' 称作分割 δ 的后继,是指分割 δ 的一切分割点也是分割 δ' 的分割点. 设 δ_1 与 δ_2 是两个任意分割. 取一新分割,使其分割点是由 δ_1 及 δ_2 两分割的分割点合并而成的. 这新的分割叫作分割 δ_1 及 δ_2 的积,并表示成 $\delta_1\delta_2$. 显然分割 $\delta_1\delta_2$ 既是 δ_1 的后继,也是 δ_2 的后继. 对于任意有穷个分割,也可以定义积 $\delta_1\delta_2\cdots\delta_n$ 的概念. 还要注意和 s_δ 与 S_δ 只与分割 δ 的选择有关,而和 σ_δ 则随点 ξ_k 的选择而变化. 现在证明几个很简单的定理.

定理 1 如果分割 δ' 是分割 δ 的后继,那么 $s_{\delta'} \geqslant s_\delta$,$S_{\delta'} \leqslant S_\delta$.

以证明不等式 $s_{\delta'} \geqslant s_\delta$ 为例. 由 δ 换成 δ' 时,分割 δ 中的每一部分区间又分成有穷个部分

$$x_{k-1} = x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \cdots < x_{p_k-1}^{(k)} < x_{p_k}^{(k)} = x_k$$

而和 s_δ 中的项 $m_k[g(x_k) - g(x_{k-1})]$ 换成下列的和

$$\sum_{s=1}^{p_k} m_s^{(k)}[g(x_s^{(k)}) - g(x_{s-1}^{(k)})]$$

其中 $m_s^{(k)}$ 是函数 $f(x)$ 在区间$[x_{s-1}^{(k)},x_s^{(k)}]$上的下确界. 显然 $m_s^{(k)} \geqslant m_k$,所以,注

意差值 $g(x_s^{(k)})-g(x_{s-1}^{(k)})$ 不能是负数，可得

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{p_k} m_s^{(k)}[g(x_s^{(k)})-g(x_{s-1}^{(k)})] &\geqslant \sum_{s=1}^{p_k} m_k[g(x_s^{(k)})-g(x_{s-1}^{(k)})]\\ &= m_k[g(x_k)-g(x_{k-1})]\end{aligned}$$

而定理证明了(参照[Ⅰ;122]).

定理 2 如果 δ_1 及 δ_2 是任意两分割，那么 $s_{\delta_1}\leqslant S_{\delta_2}$.

对于同一分割的不等式 $s_\delta\leqslant S_\delta$ 可以由下面两关系直接导出：$m_k\leqslant M_k$，$g(x_k)-g(x_{k-1})\geqslant 0$. 如此对于分割 $\delta_1\delta_2$，$s_{\delta_1\delta_2}\leqslant S_{\delta_1\delta_2}$. 另一方面，依定理 1，$s_{\delta_1}\leqslant s_{\delta_1\delta_2}$，$S_{\delta_2}\geqslant S_{\delta_1\delta_2}$，由此可知 $s_{\delta_1}\leqslant S_{\delta_2}$.

用 i 表示和 s_δ 对于一切可能分割 δ 的上确界，而用 I 表示和 S_δ 对于一切可能分割 δ 的下确界

$$i=\sup s_\delta,\quad I=\inf S_\delta \tag{14}$$

由确界的定义，并依定理 2 直接可知：对于任意两分割 δ_1，δ_2，不等式 $s_{\delta_1}\leqslant i\leqslant I\leqslant S_{\delta_2}$ 成立，特别是

$$s_\delta\leqslant i\leqslant I\leqslant S_\delta \tag{15}$$

现在举出上下确界 i 与 I 相等的充分必要条件. 关于这点，下面差值起着基本的作用

$$S_\delta-s_\delta=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})] \tag{16}$$

定理 3 i 与 I 相等的充分必要条件是存在一序列分割 $\delta_n(n=1,2,\cdots)$，使 $S_{\delta_n}-s_{\delta_n}\to 0$.

证明其充分性. 如果有分割序列 δ_n 存在，使 $S_{\delta_n}-s_{\delta_n}\to 0$，那么把不等式 (15) 应用于这序列可知 $i=I$.

