"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材配套用书

理论力学

同步学习辅导与习题全解

◎ 刘习军　贾启芬　主编

双色印刷

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材配套用书

理论力学同步学习辅导与习题全解

主　编　刘习军　贾启芬
副主编　张素侠　钟　顺
参　编　李　想　施睿智
　　　　陶宪坤　崔福将

机械工业出版社

本书是理论力学课程教学及考研用辅导教材，共四篇，包括静力学、运动学、动力学和动力学专题共15章，与贾启芬、刘习军主编的“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材——《理论力学》（第4版）同步使用。每章编有“主要内容”“基本要求”“重点讨论”“例题分析”和“习题解答”五个部分。对《理论力学》（第4版）中的全部习题进行了解答，阐述了解题的正确思路、方法和技巧，加强了自学指导。

本书是传统纸质教材与移动互联网教学相结合的多媒体教材，其特点为：

一、在印刷和编写形式上进行了改进，采用了双色印刷技术，对重点部分利用双色进行了标注，使重点更加突出，使学习者更易于理解。

二、利用移动终端（手机或pad等）扫描页码处的二维码可得到重点讲解的微视频、该页的动画、解题思路等，对于较难的习题提供多种解题思路和方法，其二维码链接的内容可以随时进行更新。

本书内容丰富，通俗易懂，由浅入深；以务实、应用为根本。可供高等院校工科各专业及高职高专各专业的理论力学课程使用，并适合于慕课（MOOC）、私播课（SPOC）和翻转课堂在教学中的应用，同时也可供工程技术人员参考，对报考硕士研究生的考生也很有帮助。

图书在版编目（CIP）数据

理论力学同步学习辅导与习题全解/刘习军，贾启芬主编.—北京：机械工业出版社，2017.9

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材配套用书

ISBN 978-7-111-58037-9

Ⅰ.①理…　Ⅱ.①刘…②贾…　Ⅲ.①理论力学－高等学校－题解　Ⅳ.①O31-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第230543号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）

策划编辑：姜　凤　　责任编辑：姜　凤　李　乐

责任校对：张晓蓉　张　征　封面设计：张　静

责任印制：李　飞

北京铭成印刷有限公司印刷

2018年3月第1版第1次印刷

184mm×260mm·22.75印张·554千字

标准书号：ISBN 978-7-111-58037-9

定价：49.80元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务　　网络服务

服务咨询热线：010-88379833　　机工官网：www.cmpbook.com

读者购书热线：010-88379649　　机工官博：weibo.com/cmp1952

教育服务网：www.cmpedu.com

封面无防伪标均为盗版　　金书网：www.golden-book.com

前 言

2012 年，编者根据机械工业出版社出版的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《理论力学》（第 2 版）编写了《理论力学辅导与习题解答》。《理论力学》（第 2 版）与《理论力学辅导与习题解答》作为成套教材，于 2014 年被评为“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材。目前《理论力学》教材已修订至第 4 版，在课程内容、习题等方面都做了很大改动，为与之相配套，编者编写了本书。

在内容方面，本书每章均包括主要内容、基本要求、重点讨论、例题分析与习题解答五部分。

在印刷方面，本书采用了双色的印刷技术，对文字中的重点部分利用双色进行了标注，使重点更加突出，在结构图、机构图和受力图中对不同的部位采取不同的颜色绘制，使学习者更易于理解。

在形式方面，本书引入了移动互联网的学习模式，在每一页引入了二维码，利用手机或 pad 等移动终端扫描页码处的二维码可得到重点讲解的微视频、本页的动画、解题思路等。例如：①在运动学部分，扫描有关例题和习题相应页码处的二维码，即可看到相应机构的动画。②对于一题多解或较难的习题，扫描页码处的二维码可得到此题的多种解题思路和方法，并给予了充分提示，开阔了学习者的解题思路；有些习题还配有工程实物图片。

编者认为，在当前慕课（MOOC）和私播课（SPOC）及翻转课堂作为教学改革主流的趋势下，必须要有与之相配套的辅助教材。为满足慕课、私播课和翻转课堂在教学改革中的需要，在本书的编写中，编者从不同的学术角度对有关习题的解题思路进行了更加清晰准确的阐述，使解题的基本思路及基本方法更加全面，更加适合于慕课、私播课和翻转课堂在教学改革中的应用。作为辅导书，例题和思考题是其重点内容，可使学生的学习思路更加开阔。

