当代世界中的数学

数学问题

朱惠霖 田廷彦◎编

SHUXUE WENTI

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

当代世界中的数学

数学问题

朱惠霖 田廷彦◎编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书详细介绍了数学在各领域的精华应用，由当代著名数学家的论文汇集而成，共收录了26篇文章，其中包括数学中的典故和典型问题并予以解答. 本书可供高等院校师生及数学爱好者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

当代世界中的数学. 数学问题/朱惠霖，田廷彦编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2019.1

ISBN 978－7－5603－7681－3

Ⅰ. ①当…　Ⅱ. ①朱…　②田…　Ⅲ. ①数学－普及读物
Ⅳ. ①O1－49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 224127 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　邵长玲
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 14.5　字数 292 千字
版　　次　2019 年 1 月第 1 版　2019 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－7681－3
定　　价　38.00 元

序　　言

如今，许多人都知道，国际科学界有两本顶级的跨学科学术性杂志，一本是《自然》(*Nature*)，一本是《科学》(*Science*).

恐怕有许多人还不知道，在我们中国，有两本与之同名的杂志[①]，而且也是跨学科的学术性杂志，只是通常又被定位为"高级科普".

国际上的《自然》和《科学》，一家在英国，一家在美国[②]. 它们之间，按维基百科上的说法，是竞争关系[③].

我国的《自然》和《科学》，都在上海，它们之间，却有着某种历史上的"亲缘"关系. 确切地说，从1985年(那年《科学》复刊)到1994年(那年《自然》休刊)这段时期，这两家杂志的主要编辑人员，原本是在同一个单位、同一幢楼、同一个部门，甚至是在同一个办公室里朝夕相处的同事!

这是怎么回事呢?

这本《自然》杂志，创刊于1978年5月. 那个年代，被称为"科学的春天". 3月，全国科学大会召开. 科学工作者、教育工作者，乃至莘莘学子，意气风发. 在这样的氛围下，《自然》的创刊，是一件大事. 全国各主要媒体，都报道了.

这本《自然》杂志，设在上海科学技术出版社，由刚刚复出的资深出版家贺崇寅任主编，又调集精兵强将，组成了一个业务水平高、工作能力强、自然科学各分支齐备的编辑班子. 正是这个编辑班子，使得《自然》杂志甫一问世，便不同凡响；没有几年，便蜚声科学界和教育界[④].

1983年，当这个班子即将一分为二的时候，上海市出版局经办此事的一位副局长不无遗憾地说，在上海出版界，还从未有过如此整齐的编辑班子呢!

一分为二? 没错. 1983年，中共上海市委宣传部发文，将《自然》杂志调往上海交通大学. 为什么? 此处不必说. 我只想说，这次强制性的调动，却有一项

---

① 其中的《自然》杂志，在创刊注册时，不知什么原因，将"杂志"两字放进了刊名之中，因此正式名称是《自然杂志》. 但在本文中，仍称其为《自然》或《自然》杂志. 此外，应该说明，在我国台湾，也有两本与之同名的杂志，均由民间(甚至个人)资金维持. 台湾的《自然》，创刊于1977年，系普及性刊物，内容以动植物为主，兼及天文、地理、考古、人类、古生物等，1996年终因财力不济而停办. 台湾的《科学》，正式名称《科学月刊》，创刊于1970年，以介绍新知识为主，"深度以高中及大一学生看得懂为原则"，创刊至今，从未脱期，令人赞叹.

② 英国的《自然》，创刊于1869年，现属自然出版集团(Nature Publishing Group)，总部在伦敦. 美国的《科学》，创刊于1880年，属美国科学促进会(American Association for the Advancement of Science)，总部在华盛顿.

③ 可参见 http://en.wikipedia.org/wiki/Science_(journal).

④ 可参见《瞭望东方周刊》2008年第51期上的"一本科普杂志的30年'怪现象'"一文.

十分温情的举措，即编辑部每个成员都有选择去或不去的权利. 结果是，大约一半人选择去交通大学，大约一半人选择不去，留在了上海科学技术出版社.

