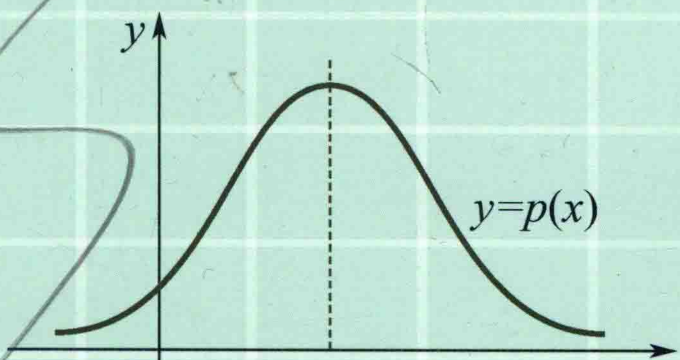
普通高等教育“十三五”规划教材

“互联网+”精品教材
二维码、AR移动学习

概率论与数理统计（第2版）

GAILULUN YU SHULI TONGJI

主 编 白淑敏 崔红卫



“互联网+”立体化教材
广益教育

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等教育“十三五”规划教材

概率论与数理统计

第2版

主　编　白淑敏　崔红卫

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书第2版是"互联网十"视角下的新形态教材，借助于APP平台提供微课、动画、释疑解难、数学建模、数学实验等助学、助教数字资源，并配有综合题库，从而更有助于"概率论与数理统计"的教与学.

本书是根据数学与统计学教学指导委员会制定的《经济管理类本科数学基础课程教学基本要求》，由具有多年教学经验的教师编写而成. 主要内容包括随机事件及其概率、随机变量的分布、多维随机变量的分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本知识、参数估计、假设检验及回归分析的基本知识等，全书共分8章叙述.

本教材总结了作者长期在经济类高校担任"概率论与数理统计"课程教学和科研工作的经验，本教材注重本课程在经济管理领域的运用，选用了大量有关的例题与习题，在书后附有习题参考答案.

本书可作为高等财经院校各专业、普通高等院校经济管理类专业开设公共课程"概率论与数理统计"的教材，也可以作为企业相关人员及自学者的参考教材.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/白淑敏，崔红卫主编. —2版. -- 北京：北京邮电大学出版社，2018. 8

ISBN 978－7－5635－5554－3

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①白… ②崔… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第172890号

书　　名 概率论与数理统计(第2版)
主　　编 白淑敏　崔红卫
策 划 人 张保林
责任编辑 张保林
出版发行 北京邮电大学出版社
社　　址 北京市海淀区西土城路10号(100876)
电话传真 010－82333010　62282185(发行部)　010－82333009　62283578(传真)
网　　址 www. buptpress3. com
电子信箱 ctrd@buptpress. com
经　　销 各地新华书店
印　　刷 北京泽宇印刷有限公司
开　　本 787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张 13. 5
字　　数 341千字
版　　次 2018年8月第2版　2018年8月第1次印刷

ISBN 978－7－5635－5554－3　　定价：39. 00元

广益教育“九斗”APP 操作说明

本书为“互联网＋”立体化教材，配有广益教育助学助教平台——“九斗”APP.

使用前，请按照以下步骤操作使用.

步骤一，先使用智能手机扫描本书封面图标中的二维码(见下图)，下载安装免费的“九斗”APP. 提示：下载界面会自动识别安卓或苹果手机.

步骤二，安装成功之后，点击“九斗”APP 进入使用界面.

步骤三，首次使用 APP 需注册. 注册时，如果您是教师用户，请提交相关资料进行审核，审核通过后即可获得教师用户的相关功能.

步骤四，注册成功后，使用时，请按照软件提示或宣传视频操作即可.

提示：

1. 浏览资源前请先扫描封底二维码进行教材验证；
2. 对教材中带有 AR 标志的图形图像，使用 AR 扫描即可显示相关资源；
3. 教材中的二维码资源请使用“九斗”APP 中的扫一扫功能进行浏览.