本书主要由刘习军、张素侠执笔编写，钟顺、李想、施睿智、陶宪坤等对部分图形进行了重新绘制，崔福将、田冲等制作了二维码中的动画，本书还得到了天津大学其他讲授理论力学教师的大力支持，他们提出了许多宝贵的意见，在此谨致以衷心的感谢。

限于水平，如有错误和不妥之处，望读者批评指正。

在教材中利用移动互联网的形式进行辅助教学，对我们来说，还是首次尝试，许多不尽如人意的地方在所难免，但由二维码链接的内容可以随时进行修改，读者如有任何宝贵的意见和建议，可随时联系我们（lxijun@tju. edu. cn 或 jinkuizhang@buaa. edu. cn）进行修改，在此致谢。

编 者

于天津大学

目 录

第2篇 运 动 学

第3篇 动 力 学

第 4 篇 动力学专题

第1篇

静 力 学

第1章 静力学基础

1.1 主要内容

静力学是研究作用在物体上力系的平衡。具体研究以下三个问题。

1. 物体的受力分析；
2. 力系的等效替换；
3. 力系的平衡条件及其作用。

1.1.1 力与力的投影

力是物体之间的相互作用，这种作用使物体运动状态发生变化或使物体产生变形。前者称为力的运动效应，后者称为力的变形效应。

力的三要素是力的大小、方向和作用点。力是定位矢量。

作用在刚体上的力可沿作用线移动，是滑动矢量。

刚体是在力作用下不变形的物体，它是实际物体通过刚化公理而产生的抽象化模型。在静力学中把物体看成刚体，从而简化了平衡问题的研究。

若两个力系对物体的作用效应相同，则两个力系等效。

静力学基本公理是力学的最基本、最普遍的客观规律。概括了力的基本性质，是建立静力学理论的基础。力的平行四边形法则给出了力系简化的一个基本方法，是力的合成法则，也是一个力分解成两个力的分解法则。二力平衡公理是最简单的力系平衡条件。加减平衡力系公理是研究力系等效变换的主要依据。作用与反作用定律概括了物体间相互作用的关系。刚化公理给出了变形体可看作刚体的条件。

力在轴上的投影定义为力与该投影轴单位矢量的标量积，是代数量。

力在直角坐标轴上的投影有一次（直接）投影法和二次（间接）投影法。

应用力的投影概念，将力的合成由几何运算转换为代数运算。

1.1.2 力矩与力偶

力对轴之矩是力使物体绕轴转动效果的度量，是代数量。可按定义或下述解析式计算。

$$\left.\begin{aligned} M_x(\boldsymbol{F}) &= yF_z - zF_y \\ M_y(\boldsymbol{F}) &= zF_x - xF_z \\ M_z(\boldsymbol{F}) &= xF_y - yF_x \end{aligned}\right\}$$

式中，x、y、z 为力 $\boldsymbol{F}$ 作用点的坐标；F_x、F_y、F_z为力矢在轴上的投影。当力与轴相交或平行时，力对该轴之矩等于零。

力对点之矩是力使物体绕该点转动效果的度量，是定位矢量。例如，力对 O 点的矩可用矢积式表示

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= (yF_z - zF_y)\boldsymbol{i} + (zF_x - xF_z)\boldsymbol{j} + (xF_y - yF_x)\boldsymbol{k}$$

力对点之矩在通过该点某轴上的投影等于力对该轴之矩。有

$$\left.\begin{aligned} [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_x = M_x(\boldsymbol{F}) \\ [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_y = M_y(\boldsymbol{F}) \\ [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_z = M_z(\boldsymbol{F}) \end{aligned}\right\}$$

或

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = M_x(\boldsymbol{F})\boldsymbol{i} + M_y(\boldsymbol{F})\boldsymbol{j} + M_z(\boldsymbol{F})\boldsymbol{k}$$

合力矩定理

力系的合力对任一点之矩（例如 O 点）等于力系中各力对该点之矩的矢量和，即

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}) = \sum \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$$

合力对任一轴（例如 z 轴）之矩等于力系中各力对该轴之矩的代数和，即

$$M_z(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}) = \sum M_z(\boldsymbol{F}) = \sum (xF_y - yF_x)$$