我属去的那一半. 留下的那一半，情况如何，一时不得而知. 但是到 1985 年，便知道了：他们组成了《科学》编辑部，《科学》杂志复刊了！

《科学》，创刊于 1915 年 1 月，是中国历时最长、影响最大的综合性科学期刊，对于中国现代科学的萌发和成长，有着独特的贡献. 中国现代数学史上有一件一直让人津津乐道的事：华罗庚先生当年就是在这本杂志上发表文章而崭露头角的.《科学》于 1950 年 5 月停刊，1957 年复刊，1960 年又停刊. 1985 年的这次复刊，其启动和运作，外人均不知其详，但我相信，留下的原《自然》杂志资深编辑，特别是吴智仁先生和潘友星先生，无疑是起了很大的甚至是主要的作用的. 复刊后的《科学》，由时为中国科学院副院长的周光召任主编，上海科学技术出版社出版.

于是，原来是一个编辑班子，结果分成两半(各自又招了些人马)，一半随《自然》杂志披荆斩棘，一半在《科学》杂志辛勤劳作.

《自然》杂志去交通大学后，命运多舛. 1987 年，中共上海市委宣传部又发文：将《自然》杂志从交通大学调出，“挂靠”到上海市科学技术协会，属自收自支编制. 至 1993 年底，这本杂志终因入不敷出，编辑流失殆尽(整个编辑部，只剩我一人)，不得不休刊了. 1994 年，上海大学接手. 原有人员，先后各奔前程.《自然》与《科学》的那种“亲缘”关系，至此结束.

这段多少有点辛酸的历史，在我编这本集子的过程中，时时在脑海里浮现，让我感慨，让我回味，也让我思索……

好了，不管怎么说，眼前这件事还是让人欣慰的：在近 20 年之后，《自然》与《科学》的数学部分，竟然在这本集子里“久别重逢”了！

说起这次“重逢”，首先要感谢原在上海教育出版社任副编审的叶中豪先生. 是他，多次劝说我将《自然》杂志上的数学文章结集成册；是他，了解《自然》和《科学》的这段“亲缘”关系，建议将《科学》杂志上的数学文章也收集进来，实现了这次“重逢”；又是他，在上海教育出版社申报这一选题，并获得通过.

其次，要感谢哈尔滨工业大学出版社的刘培杰先生. 是他，当这本集子在上海教育出版社的出版遇到困难时，毅然伸手相助，接下了这项出版任务[①].

当然，还要感谢与我共同编这本集子的《科学》杂志数学编辑田廷彦先生. 是他，精心为这本集子选编了《科学》杂志上的许多数学文章.

他们三人，加上我，用时下很流行的说法，都是不折不扣的“数学控”. 我们

① 说来有趣，我与刘培杰先生从未谋面，却似乎有“缘”已久. 这次选编这本集子，发觉他早年曾向《自然》杂志投稿，且被我录用，即收入本集子的《费马数》一文. 屈指算来，那该是 20 年前的事了.

以我们对数学的热爱和钟情，为广大数学研究者、教育者、普及者、学习者和爱好者（相信其中也有不少的“数学控”）献上这本集子，献上这些由国内外数学家、数学史家和数学普及作家撰写的精彩数学文章.

这里所说的“数学文章”，不是指数学上的创造性论文，而是指综述性文章、阐释性文章、普及性文章，以及关于人物和史实的介绍性文章. 其实，这些文章，都是可让大学本科水平的读者基本上看得懂的数学普及文章.

按美国物理学家、科学普及作家杰里米·伯恩斯坦（Jeremy Bernstein，1929— ）的说法，在与公众交流方面，数学家排在最后一名[①]. 大概是由于这个原因，国际上的《自然》和《科学》，数学文章所占的份额，相当有限.