关于数字资源说明如下：

1. 微课：对教材中的重点、难点，从通俗易懂的角度进行诠释性补充讲解，有利于学生的自我学习和巩固学习.
2. 交互动画：从三维几何的角度，通过立体化、动画演示、交互体验来展现数学的本质，把几何图形的诠释作用极大化.
3. 释疑解难：对常见的疑惑，思维误区，难以理解的内容，进行答疑式解答，举例分析，释放学生的困惑，让学生少走弯路.
4. 数学实验：借助于数学软件，求解数理统计中大型的数学模型的计算，帮助学生了解统计知识在工程、经济等领域的数学建模中应用.
5. 参考答案：把每章的参考答案放在 APP 里，便于学生练习时随时检验.
6. 经济应用：通过经济应用的经典案例、经济数学模型的构建，进一步帮助学生了解概率统计在经济管理中的应用，如何建立经济数学模型等.

在使用过程中，如有疑问，请随时与我们联系！

联系电话：010-82330186、13811568712

客服 QQ：2158198813

电子邮箱：kf@guangyiedu.com

前　言

本书第2版是“互联网+”视角下的新形态教材，借助于APP平台提供微课、动画、释疑解难、数学建模、数学实验等助学、助教数字资源，并配有综合题库，从而更有助于“概率论与数理统计”的教与学.

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象的数量特征及其统计规律性的一门学科.在经济管理及决策分析中，大量的问题都具有一定的不确定性，即所谓随机性，因此，对于经济管理类各专业的本科学生来说，掌握概率论与数理统计的知识是十分必要的.同时，概率论与数理统计这门课程也是学生学习金融、财经等理论的基础课程.

本书依据经济管理类各专业对概率论与数理统计课程的教学要求并结合作者多年来在财经类大学数学教学实践中积累的经验而编写.在该教材的编写中，作者自始至终贯彻大纲所要求的与学生实际相结合，抽象概念与直观描述相结合的基本思想.在内容的选取上，作者力求内容全面、深广适中，同时参考了近年来经济管理类硕士研究生入学考试数学考试大纲的要求.考虑到经济管理类数学课程的要求与特点，本书仅以普通的微积分和少量的线性代数知识为基础，更加注重有关概率和数理统计的基本概念、基本理论和基本方法的阐释，而相对削减了一些定理的详细证明和某些性质的冗长推导.同时，在符合教学大纲规定的内容和学时要求的前提下，书中尽可能多地在例题的选取和习题的配备上体现概率论与数理统计知识在经济管理方面的应用.

本书配备习题的原则是由浅入深、层次分明、题型全面，旨在培养学生的理解能力和应用能力.为此，在每节后面，配有一定数量的习题；在每章后面还配有一定数量的综合习题，以供教师和学生选用.书末给出了习题参考答案，供教师和学生参考.另外，本教材配有《概率论与数理统计学习指导》以及电子课件，供教师教学与学生学习参考使用.

为了满足不同的需要，我们把书中部分内容标注 * 号，教师可根据各学校所给定的课时数对这些内容进行取舍，在教学中跳过这些内容，不影响本书的体系.

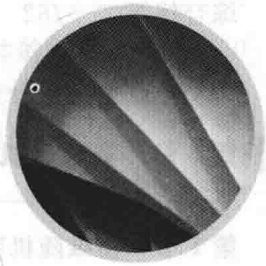
本书由白淑敏、崔红卫担任主编，张保林担任副主编，向开理、涂晓青、朱文莉、吴曦、代红霞、方敏、苏远琳、陈鲁夫、崔嘉瑛、陈嘉璐、熊明辉、张紫莎等老师参与了编写工作.

感谢西南财经大学经济数学学院和北京邮电大学出版社对本教材出版的关心和支持，他们为本书的出版付出了辛勤劳动并提出了许多宝贵意见.由于水平所限，书中不妥或错误之处在所难免，恳请广大读者批评指正.

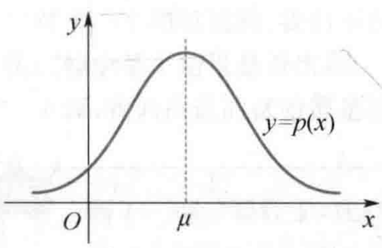
编　者

2018年6月

CONTENTS 目录



第1章 随机事件及其概率



概率是什么?其实概率并不陌生,它与我们日常生活是分不开的,我们说话通常带的某些词语,如“大概”“可能”“也许”等就具备概率意义,因为将这些词进一步量化说明我们是用百分比来回答的. 如掷一枚硬币,其出现正面与反面的可能性有多大呢?大家都会说,可能是50%. 由于此方法显示出公平性,故人们经常用掷硬币的方法打赌. 实际上掷一枚硬币其正、反面出现的概率均为50%. 为了给出概率及概率论严格的定义,我们首先必须了解自然界现象的分类.