在平面问题中，力对点 O 之矩是代数量，即

$$M_O(\boldsymbol{F}) = \pm F \cdot h$$

力臂 h 是指矩心到力作用线的距离，取逆时针转向为正，反之为负。

平面汇交力系的合力对平面内任一点之矩等于各分力对该点之矩的代数和，即

$$M_O(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}) = \sum M_O(\boldsymbol{F})$$

力偶与力偶矩

大小相等、方向相反、作用线平行的两个力 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}'$组成力偶，力偶是一特殊力系。力偶无合力，也不能与一个力平衡。力偶对物体只产生转动效应。

力偶矩的大小、转向及作用面在空间的方位，称为力偶三要素。

力偶矩矢是表示力偶三要素的自由矢量，它完全决定了力偶对物体的作用。

力偶三要素可由力偶矩矢表示。力偶矩矢是一个自由矢量。

力偶矩矢完全决定了力偶对刚体的作用效果。

若两力偶的力偶矩矢相等，则两力偶等效。

力偶对任意点之矩等于力偶矩，与矩心位置无关。

力偶的等效性表明，只要力偶矩不变，可任意改变力的大小和力偶臂的长短，力偶也可在作用面内任意移转。

平面力偶的力偶矩是代数量。取逆时针转向为正，反之为负。

1.1.3　约束与约束力

限制非自由体某些位移的周围物体称为约束。约束作用在被约束物体上的力称为约束

力，物体所受的约束力必须根据约束性质进行分析，其方向与该约束所能限制的位移方向相反。工程中常见的几种简单的约束类型及其约束力特点如下：

·光滑接触表面约束　约束力作用在接触点处，方向沿接触面公法线并指向受力物体。

·柔性体约束（如绳索、链条或胶带等构成的约束）　约束力沿柔性体而背离物体。

·铰链约束　约束力在垂直销钉轴线的平面内，并通过销钉中心。约束力的方向不能预先确定，常以两个正交分量 $\boldsymbol{F}_x$ 和 $\boldsymbol{F}_y$ 表示。

·滚动支座约束　约束力垂直于滚动平面，通过销钉中心。

·球铰链约束　约束力通过球心，但方向不能预先确定，常用三个正交分量 $\boldsymbol{F}_x$、$\boldsymbol{F}_y$、$\boldsymbol{F}_z$ 表示。

·推力轴承约束　约束力有三个分量 $\boldsymbol{F}_x$、$\boldsymbol{F}_y$、$\boldsymbol{F}_z$。

1.1.4　物体的受力分析和受力图

将所研究的物体或物体系统从与其联系的物体中分离出来，分析它的受力状态，这一过程称为**物体的受力分析**。它包括两个步骤：

（1）**选择研究对象，取分离体**

待分析的某个物体或物体系统称为**研究对象**。一旦明确了研究对象，需要解除它受到的全部约束，将其从周围的约束中分离出来，并画出相应的简图，这一过程称为取**分离体**。

（2）**画受力图**

在分离体图上，画出研究对象所受的所有力，并标明各力的符号及各位置符号，这一受力简图称为**受力图**。

1.2　基本要求

1. 正确理解力、力偶、力矩、力偶矩、简化、平衡等概念，全面掌握力及力偶的性质。
2. 会根据所给条件，选择恰当的方法计算力在坐标轴上的投影，计算力对点之矩和力对轴之矩，计算力偶矩。
3. 掌握典型约束的约束性质及各种约束所提供的约束力的特性、描述方法。
4. 对简单的物体系统，能熟练地选择研究对象，取分离体并画出受力图。

1.3　重点讨论

不同类型的约束，其约束力未知分量的数目是不同的；当刚体受空间力系作用时，其约束力的未知分量数目最多为6个。确定各类约束的未知量数目的基本方法是：观察物体在空间的六种可能的运动中，判断哪几种运动被约束所阻碍，如移动受到阻碍，就产生约束力；如转动受到阻碍，就产生约束力偶。例如推力轴承约束，它比颈轴承多了一个沿轴线方向的移动阻碍，因此约束力用三个大小未知的分量 $\boldsymbol{F}_x$、$\boldsymbol{F}_y$、$\boldsymbol{F}_z$ 表示。又如空间固定端约束，它能阻碍物体在空间的六种可能的运动，因此有三个约束力和三个约束力偶。