然而，在我们的《自然》和《科学》上，情况并非如此. 在《自然》杂志上，从 1984 年起就常设“数林撷英”专栏，专门刊登数学中有趣的论题；在《科学》杂志上，则有类似的“科学奥林匹克”专栏. 许多德高望重的数学大师，愿意在这两本杂志上发表总结性、前瞻性的综述；许多正在从事前沿研究的数学家，乐于将数学顶峰上的无限风光传达给我们的读者. 在数学这个需要人类第一流智能的领域，流传着说不完道不尽的趣事佳话，繁衍着想不到料不及的奇花异卉. 这些，都在这两本杂志上得到了充分的反映.

在编这本集子的时候，我们发觉，《自然》（在下文所说的时期内）和《科学》上的数学好文章是如此之多，多得简直令人苦恼：囿于篇幅，我们必须屡屡面对“熊掌与鱼”的两难，最终又不得不忍痛割爱. 即使这样，篇幅仍然宏大，最终不得不考虑分册出版.

现在这本集子中的近 200 篇文章，几乎全部选自从 1978 年创刊至 1993 年年底休刊前夕这段时期的《自然》杂志，和从 1985 年复刊至 2010 年年底这段时期的《科学》杂志. 它们被分成 12 个版块，每个版块中的文章，基本上以发表时间为序，但少数文章被提到前面，与内容相关的文章接在一起.

还要说明的是，在“数学的若干重大问题”版块中，破例从《世界科学》杂志上选了两篇本人的译作，以全面反映当时国际数学界的大事；在“数学中的有趣话题”版块中，破例从台湾《科学月刊》上选了一篇“天使与魔鬼”，田廷彦先生对这篇文章钟爱有加；在“当代数学人物”版块中，所介绍的数学人物则以 20 世纪以来为限.

这本集子中的文章，在当初发表时，有些作者和译者用了笔名. 这次选入，仍然不动. 只是交代：在这些笔名中，有一位叫“淑生”的，即本人也.

照说，选用这些文章，应事先联系作译者，征求意见，得到授权. 但有些作译

---

① 参见 Mathematics Today：Twelve Informal Essays，Springer-Verlag（1978）p. 2. Edited by Lynn Arthur Steen.

者，他们的联系方式，早已散失；不少作译者，由于久未联系，目前的通信地址也不得而知；还有少数作译者，已经作古，我们不知与谁联系. 在这种情况下，我们只能表示深深的歉意. 更有许多作译者，可说是我们的老朋友了，相信不会有什么意见，不过在此还是要郑重地说一声：请多多包涵.

在这些文章中，也融入了我们编辑的不少心血. 极端的情况是：有一两篇文章是编辑根据作者的演讲提纲，再参考作者已发表的论文，越俎代庖地写成的. 尽管我们做编辑这一行的，“为他人作嫁衣裳”，似乎是份内的事，但在这本集子出版的时候，我还是将要为这些文章付出过劳动、做出过贡献的编辑，一一介绍如下，并对其中我的师长和同仁、同行，诚致谢忱.

《自然》上的数学文章，在我 1982 年 2 月从复旦大学数学系毕业到《自然》杂志工作之前，基本上由我的恩师陈以鸿先生编辑；在这之后到 1987 年先生退休，是他自己以及我在他指导下的编辑劳动的成果. 此后，又有张昌政先生承担了大量编辑工作；而计算机方面的有关文章，在很大程度上则仰仗于徐民祥先生.

《科学》上的数学文章，在复刊后，先是由黄华先生负责编辑，直至 1996 年他出国求学；此后便是由田廷彦先生悉心雕琢，直到现在；其间静晓英女士也完成了一些工作. 当然，《科学》杂志负责复审和终审的编审，如潘友星先生、段韬女士，也是付出了心血的.

回顾往事，感悟颇多. 但作为这两本杂志的编辑，应该有这样的共同感受：一是荣幸，二是艰辛. 荣幸方面就不说了，而说到艰辛，无论是随《自然》杂志流离，还是在《科学》杂志颠沛，都可用八个字来概括：“筚路蓝缕，以启山林”.