在客观世界和人类的生活、生产实践中,人们发现有许多现象在一定的条件下或者一定发生,或者一定不发生. 例如,长为a、宽为b的矩形,其面积就是$a\times b$;在没有外力作用下,作匀速直线运动的物体必将继续作匀速直线运动;在标准大气压下,水加热到100 ℃时必然会沸腾,若只加热到80 ℃,则沸腾现象绝不可能发生. 这些现象,我们称之为**确定性现象**或**必然现象**.

知识导图

在自然界和社会生活中,也广泛存在着与确定性现象有着本质区别的另一类现象,即所谓**随机现象**或**非确定现象**. 这种现象的特点是,在一定条件下,可能出现多种不同的结果,而究竟出现哪

一种结果，事先又不能完全确定．比如，掷一枚硬币，事先无法断言它是正面朝上还是反面朝上；又如，下一个交易日的上海证券交易所综合指数可能比上一个交易日的高些，也可能低些；在抽样检查产品质量时，如果任意从被检产品中抽取100件，那么其中的次品可能有5件，可能有10件，也可能只有1件；再如，某保险公司的年保费收入既可以大于年赔付额，也可以是小于年赔付额，等等．

随机现象的这种不确定性是否表明随机现象就完全杂乱无章、不可捉摸呢？人们经过长期的实践和研究发现，如果重复地进行大量的观察或实验，任何随机现象都会呈现出一定的规律性，我们称之为**统计规律性**．

概率论与数理统计，就是揭示和研究随机现象的统计规律性的一门学科，它是近代数学的一个重要分支，它起源于17世纪，发展到现在，已深入到各个科学领域．它是研究自然现象，同时也是我们探讨与研究经济问题的重要数学工具．本章将介绍概率论的一些基本概念，并讨论某些特殊场合下的概率计算问题．

概率统计应用案例

第 1 节　随机事件及其关系与运算

一、随机试验与随机事件

对随机现象的研究必然要联系到对客观事物进行观察或实验. 为了叙述的方便,我们把对自然现象进行观察或进行一次科学实验,统称为一个**试验**. 若这个试验满足:

(1) 在相同条件下可重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,且事先明确知道可能会出现的所有结果;

(3) 每次试验都会出现上述结果中的某一个,但具体哪一个结果出现却事先无法预知,则称这一试验为**随机试验**(random trial),简称试验,记为 E.

由随机试验的可能结果组成的集合称为**随机事件**(random event),简称**事件**,用大写英文字母"$A,B,C,\cdots$"来表示.

对于一个随机试验,我们不仅关心它有哪些可能结果,而且更为关心的是在一次试验中某个结果是否出现.

下面,我们所说的试验都是指随机试验.

例

例 1　掷一颗骰子,观察其出现的点数,则:

$A=$"出现 1 点",$B=$"出现 2 点",$C=$"出现 3 点",$D=$"出现 4 点",$E=$"出现 6 点",$F=$"出现偶数点",$G=$"点数不超过 2"等都是随机事件.

我们把试验中最简单的、不可再分解的随机事件,称为**基本事件**. 比如在例 1 中,A,B,C,D,E 都是基本事件. 由若干基本事件组合而成的事件称为**复合事件**,比如在例 1 中,F 则是复合事件,它由 B,D,E 组合而成;G 也是复合事件,它由 A 和 B 组合而成.

此外,我们将试验中必定要发生的事件称为**必然事件**,而将试验中必定不会发生的事件称作**不可能事件**. 虽然从本质上说它们已不具有随机性,但为了讨论起来方便,通常把它们视作两个特殊的随机事件,分别用希腊字母 Ω 和 $\varnothing$ 表示. 在例 1 的试验中,"点数小于 7"显然是必然事件,而"点数大于 6"则显然为不可能事件.