受力分析是整个理论力学的基础，为了能够正确地画出研究对象的受力图，应注意以下几点：

1. 先逐一画出它所受的主动力，再逐一画出所受的约束力。

2. 一定要按照上节所讲的约束类型去画各约束力的作用线和方向，一般不要按照主动力去判断约束力的真实作用线与方向。

3. 在物系问题中，若需要画几个受力图，各分离体之间的相互作用力必须满足作用与反作用定律的关系。

4. 一个受力图中所画的力均为其所受的外力，因其内力总是成对出现，故不要在该受力图中画出内力。

5. 如果分离体与二力构件相连，一定要按二力构件的特点去画它对分离体的作用力。一般情况下，二力构件的两端为铰链，在去掉铰链约束之处，此作用力宜画成沿此二力构件两铰链连线的方向。

6. 切忌在一个结构图中画多个受力图。

1.4 例题分析

例 1-1　已知作用在 A 点的力 F 的大小为 200N，其方向如图 1-1 所示。试计算该力对 x、y、z 轴之矩。

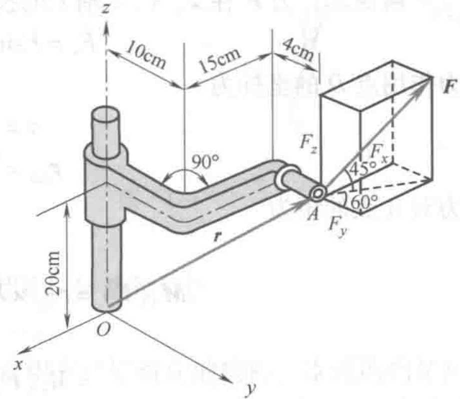

图　1-1

解：力 F 在坐标轴上的投影为

$$F_x = -F\cos45°\sin60° = -200\text{N}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = -122.5\text{N}$$

$$F_y = F\cos45°\cos60° = 200\text{N}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = 70.7\text{N}$$

$$F_z = F\sin45° = 200\text{N}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 141.4\text{N}$$

力 $\boldsymbol{F}$ 作用点 A 的坐标为

$$x = -15\text{cm}$$
$$y = 10\text{cm} + 4\text{cm} = 14\text{cm}$$
$$z = 20\text{cm}$$

由于

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

则

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$
$$= M_x(\boldsymbol{F})\boldsymbol{i} + M_y(\boldsymbol{F})\boldsymbol{j} + M_z(\boldsymbol{F})\boldsymbol{k}$$

代入数据得力 $\boldsymbol{F}$ 对坐标轴 x、y、z 之矩分别为

$$M_x(\boldsymbol{F}) = yF_z - zF_y = 14\text{cm}\times141.4\text{N} - 20\text{cm}\times70.7\text{N} = 566\text{N}\cdot\text{cm}$$

$$M_y(\boldsymbol{F}) = zF_x - xF_z = 20\text{cm}\times(-122.5\text{N}) + 15\text{cm}\times 141.4\text{N} = -329\text{N}\cdot\text{cm}$$

$$M_z(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x = (-15\text{cm})\times 70.7\text{N} - 14\text{cm}\times(-122.5\text{N}) = 655\text{N}\cdot\text{cm}$$

例 1-2 手柄 $ABCE$ 在平面 Axy 内，在 D 处作用一个力 $\boldsymbol{F}$，如图 1-2 所示，它在垂直于 y 轴的平面内，偏离铅直线的角度为 θ。如 $CD=a$，杆 BC 平行于 x 轴，杆 CE 平行于 y 轴，AB 和 BC 的长度都等于 l。试求力 $\boldsymbol{F}$ 对 x、y 和 z 轴之矩。