是的，筚路蓝缕，以启山林！

如今，蓦然回首，我看到了：

一座巍巍的山，一片苍苍的林！

《自然》杂志原副主编兼编辑部主任

朱惠霖

2017 年 5 月于沪西半半斋

◎ 目录

关于希尔伯特第 16 问题
—— 我国数学工作者的新贡献[①]

1900 年，著名数学家希尔伯特(Hilbert)在国际数学家大会上提出了 23 个未解决的问题. 80 年来的数学发展表明，这些问题的提出是有巨大影响的. 时至今日，这 23 个问题中有的已圆满解决，有的则取得了很大进展. 唯独第 16 问题的问津者不多，进展亦不快.

希尔伯特第 16 问题的后半部分是属于常微分方程定性理论范围内. 这个理论中一个主要的研究对象是下面形式的微分方程 —— 二阶定常系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(x,y),\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q(x,y) \tag{1}$$

由于(1) 只涉及两个变量 x,y，因而(1) 的解 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 实际上可以看成是平面上的曲线，而当这条曲线通过点(x_0,y_0)时，它就称为(1) 的过(x_0,y_0)的积分曲线或轨线. 作为特例，若恰好有 x_0,y_0 使 $P(x_0,y_0)=Q(x_0,y_0)=0$，那么 $x\equiv x_0$，$y\equiv y_0$ 就可以满足(1) 而成为一条轨线，但这条轨线实际上只是一点 —— 奇点. 除了一些简单的特殊情况外，(1) 往往不能用初等方法求解，而只能用庞加莱所首创又经后人大大发展了

① 罗定军，《自然杂志》第 3 卷(1980 年) 第 4 期.

的定性方法去确定积分曲线的全局性态①,这就是定性理论的基本课题.

历经将近一个世纪,定性理论已有了很大的发展,特别是最近20年来,又形成了流形上的可微动力系统这样一个甚为抽象而又深刻的分支.但就方程(1)本身所代表的平面定性理论而言,进展并不算快,20世纪50年代以前大量的工作都是属于局部(主要是关于奇点)的研究,至于全局(全平面)的或称大范围的分析则结果甚少,且都是比较零碎的.

对确定积分曲线的全局性态起重要作用的特殊轨线,除了上面提及的奇点外,就是极限环了.例如图1中O为奇点,Γ为极限环.极限环是xOy平面上的孤立封闭轨线(即当解$x(t),y(t)$是t的周期函数时),它的任何邻域内都包含(1)的封闭轨线.极限环的存在性、个数以及位置分布等问题是全局定性理论中极其重要而又非常困难的问题.希尔伯特第16问题的后半部分就是把$P(x,y),Q(x,y)$作了重要限制而提出的,它的提法是:当P,Q为不高于n次的实系数多项式时,方程(1)最多有几个极限环?其相对位置又如何?但即使这样,问题仍然非常困难.关于这个问题的研究状况是:

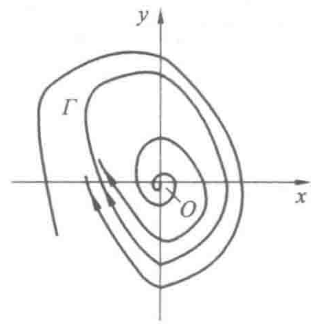

图1　奇点和极限环

当$n=1$,即(1)中的P,Q为一次多项式时,易知这类系统没有极限环,且轨线的全局性状态早已得出,一般常微分方程基础教材中均有介绍.而当$n=2$,即二次系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P_2(x,y),\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Q_2(x,y) \tag{2}$$

的问题则复杂得多.1955年,著名数学家、苏联科学院院士彼得洛夫斯基和他的学生朗吉士用较高深的拓扑学和复变函数方法证明了(2)的极限环不多于三个.可是这个轰动一时的结果,20世纪60年代以后被发现是有问题的,经西方学者指出后,彼得洛夫斯基本人也声明文中的关键性引理的证明有错误.但究竟是证明方法有问题,还是"不超过三个极限环"的结论有问题呢?这一直是个谜.