二、样本空间

为了用数学方法描述随机现象及随机事件,也为了使我们将要讨论的事件间的关系和运算比较直观而易于理解,我们引入样本点和样本空间的概念.

称试验 E 的每一个可能结果为一个**样本点**,并以小写希腊字母 ω 记之;称全体样本点所构成的集合为试验 E 的**样本空间**(sample space),记为 Ω. 显然,基本

事件是由一个样本点组成的单点集；随机事件是样本空间 E 的子集.

在例 1 中，令 $\omega_i=$"出现 i 点"$(i=1,2,3,4,5,6)$，则有

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$$

或简记为

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

于是，事件 A 就由一个样本点 ω_1 组成，即 $A=\{\omega_1\}$ 或 $A=\{1\}$；而因为当且仅当掷出 2,4,6 三种点数的任何一种时，事件 $F=$"出现偶数点"发生，所以 F 含有 3 个样本点 $\omega_2,\omega_4,\omega_6$，即 $F=\{2,4,6\}$. 若说 F 发生了，则意味着出现了 2,4,6 三个点数中的某一点数；反之若出现了 2,4,6 中的某一点数，则 F 就发生了.

例+

例 2 将一枚硬币连掷两次，观察所出现的正反面的情况，则该试验有 4 个样本点，样本空间为

$$\Omega=\{(\text{正},\text{正}),(\text{正},\text{反}),(\text{反},\text{正}),(\text{反},\text{反})\}$$

若以 A 表示"两次掷出相同的一面"这一事件，则 A 包含两个样本点(正,正)、(反,反)；而事件 C 表示"至少掷出一个正面"，则包含了 3 个样本点(正,正)、(正,反)、(反,正).

例 3 一名射手向某目标射击，直至命中目标为止，观察其命中目标所进行的射击次数(从理论上讲，只要没击中目标，射手就会一直射击下去)，则样本空间为

$$\Omega=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

若以 A 表示事件"至少射击 3 次才命中目标"，则 A 发生即意味着射击次数为 3，或 4，或 5，……，而若射击次数为 3，或 4，或 5，……，则意味着事件 A 发生了. 这表明事件 A 由样本点 $3,4,5,\cdots$ 构成.

例 4 设某公共汽车站每 5 分钟有一辆公共汽车通过，观察某人到达汽车站后的等车时间，则样本空间为

$$\Omega=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 5\}$$

若令 A 表示"等车时间在 1 分钟到 2 分钟内"这一事件，则 $A=\{x\mid 1<x<2\}$，A 显然也是 Ω 的一个子集.

例 5 为评价某学校小学生身体的生长发育状况，需要同时测量小学生的身高、体重和胸围. 试写出此随机试验的样本空间.

解 在这一随机试验中，任一可能的结果即样本点是一个有序数组 (x,y,z)，其中 x,y,z 分别表示小学生的身高、体重和胸围，因此样本空间为

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid 0<x\leqslant a,0<y\leqslant b,0<z\leqslant c\},$$

其中 a,b,c 分别表示该校小学生身高、体重和胸围的最大值.

对上述问题的分析表明，作为试验结果的事件，其实就是试验的样本空间的子集.

事实上，对于含有有限个或可列个样本点的样本空间(称为离散样本空间)，

可以将其任意一个子集称作事件. 而对于含有不可列个样本点的样本空间而言，由于其子集的复杂性，人们不能够将其任意子集都称作事件，而是将满足某种条件的那些子集称为事件. 因此，我们一般讲，事件是样本空间的满足某种条件的子集，事件发生当且仅当该子集中某个样本点在试验中出现.

样本空间 Ω 本身也是一个事件，它是一个必然事件，这是因为每次试验总会出现全部基本事件的某一个，即样本点之一总会出现. 基于此，样本空间与必然事件使用了同一个记号 Ω.

三、事件的关系和运算

如上所说，事件即是样本点的集合. 因此，集合的关系及诸种运算也同样适用于事件. 为此，我们引进事件之间的一些重要关系和运算，这将有利于今后对事件及其概率的叙述和研究.

设试验 E 的样本空间为 Ω，$A,B,C,A_i(i=1,2,\cdots)$ 是 Ω 的子集，即为 E 的随机事件.