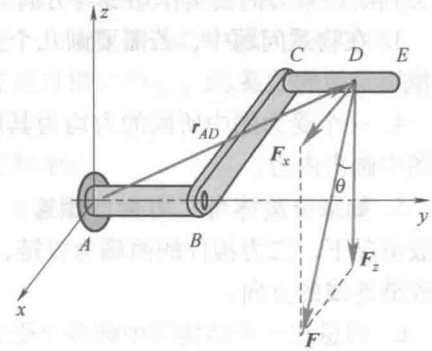

图 1-2

解法一：将力 $\boldsymbol{F}$ 沿坐标轴分解为 $\boldsymbol{F}_x$ 和 $\boldsymbol{F}_z$ 两个分力，其中 $F_x=F\sin\theta$，$F_z=-F\cos\theta$。注意到力与轴平行或相交时对该轴之矩为零，由合力矩定理，有

$$M_x(\boldsymbol{F}) = M_x(\boldsymbol{F}_z) = -F_z(AB+CD) = -F(l+a)\cos\theta$$

$$M_y(\boldsymbol{F}) = M_y(\boldsymbol{F}_z) = -F_zBC = -Fl\cos\theta$$

$$M_z(\boldsymbol{F}) = M_z(\boldsymbol{F}_x) = -F_x(AB+CD) = -F(l+a)\sin\theta$$

解法二：力 $\boldsymbol{F}$ 在 x、y、z 轴上的投影为

$$F_x = F\sin\theta,\ F_y = 0,\ F_z = -F\cos\theta$$

力作用点 D 的坐标为

$$x=-l,\ y=l+a,\ z=0$$

$$\boldsymbol{r}_{AD} = -l\boldsymbol{i} + (l+a)\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$$

力对 A 点的矩为

$$\boldsymbol{M}_A(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r}_{\mathrm{AD}}\times\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = M_x(\boldsymbol{F})\boldsymbol{i} + M_y(\boldsymbol{F})\boldsymbol{j} + M_z(\boldsymbol{F})\boldsymbol{k}$$

代入数据得

$$M_x(\boldsymbol{F}) = yF_z - zF_y = (l+a)(-F\cos\theta) - 0 = -F(l+a)\cos\theta$$

$$M_y(\boldsymbol{F}) = zF_x - xF_z = 0 - (-l)(-F\cos\theta) = -Fl\cos\theta$$

$$M_z(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x = 0 - (l+a)(F\sin\theta) = -F(l+a)\sin\theta$$

两种计算方法结果相同。

无论是研究静力学问题还是研究动力学问题，一般都需要分析物体受到哪些力作用，即对物体进行受力分析。

例 1-3 用力 $\boldsymbol{F}$ 拉动碾子以压平路面，碾子受到了一石块的阻碍，如图 1-3a 所示。试画出碾子的受力图。

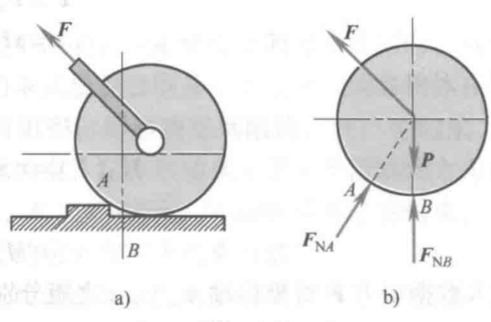

图 1-3

解：(1) 取碾子为研究对象，并单独画出其简图。

(2) 画主动力。有重力 $\boldsymbol{P}$ 和杆对碾子的中心的拉力 $\boldsymbol{F}$。

(3) 画约束力。因碾子在 A 和 B 两处受到石块和地面的约束，如不计摩擦，则均为光滑表面接触，故在 A 处受石块的法向约束力 $\boldsymbol{F}_{NA}$ 的作用，在 B 处受地面的法向约束力 $\boldsymbol{F}_{NB}$ 的作用，它们都沿着碾子上接触点的公法线而指向圆心。

碾子的受力图如图 1-3b 所示。

例 1-4　如图 1-4a 所示的三铰拱桥，由左、右两拱铰接而成。设各拱自重不计，在拱 AC 上作用有力 $\boldsymbol{F}$。试分别画出拱 AC 和 CB 的受力图。

解：(1) 先分析拱 BC 的受力。由于拱 BC 自重不计，且只在 B、C 两处受到铰链约束，因此拱 BC 为二力构件。在铰链中心 B、C 处分别受 $\boldsymbol{F}_{NB}$、$\boldsymbol{F}_{NC}$ 两力的作用，且 $\boldsymbol{F}_{NB} = -\boldsymbol{F}_{NC}$，这两个力的方向如图 1-4b 所示。