证明其必要性. 设 $i=I=A$. 由于确界的定义，存在分割序列 δ'_n，使 $s_{\delta'_n}\to A$，也存在分割序列 δ''_n，使 $S_{\delta''_n}\to A$. 取分割序列 $\delta_n=\delta'_n\delta''_n$. 依定理 1，$s_{\delta_n}\geqslant s_{\delta'_n}$，$S_{\delta_n}\leqslant S_{\delta''_n}$，所以 $s_{\delta'_n}$ 与 s_{δ_n} 小于或等于 A，而 $S_{\delta''_n}$ 与 S_{δ_n} 大于或等于 A. 如此 $s_{\delta_n}\to A$，$S_{\delta_n}\to A$，所以 $S_{\delta_n}-s_{\delta_n}\to 0$，从而定理证明了. 必须注意，在序列 δ_n 中部分区间不必无限地细分. 例如可能一切分割 δ_n 都是同一分割 δ. 由(15) 直接可得下面的结论：

系 如果 $S_{\delta_n}-s_{\delta_n}\to 0$，那么 $i=I$，$s_{\delta_n}\to i$，$S_{\delta_n}\to i$.

上面所述的关于等式 $i=I$ 的充分必要条件可以借助和 σ_δ 表示出来.

定理 4 差值 $S_{\delta_n}-s_{\delta_n}$ 趋向于零的充分必要条件是无论如何选择点 $\xi_k^{(n)}$，σ_{δ_n} 有确定的极限，而如果这条件满足，那么 σ_{δ_n} 的极限是 i(或 $I=i$).

证明其必要性. 如果 $S_{\delta_n}-s_{\delta_n}\to 0$，那么如上所说，$s_{\delta_n}\to i$，$S_{\delta_n}\to i$，所以 $\sigma_{\delta_n}\to i$，因为 σ_{δ_n} 满足不等式 $s_{\delta_n}\leqslant\sigma_{\delta_n}\leqslant S_{\delta_n}$. 再证明其充分性. 设

$$\sigma_{\delta_n}=\sum_{k=1}^{p_n} f(\xi_k^{(n)})[g(x_k^{(n)})-g(x_{k-1}^{(n)})]\to A$$

而 $x_k^{(n)}$ 是分割 δ_n 的分割点,$\xi_k^{(n)}$ 是区间$[x_{k-1}^{(n)},x_k^{(n)}]$中的某点.用 $M_k^{(n)}$ 及 $m_k^{(n)}$ 各表示 $f(x)$ 在区间$[x_{k-1}^{(n)},x_k^{(n)}]$上值的上下确界.设 ε 是任意预定的正数.依条件 $\sigma_{\delta_n}\to A$,必存在一数 N,使无论怎样选择 $\xi_k^{(n)}$,当 $n>N$ 时

$$|A-\sigma_{\delta_n}|\leqslant\varepsilon \tag{17}$$

依确界的定义可以选择点 $\xi_k^{(n)}$,使不等式 $0\leqslant f(\xi_k^{(n)})-m_k^{(n)}\leqslant\varepsilon$ 成立.如此

$$\begin{aligned}0\leqslant\sigma_{\delta_n}-s_{\delta_n}&=\sum_{k=1}^{p_n}[f(\xi_k^{(n)})-m_k^{(n)}][g(x_k^{(n)})-g(x_{k-1}^{(n)})]\\&\leqslant\sum_{k=1}^{p_n}\varepsilon[g(x_k^{(n)})-g(x_{k-1}^{(n)})]=\varepsilon[g(b)-g(a)]\end{aligned} \tag{18}$$

所以,如果把差值 $A-s_{\delta_n}$ 表示成 $A-s_{\delta_n}=(A-\sigma_{\delta_n})+(\sigma_{\delta_n}-s_{\delta_n})$,依(17)与(18)可得

$$|A-s_{\delta_n}|\leqslant|A-\sigma_{\delta_n}|+|\sigma_{\delta_n}-s_{\delta_n}|\leqslant\varepsilon[1+g(b)-g(a)]$$

当 $n>N$ 时必成立.既然 ε 是任意的,可知 $s_{\delta_n}\to A$.同样可证 $S_{\delta_n}\to A$,所以 $S_{\delta_n}-s_{\delta_n}\to 0$,而定理证明了.显然极限 A 等于数 i 与 I,而后两者在现情形下是相等的.由本定理与上一定理可以直接推出下面的系:

系 等式 $i=I$ 成立的充分必要条件是存在分割序列 δ_n,使无论怎样选择点 $\xi_k^{(n)}$,σ_{δ_n} 恒有固定的极限.如果这条件满足,那么这极限等于 i(也等于 $I=i$).

定理 5 如果对于分割序列 δ_n,σ_{δ_n} 有确定的极限,而 δ'_n 是 δ_n 的后继,那么 $\sigma_{\delta'_n}$ 也有相同的极限.