我国数学工作者对于解开这个谜做出了重要的贡献,从而推进了对第16问题的研究.南京大学数学系教师王明淑同志和中国科学院研究生史松龄同志差不多同时各自独立地、从不同角度出发用不同方法做出了具有四个极限环的二次系统.他们得到的不同系统都具有所谓(1,3)分布的极限环:即在一个奇点外围有一个、另一奇点外围套有三个极限环(图2)[23,24].这就用具体实例彻

① 所谓全局性态是指整个xOy平面上轨线的总体分布,其位置、形状的特征等.

底否定了前述“不超过三个极限环”的论断.

我国数学工作者能做出这一贡献并非偶然. 早在1955年,我国常微分方程方面的学者就开始了对二次系统的研究,做了大量深入细致的工作,到目前为止围绕这一主题已发表论文不下30篇. 稍后,苏联学者也有很多人投入这方面的研究,他们的论文总数似乎比我国的还多. 对于希尔伯特所提出的极限环的相对位置问题,在1957年至1958年间我国学者就得到了下述一些比较基本的结果:任何二次系统的极限环一定是凸闭曲线,其内部只含有一个指标为1的奇点,而且每一确定的二次系统所可能具有的极限环最多只能分别出现在两个指标为1的奇点外围,也就是说,排除了三个以至更多个极限环各自包含一个奇点的可能性,也排除了一个极限环内部包含着另外两个或更多个互不包含的极限环的可能性(图3),同时还举例说明(2)的极限环的(1,1)与(1,2)分布是确实存在的. 此外,文献[7]则给出系统(2)以二次代数曲线(即椭圆)为极限环的充要条件以及此极限环的唯一性的证明,这也是一个比较完整的结果. 正是由于在这一领域的长期艰苦努力,才获得了目前这项新成就.

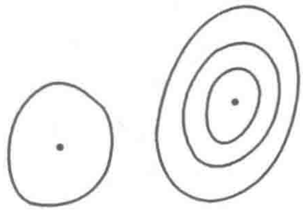

图2　极限环的(1,3)分布

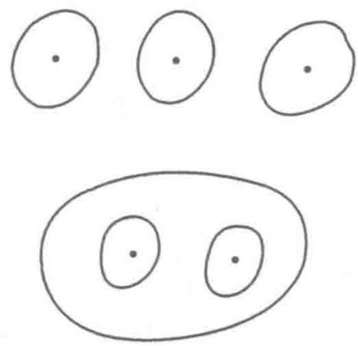

图3　两种不可能出现的极限环相对位置

必须指出的是,二次定常系统的研究对于实际应用也是有重大意义的. 物理、工程等方面的许多数学模型都涉及极限环问题,譬如三极电子管的振荡被描述为一个二阶常微分方程,它很容易地化为方程(2)的形式,而三极管中的稳定的等幅振荡也就对应于(2)的极限环. 此外,现代科学技术中的大量实际问题,都可归结为一些特殊的二次系统来研究. 例如某些电振荡回路可数学地描述为二阶非线性常微分方程[28]:$\ddot{x}+x=\alpha\dot{x}+\beta x\dot{x}+\gamma\dot{x}$①,再令$\dot{x}=y$,则可化为(2)型方程组,这也是后面要提到的Ⅰ类系统(3)的一种. 又如天体物理中的Emden－Fowles方程、流体力学中的Blasius方程以及生物学中的生存竞争模型等,都可在适当的变量代换下最终化为形如

$$\dot{x}=x(a_0+a_1x+a_2y),\dot{y}=y(b_0+b_1x+b_2y)$$

的系统,显然这也是(2)的特殊情况.

① 在应用学科中常以$\dot{x}$,$\dot{y}$表示x,y对时间t的导数$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$,$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. 相应地,$\ddot{x}$表示$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$.

虽然各国数学家(包括我国的数学家)对二次定常系统做了大量的研究,但对于系统(2)的极限环的最多个数以至进一步拓广希尔伯特问题而去分析(2)的轨线的全局拓扑结构问题,则离彻底解决问题还有着一段距离.