1. 事件的包含

如果属于 A 的样本点必属于 B，或用概率论的语言表达为"事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生"，则称 B 包含 A，或称 A 含于 B，记作 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

例

例 6 在掷一颗骰子的试验中，设事件：$A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3,4\}$，$C=\{1,2,3,4\}$，则有 $A \subset C$ 且 $B \subset C$.

对任何事件 A，显然总有 $A \subset \Omega$. 为了以后讨论的方便，我们约定不可能事件 $\varnothing$ 包含于任何事件 A 中，即 $\varnothing \subset A$. 于是，总有 $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

2. 事件相等

如果属于 A 的样本点必属于 B，而且属于 B 的样本点也必属于 A，即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称事件 A 与 B 相等，记为 $A=B$. 用概率论的语言表达为"事件 A 的发生必导致事件 B 的发生，同时事件 B 的发生也必导致事件 A 的发生".

3. 事件的并(和)

事件 A 与 B 中所有的样本点(相同的只计入一次) 组成的事件，用概率论的语言表达为"事件 A 或 B 至少有一个发生的事件"，称为 A 与 B 的并，记作 $A \cup B$.

例如，在例 6 中，$A \cup B=\{1,2,3,4\}=C$.

4. 事件的交(或乘积)

事件 A 与 B 中公共的样本点组成的事件，用概率论的语言表达为"事件 A 与 B 同时发生的事件"，称为事件 A 与 B 的交(或积)，记作 $A \cap B$(或 AB).

例如，在例 6 中，$A \cap B=\{2,3\}$.

事件的并和交的概念可以推广到有限个和可列个事件的情形：

n 个事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的并 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 为一个新事件，简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$，当且仅当"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生"时，该事件发生；

n 个事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的交 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 为一个新事件，简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$，当且仅当"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"时，该事件发生.

类似地，可定义可列个事件的并 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 及可列个事件的交 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

5. 逆事件（对立事件）

由在 Ω 中而不在 A 中的样本点组成的事件，用概率论的语言表达为"事件 A 不发生的事件"，称为事件 A 的逆事件，或称 A 的对立事件，记作 $\overline{A}$.

利用上述事件的并和交的运算符号，有

$$A \cup \overline{A} = \Omega \quad \text{及} \quad A\overline{A} = \varnothing$$

显然，A 与 $\overline{A}$ 互为逆事件.

例如，在掷骰子的试验中，若 $A=\{1,3\}$，则 $\overline{A}=\{2,4,5,6\}$；若 $A=$"点数小于 3"，则 $\overline{A}=$"点数不小于 3".

6. 事件的差

由在事件 A 中而不在 B 中的样本点组成的事件，用概率论的语言表达为"事件 A 发生而 B 不发生的事件"，称为事件 A 与 B 之差，记为 $A-B$. 显然有 $A-B = A \cap \overline{B}$.

例如，在例 6 中 $A-B=\{1\}$.

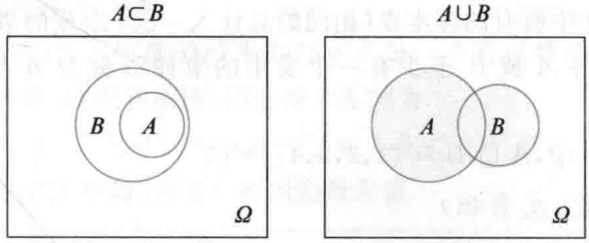
7. 互斥事件（不相容）

若两个事件 A,B 满足关系 $A \cap B = \varnothing$，也就是说，如果事件 A,B 不能同时发生，就称 A 与 B 互斥（或不相容）.

显然，若 A 与 B 互为逆事件，则 A,B 一定互斥，但互斥事件不一定互为逆事件.

例如，在电视机寿命试验中，"寿命小于 1 万小时"与"寿命大于 5 万小时"是两互斥事件，因为它们不可能同时发生. 但不为互逆事件.

事件的关系与运算，可用集合论中的文氏(Venn)图直观地予以表示（见图 1-1）.