依定理 5 与定理 4 的条件可知 $S_{\delta_n}-s_{\delta_n}\to 0$.依定理 1,$s_{\delta'_n}\geqslant s_{\delta_n}$ 而 $S_{\delta'_n}\leqslant S_{\delta_n}$.所以 $S_{\delta'_n}-s_{\delta'_n}\to 0$,也就是说 $\sigma_{\delta'_n}\to i$,而定理证明了.

在黎曼积分的情形,$g(x)=x$,以前[Ⅰ;112]证明对于任意有界函数 $f(x)$,无限地细分部分区间时,$s_{\delta_n}\to i$,$S_{\delta_n}\to I$.如此在黎曼积分的情形,等式 $i=I$ 与下面的命题同效,即和 σ_δ 当无限地细分部分区间时有确定的极限值,而且这极限值等于 i.在一般情形中,并非如此.如果当无限地细分各部分区间时 σ_δ 有确定的极限,那么 $i=I$,这由定理 4 的系可知.但反过来的结论是不正确的.由 $i=I$ 只能推知有分割序列 δ_n 存在,使 σ_{δ_n} 有确定的极限.但不能断定在无限地细分部分区间时,对于一切分割序列 σ_δ 都有确定的同一极限①.在上述的斯蒂尔切斯积分定义中,曾要求当无限地细分各部分区间时,σ_δ 有确定的极限.在下面推广的积分概念中我们把这要求减弱,只要求等式 $i=I$ 成立.此外,将扩

① 设当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时,$f(x)=0$;当 $0<x\leqslant 1$ 时,$f(x)=1$.当 $-1\leqslant x<0$ 时,$g(x)=0$;当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$g(x)=1$.那么不难看出 $i=I=0$,而如果取 δ_n 使它们每个的部分区间都不含 0 作内点,则 $\sigma_{\delta_n}\to 0$.但如果 δ 中的一分区间含 0 为内点,设这部分区间是$[x_{i-1},x_i]$,则 $\sigma_\delta=f(\xi_i)$,因而 $\sigma_\delta=0$ 或 1,视 $\xi_i\leqslant 0$ 或 $\xi_i>0$ 而定,因而 σ_δ 并无确定的极限.——译者注

张分解积分的基本区间为部分的方法，在下面论新积分定义时再详加解释. 下节中将回到在第 2 小节中定义的斯蒂尔切斯积分，并叙述其存在性的一个重要的充分条件.

4. 连续函数的斯蒂尔切斯积分

定理 1 如果 $f(x)$ 在有穷区间$[a,b]$上是连续的，而 $g(x)$ 是不减的有界函数，那么 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上依 $g(x)$ 的斯蒂尔切斯积分必存在.

注意不等式(13) 与(15)，可知

$$|i-\sigma_\delta|\leqslant S_\delta-s_\delta=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})] \tag{19}$$

设 ε 是预定的正数. 既然 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上是一致连续的，必存在一个正数 η，使当差值 x_k-x_{k-1} 中最大者不超过 η 时，$0\leqslant M_k-m_k\leqslant\varepsilon(k=1,2,\cdots,n)$ 成立. 依这不等式，由(19) 可知 $|i-\sigma_\delta|\leqslant\varepsilon[g(b)-g(a)]$，所以无限地细分各个区间时，$\sigma_\delta\to i$. 同样可证 $\sigma_\delta\to I$，所以 $i=I$. 这等式也可以由定理 4 的结论直接推出，因为当无限地细分各个区间时，σ_δ 有定极限.

无穷的积分区间在斯蒂尔切斯积分的情形并不起重大的作用. 只需解释一下，所谓无限地细分无穷区间的部分区间究竟是怎样的. 例如考察区间$[-\infty,+\infty]$. 我们说在一个分这区间为有穷多部分区间的分割序列中，这些部分区间无限地细分，是指对于任意预定的正数 A，相应于一切与$[-A,+A]$相交的部分区间$[x_{k-1},x_k]$，差值 x_k-x_{k-1} 中最大者趋向于零. 如果 $\varphi(x)$ 在区间$[-\infty,+\infty]$中是连续的，并且是严格地增的，就是说当 $\beta>\alpha$ 时 $\varphi(\beta)>\varphi(\alpha)$，那么变数代换 $t=\varphi(x)$ 把区间$[-\infty,+\infty]$映象成有穷区间$[a,b]$，而 $a=\varphi(-\infty)$，$b=\varphi(+\infty)$. 对于$[-\infty,+\infty]$的无限地细分的分割法就变成了平常对于有穷区间$[a,b]$的无限地细分的分割法.