为了研究全局结构问题,文献[8]之一首先将系统(2)可能具有极限环的方程分为三类.对其中的 Ⅰ 类系统,即方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x \tag{3}$$

通过资料[8]之二、[9～12]的努力,问题已基本解决,即证明了系统(3)最多只有一个极限环①.至于 Ⅱ 类方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x(1+ax),a\neq 0$$

和 Ⅲ 类方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y+\delta x+lx^2+mxy+ny^2,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x(1+ax+by),b\neq 0$$

则情况更为复杂,可以在两个指标为1的奇点外围各有一定数量的极限环一个套着一个.到目前为止,国内外已有不少工作讨论了一些特殊的 Ⅱ、Ⅲ 类方程极限环的不存在性、唯一性、环的集中分布(即只在一个奇点外围有环)以及全局结构等问题,其中有一些结果是比较完整的(可参看[16－22]及[28]的有关部分).但总的来说,系统(2)所具有的极限环最多是几个,这还是个未知数.从历史上来看,希尔伯特问题提出后,1923年法国数学家H.杜拉克(Dulac)证明了一般的 n 次系统只能有有限个极限环[1],这当然适用于二次系统.M.弗罗米尔(Frommer)于1934年还讨论了系统(2)存在中心点的充要条件[2].后来许多事实证明中心点问题与极限环问题是密切相关的,从而显示出他们的工作的重要性.1952年,苏联的H.H.巴乌京(Баутин)利用后继函数法巧妙地证明了系统(2)在奇点的小邻域中最多只能出现三个极限环的结论[3],他的方法也是[23,24]的重要基础,必须注意的是这只是奇点邻近的局部性结果.首先给出全局性结论的是前述彼得洛夫斯基的论断,现在我国学者已做出了不少于四个极限环的两个实例,这不管是在实用上还是在理论上都是很有意义的.

我国数学工作者关于四个极限环的实例的举出,使得过去认为已经解决了的极限环的相对位置问题又出现了新的难题.就是说,现已得知系统(2)的极限环的最大个数应大于或等于4.如能证明这个数就是4,那么除去已举出的(1,3)分布的情形外,(0,4)分布及(2,2)分布能否实现呢?这是国内学者几经努力还未能解决的一个问题.如果这个数大于4,那又该是多大?自然这时将

---

① 关于方程(3),我们的工作与苏联学者有不少结果相同,可参看资料[13－15],但国内所用方法比较简洁,问题解决得也比苏联早.

出现更多种相对位置的可能性以及能否实现的问题. 自然,这当中的首要问题还是要确定系统(2)的极限环个数的上确界.

还可注意到,近年来西方一些数学家也开始发表有关二次系统的文章,如A. 科佩尔(Coppel)的总结性文章[25],J. 迪克森(Dickson)等则举出二次系统各种不同的拓扑相图而加以分类[26],此外在动力系统理论研究方面卓有成就的C. 勃幼(Pugh)也做过有关希尔伯特第16问题的报告[27].

总之,二次微分系统的研究是大有前途的,我们国家在这方面已经有了很好的基础,我们深信有兴趣于这一课题的广大同志必将协同努力,争取早日攻破难关,为祖国的四个现代化事业做出更多的贡献.

参考资料

[1]Dulac H. Bull. Soc. Math. France,51(1923) 45.

[2]Frommer M. Math. Ann. ,109 (1934) 395.

[3]Баутин Н Н. Mam. сбор. ,30,72 (1952) 181.

[4] Петровский И Г 等. Mam. сбор. ,37,79 (1955) 210;73,115 (1967) 160.

[5] 叶彦谦. 科学记录,新辑 1 (1957) 359;2(1958) 337.

[6] 董金柱. 数学学报,8(1958)258;9(1959)156.

[7] 秦元勋. 数学学报,8(1958) 23.

[8] 叶彦谦等. 数学学报,12(1962) 1;60.

[9] 邓耀华,罗定军. 数学学报,14(1964) 129.

[10] 罗定军. 数学进展,9(1966) 42.

[11] 叶彦谦,陈兰荪. 数学学报,18(1975) 219.

[12] 叶彦谦,杨信安. 福州大学学报,(1979).