(a)　　(b)

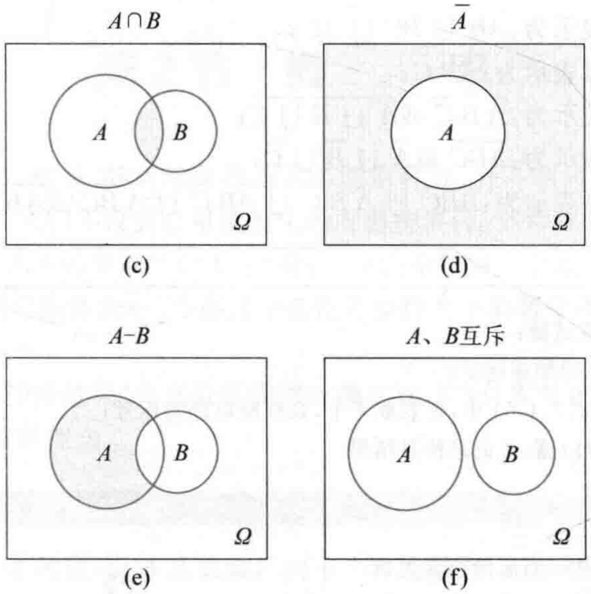


图 1-1

事件间的运算规律与集合的运算规律一致，亦具备如下规律：

(1) 交换律：$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$；

(2) 结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$；

(3) 分配律：$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$；

(4) 对偶律：$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

上述运算律也可以推广到任意有限个或可列个事件的情形. 例如，对可列个事件 $A_i (i = 1, 2, \cdots, n, \cdots)$，有对偶律

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}$$

例

例 7 从某厂的产品中随机抽取三件产品. 设 A 表示“三件产品中至少有一件是废品”，B 表示“三件产品中至少有两件是废品”，C 表示“三件产品都是正品”，问：$\overline{A}, \overline{B}, A \cup B, A \cap B, A \cup C, A \cap C, A - B$ 各表示什么事件？

解 $\overline{A} = C$ 表示三件产品都是正品；$\overline{B}$ 表示三件产品中至多有一件是废品；$A \cup B = A$ 表示至少有一件是废品；$A \cap B = B$ 表示至少有两件是废品；$A \cup C = \Omega$ 为必然事件；$A \cap C = \varnothing$ 为不可能事件；$A - B$ 表示恰有一件废品.

例 8 某人连续三次购买彩票，每次一张. 令 A, B, C 分别表示其第一、第二、第三次所买的彩票中奖的事件，试用 A, B, C 及其运算表示下列事件：

(1) 三次都中奖；(2) 恰有一次中奖；(3) 不止一次中奖；(4) 只有第二次中奖；(5) 一次奖也未中；(6) 至多中奖两次；(7) 不多于一次中奖.

解 (1) 三次都中奖可表示为：ABC；

(2) 恰有一次中奖可表示为：$A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$；

(3) 不止一次中奖可表示为：$AB \cup BC \cup AC$；

(4) 只有第二次中奖可表示为：$\overline{A}B\,\overline{C}$；

(5) 一次奖也未中可表示为：$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或$\overline{A \cup B \cup C}$；

(6) 至多中奖两次可表示为：$\overline{ABC}$ 或$\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$；

(7) 不多于一次中奖可表示为：$\overline{ABC} \cup A\,\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\,\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$ 或$\overline{AB \cup BC \cup AC}$.

习题 1-1

1. 试判断下列试验是否为随机试验：

(1) 在恒力的作用下一质点作匀加速运动；

(2) 在 5 个同样的球(标号 1,2,3,4,5) 中，任意取 1 个，观察所取球的标号；

(3) 在分析天平上称量一小包白糖，并记录称量结果.

2. 写出下列试验的样本空间：

(1) 将 1 枚硬币连掷 3 次；

(2) 观察在时间$[0,t]$ 内进入某一商店的顾客人数；

(3) 将 1 颗骰子掷若干次，直至掷出的点数之和超过 2 为止；

(4) 在单位圆内任取一点，记录它的坐标.

3. 将 1 颗骰子连掷两次，观察其掷出的点数. 令 $A =$“两次掷出的点数相同”，$B =$“点数之和为 10”，$C =$“最小点数为 4”. 试分别指出事件 A,B,C 以及 $A \cup B,ABC,A - C,C - A,B\overline{C}$ 各自含有的样本点.