例如设 $f(x)$ 在闭区间$[-\infty,+\infty]$上连续，而 $g(x)$ 是有界而不减的，那么积分与以前一样是存在的. 为了证明这点，只需把 x 代换成新变数 $t=\arctan x$. 令

$$f(\tan t)=f_1(t),\quad g(\tan t)=g_1(t)$$

我们就把无穷区间$[-\infty,+\infty]$上的积分表达为有穷区间$\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$上的积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}g(x)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}f_1(t)\mathrm{d}g_1(t)$$

且 $f_1(t)$ 是在区间$\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$中连续的，而 $g_1(t)$ 在其上有界而不减.

现在指出斯蒂尔切斯积分存在的基本定理的一个实用的重要变形：

定理 2 如果 $f(x)$ 在积分区间内部是连续而且有界的，而不减函数 $g(x)$

在区间两端是连续的,那么 $f(x)$ 依 $g(x)$ 可积分.

设积分区间是无穷区间$[-\infty,+\infty]$.

估计一下公式(19)右边的各项.既然 $f(x)$ 是有界的,可知有一固定的正数 L 存在,使 $|f(x)|\leqslant L$,所以 $0\leqslant M_k-m_k\leqslant 2L$.式(19)的和中相应于不与$[-A,A]$相交的区间$[x_{k-1},x_k]$的各项之和不大于

$$2L[g(-A)-g(-\infty)]+2L[g(+\infty)-g(A)] \tag{20}$$

依 $g(x)$ 在点 $\pm\infty$ 处连续的假设,可以取 A 足够大,使式(20)小于任意预定的正数 ε.如此固定了 A,并考察(19)的和中其余各项.这些区间$[x_{k-1},x_k]$或者整个包含在$[-A,+A]$之中,或者两端的两个可能溢出了$[-A,+A]$,而其溢出部分的长不大于 η,这里的 η 是相应于一切与$[-A,+A]$相交各个区间的差值 x_k-x_{k-1} 中的最大的.当无限地细分各个部分区间时,数 η 趋向于零,因而自从分割的某一阶段之后,这数一定小于1.如此从分割的某一阶段之后,所考虑的一切区间$[x_{k-1},x_k]$必属于$[-A-1,A+1]$,而在此后一区间上 $f(x)$ 是一致连续函数.依此,对于足够小的值 η,可得 $0\leqslant M_k-m_k\leqslant\varepsilon$,而由此,在式(19)的和中凡相应于与$[-A,+A]$相交的区间$[x_{k-1},x_k]$的各项可以估计如下

$$0\leqslant(M_k-m_k)[g(x_k)-g(x_{k-1})]\leqslant\varepsilon[g(x_k)-g(x_{k-1})]$$

而这些项的和不大于

$$\varepsilon[g(A+1)-g(-A-1)]$$

最后由不等式(19)得

$$|i-\sigma_\delta|\leqslant\varepsilon[1+g(A+1)-g(-A-1)]\leqslant\varepsilon[1+g(+\infty)-g(-\infty)]$$

既然 ε 是任意的,可知 $\sigma_\delta\to i$,定理证毕.

注意在 $f(x)$ 是连续函数而 $g(x)$ 是增函数的情形下,斯蒂尔切斯积分的一些补充性质.如果 $|f(x)|\leqslant L$,那么

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)\right|\leqslant L[g(b)-g(a)] \tag{21}$$

这可以由对和 σ_δ 的估值并取极限得出.显然中值定理成立[Ⅰ;92]

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)=f(\xi)[g(b)-g(a)]\quad(\xi\in[a,b]) \tag{21'}$$

现在设在$[a,b]$中连续的函数 $f_n(x)$ 所组成的序列在这区间中一致收敛于极限函数 $f(x)$.后者在$[a,b]$中必然也是连续的,所以是依 $g(x)$ 可积分的.依序列 $f_n(x)$ 的一致收敛性,对于任意预定的正数 ε,必有一数 N 存在,使每当 $n>N$ 而 $x\in[a,b]$ 时,恒有 $|f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon$.应用估计(21),得

$$\left|\int_a^b[f(x)-f_n(x)]\mathrm{d}g(x)\right|\leqslant\varepsilon[g(b)-g(a)]$$

由此既然 ε 是任意的,得

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\mathrm{d}g(x)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x) \tag{22}$$