[13] Черкас Л А 等. Дифф урав,2(1966) 353;4(1968) 1012;6 (1970) 779;2193.

[14] Куклес И С 等. Изе вузов мам,3 (1967) 46;Дифф урае,7 (1971) 1813.

[15]Рычков Т С. Дифф урав,6(1970) 2193;8(1972) 2257.

[16] 王明淑,李开泰. 南京大学学报,2(1964) 213.

[17] 居乃旦. 数学学报,15 (1965) 406.

[18] 马知恩. 西安交大学报(1965).

[19] 罗定军. 南京大学学报,1(1963)36.

[20] 李孝贵. 数学学报,19(1976) 107.

[21] 陈兰荪. 数学学报,20(1977) 11.

[22] 余澍祥. 数学学报,20(1977) 193.

［23］王明淑，陈兰荪．数学学报，22(1979) 751.
［24］史松龄．中国科学，11(1979) 1051.
［25］Coppel A. J. Diff. Eqs. ,2 (1966) 293.
［26］Dickson J. Perko M. ,J. Diff. Eqs. ,7 (1970) 251.
［27］Pugh C. Lecture Notes in Math. ,468 (1974) 55.
［28］叶彦谦．极限环论，上海科学技术出版社(1965).

关于黎曼猜想[①]

在人类进行科学实验的过程中，常常会遇到这样一种问题：从人们的实践经验来看，这些问题有一个肯定的答案，但是我们暂时却无法对它进行严格的证明. 而在数学上，一个命题如果不能被严格地证明，它就不能被人们所公认，这种命题只能被称为“猜想”. 大家熟知的哥德巴赫猜想(Goldbach) 就是一个著名的尚未被证明的命题. 由著名的数学家黎曼(Riemann) 在 1859 年提出的黎曼猜想，是又一个难以证明的猜想. 它的重要之处在于，如果这个猜想解决了，则一大批尚未解决的难题都将得到突破.

一、黎曼 ζ 函数[②]

要介绍黎曼猜想就要从黎曼 ζ 函数谈起. 在高等数学中，下列级数是大家熟悉的

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \tag{1}$$

这就是著名的欧拉(Euler) 级数. 当 n 很大时，这个级数可以比我们给定的任何数都要大得多，也就是说，当 n 趋向于无穷大时，级数(1) 也趋向于无穷大.

① 楼世拓，《自然杂志》第 3 卷(1980 年) 第 5 期.

② ζ 是希腊字母 Z 的小写体，读作 zeta.

后来,人们又进一步研究级数

$$1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s} \tag{2}$$

当 s 是实数时,欧拉在 1737 年就证明了:如果 s 比 1 大,那么当 n 趋向于无穷大时,级数(2) 有一个有限的极限值,换句话说,级数(2) 是收敛的. 我们将这个极限值记为 $\zeta(s)$.

我们进一步考察级数(2). 如果 s 是一个复数,级数(2) 又将会有什么性质呢? 大家知道,一个复数 s 可以写成 $s=\sigma+\mathrm{i}t$,其中 σ 和 t 都是实数,σ 称为 s 的实数部分,t 称为 s 的虚数部分. 利用复数的性质,我们可以看到:只要 s 的实数部分大于 1,那么级数(2) 一定有一个确定的复数作为它的极限值. 我们也将这个极限值记为 $\zeta(s)$. 这样一来,函数 $\zeta(s)$ 就是一个复变数函数了.

我们把复数的实数部分看作平面直角坐标系的横坐标,把虚数部分看作纵坐标. 例如复数 $a+\mathrm{i}b$,被看成平面上横坐标为 a、纵坐标为 b 的点(a,b). 我们用这种办法将每一个复数与平面上的点建立起对应关系(图 1),这样的平面我们称为复平面. 在复平面上的直角坐标系的横坐标 x 表示复数的实数部分,而纵坐标 y 表示复数的虚数部分. 于是我们可以看到,实数部分为 1 的那些复数组成了直线 $x=1$,而实数部分大于 1 的复数呢? 当然都位于这条直线的右边. 这样的点组成了"半平面"(图 2). 如果把 s 标在这个平面上,则根据前面的讨论可知,当 s 位于这个半平面时,级数(2) 是收敛的,它的极限记为 $\zeta(s)$.