4. 在一段时间内，某电话交换台接到呼唤的次数可能是 0 次，1 次，2 次，…… . 记事件 $A_k(k = 1,2,\cdots)$ 表示“接到的呼唤次数小于 k”，试用 $A_k(k = 1,2,\cdots)$ 间的运算表示下列事件：

(1) 呼唤次数大于 2；

(2) 呼唤次数在 5 到 10 次范围内；

(3) 呼唤次数与 8 之差的绝对值大于 2.

5. 试用事件 A,B,C 及其运算关系式表示下列事件：

(1)A 发生而 B 不发生；

(2)A 不发生但 B,C 至少有一个发生；

(3)A,B,C 中只有一个发生；

(4)A,B,C 中至多有一个发生；

(5)A,B,C 中至少有两个发生；

(6)A,B,C 不同时发生.

6. 在某大学金融学院的学生中任选一名学生. 若事件 A 表示被选学生是女生，事件 B 表示该生是大学二年级学生，事件 C 表示该生是运动员. 请回答下列问题：

(1) 叙述 ABC 的意义.

(2) 在什么条件下 $ABC = C$ 成立？

(3) 在什么条件下 $\overline{A} \subset B$ 成立？

7. 化简下列各事件：

(1)$(A - B) \cup A$；

(2)$(A - B) \cup B$；

(3)$(A - B)A$；

(4)$(A - B)B$；

(5)$(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$.

第 2 节 概 率

对于一个随机试验，除必然事件与不可能事件外，任一事件都有可能发生，也有可能不发生.人们不仅关心可能发生的有哪些事件，更常常希望了解某些事件在一次试验中发生的可能性的大小.对此，我们希望用一个数字来度量试验中某事件 A 发生的可能性大小，并将这个表征可能性大小的数字称为事件 A 的概率，记作 $P(A)$.

如何选择这种度量呢?什么数字能够准确地描述事件发生的可能性大小?为此，首先引入频率的概念.

一、频率与概率

考虑这样一个问题，设 A 是试验 E 的一个可能结果，若在相同条件下将试验 E 连做 100 次，结果事件 A 发生了 90 次，一般人们会自然地据此认为，事件 A 发生的可能性是比较大的，因为在总的 100 次试验中，A 发生的次数占了 90%，如果 A 发生的可能性不大，似乎不应该出现这种结果.就是说，人们会认同，在 n 次试验中 A 发生的次数 n_A 与 n 的比值在一定程度上反映了事件 A 发生的可能性的大小.

定义 1.1 称在相同条件下进行的 n 次试验中事件 A 发生的次数 n_A 为 A 发生的频数，并称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为 A 发生的**频率**(frequency)，记作 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$.

由定义 1.1，可得频率具有如下性质：

(1) 对任何事件 A，有 $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

(2) $f_n(\Omega)=1$，Ω 为必然事件；

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 为两两互斥的 m 个事件，则有

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)=\sum_{i=1}^{m} f_n(A_i)$$

证明 (1)、(2) 显然成立，现在证明(3).

设在 n 次试验中，事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 发生的频数分别是 $n_{A_1},n_{A_2},\cdots,n_{A_m}$，由于 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 两两互斥，因此在 n 次试验中事件 $\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$ 发生的频数等于诸 A_i $(i=1,2,\cdots,m)$ 各自发生的频数之和，即 $n_{A_1}+n_{A_2}+\cdots+n_{A_m}$，从而

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)=\frac{n_{A_1}+n_{A_2}+\cdots+n_{A_m}}{n}=\sum_{i=1}^{m} f_n(A_i)$$

试验表明，事件 A 的频率不是一个固定的数，它会随着试验次数 n 的变化而变化.即使 n 不变，在不同的两轮 n 次试验中，由于 n_A 可能不同，$f_n(A)$ 也不一定相同.只不过频率越大，事件 A 的发生就越频繁，在一次试验中，A 发生的可能性也就越大.因而，直观的想法是用 $f_n(A)$ 表示 A 在一次试验中发生可能性的大小.但反映事件 A 发生可能性大小的概率 $P(A)$ 应是客观存在的一个数，它应和所进行试验的次数无关.因此，将 $f_n(A)$ 作为 A 发生的可能性大小的度量是有缺