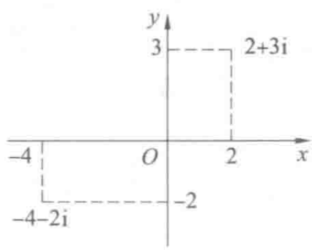

图 1　复数与平面上点的一一对应

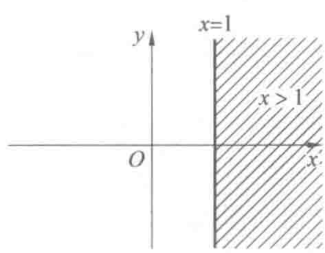

图 2　复平面 $x=1$ 和 $x>1$ 的区域

在复变函数论中还证明了函数 $\zeta(s)$ 是 s 的解析函数. 所谓解析函数,就是指这个函数在它的定义的范围内可以求出任意阶的导数. 对于解析函数,我们

有一个著名的解析延拓定理，这个定理大致上是说：在一定的条件下，一个解析函数是可以将它的定义范围进行扩张的，扩张后的函数还是一个解析函数. 而且更重要的是，扩张后的函数只有一个在原来的定义范围内与原来的函数相重合. 这个在较大范围内有定义的函数就称为原来那个函数的解析延拓. 根据这个定理，我们就可以把较小范围内有定义的解析函数扩张到较大范围去讨论了. 上面定义的函数 $\zeta(s)$ 还只是对 s 的实数部分大于1时有意义，或者说仅仅在图 2 中阴影的半平面上有意义. 我们用解析延拓的办法可以把它的定义范围进行扩张. 严格地说来，可以扩张到除 $s=1$ 以外的所有复数. 经过这样解析延拓后所得到的函数，我们仍记作 $\zeta(s)$. 这个函数就叫作黎曼 ζ 函数.

要指出的是，"解析延拓定理" 在数学上仅仅是一个存在性定理，就是说，它只告诉我们存在一个解析函数，作为原来那个函数的解析延拓，但没有向人们指出，这个解析函数可以用什么方法来构造. 因此，对于黎曼 ζ 函数来说，我们只知道一定有这样一个函数 $\zeta(s)$，除 $s=1$ 这点以外都是有意义的，而且是解析的. 但是，除了 s 的实数部分大于 1 时已有明确的定义外，我们写不出 $\zeta(s)$ 的具体而明显的函数形式，这样一来，就给我们研究这个函数带来了极大的困难，因而一百多年来在黎曼 ζ 函数的研究中还有许多问题没有解决.

二、黎曼 ζ 函数的作用和黎曼猜想

在数学的一些分支中，特别是在解析数论中，对于黎曼 ζ 函数的研究具有极其重要的作用.

素数定理是数论中一个著名的定理. 我们用 $\pi(x)$ 表示比数 x 小的素数的个数. $\pi(x)$ 到底等于多少呢? 我们知道素数在正整数中的分布是很不规则的，或者说我们写不出 $\pi(x)$ 的明确的表达式. 但是，当 x 是一个很大的数时，$\pi(x)$ 与 $\frac{x}{\log x}$ 差不多. 这句话写成式子是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\log x}}=1$$

这就是著名的素数定理. 长期以来，很多数学家研究过素数定理. 勒让德(Legendre)、高斯(Gauss)、切比雪夫(Чебышев) 等都在这方面有过很大的贡献. 但是，这个定理的证明竟是如此之复杂，以至许多数学家都公认是相当难解决的. 西尔维斯特(Sylvester) 在 1881 年曾经说过："为了证明这个结论，我们或许要等待在世界上产生这样一个人，他的智慧和洞察力像切比雪夫那样的超人一等." 当西尔维斯特写下这些话的时候，后来解决这一问题的阿达玛(Hadamard) 出生了. 当然，我们已经了解到，许多数学家特别是黎曼的工作，