(2) 取拱 AC 为研究对象。由于自重不计，因此主动力只有 $\boldsymbol{F}$。拱在铰链 C 处受有拱 BC 给它的约束力 $\boldsymbol{F}'_{NC}$ 的作用，根据作用与反作用定律，$\boldsymbol{F}'_{NC} = -\boldsymbol{F}_{NC}$。拱在 A 处受有固定铰支给它的约束力 $\boldsymbol{F}_{RA}$ 的作用，由于方向未定，可用两个大小未知的正交分力 $\boldsymbol{F}_{Ax}$ 和 $\boldsymbol{F}_{Ay}$ 代替。

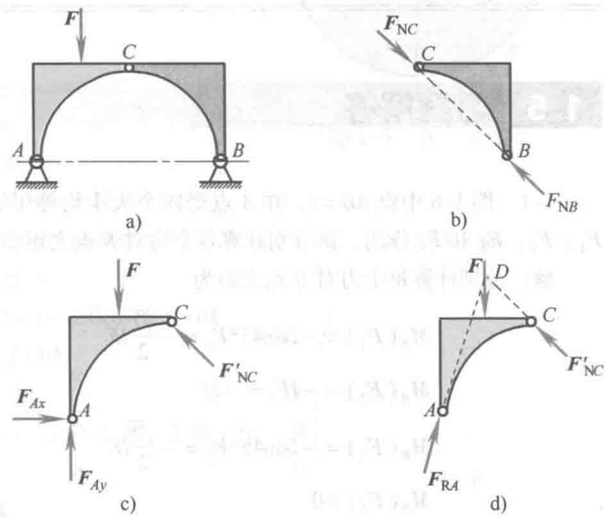

图　1-4

拱 AC 的受力图如图 1-4c 所示。或应用三力平衡汇交的概念画受力图如图 1-4d 所示。两个受力图都对，一般情况下为便于计算通常应用图 1-4c 进行分析。

例 1-5　试画出图 1-5a 所示结构中 AB 构件的受力图。

解：主要构件是指起主要承载作用的构件，或是作用有已知载荷的构件。本题的构架由 AB 和 CD 两构件用铰链和铰支座连接而成，从计算构件受力的角度看，应该分析 AB 构件的受力。

(1) 取 AB 构件为研究对象，根据 B、D 处铰链约束的性质，可画出 AB 构件受力如图 1-5b 所示。但还可进一步分析。

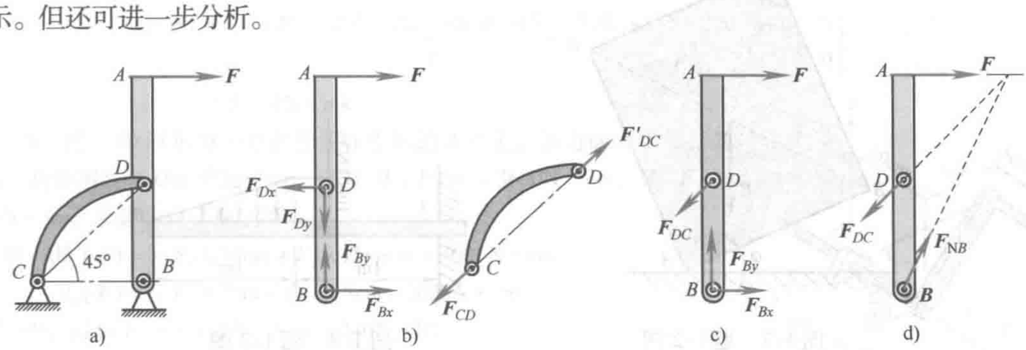

图　1-5

（2）如果注意到 CD 构件为二力构件，作用力 $\boldsymbol{F}_{CD}$ 和 $\boldsymbol{F}'_{DC}$ 应沿 CD 连线。通过作用力和反作用力的关系，可知 $\boldsymbol{F}_{Dx}$ 和 $\boldsymbol{F}_{Dy}$ 可合成 $\boldsymbol{F}_{DC}$（它是 $\boldsymbol{F}'_{DC}$ 的反作用力），于是可画出如图 1-5c 所示的受力图。

（3）再对 AB 构件受力做进一步分析：B 铰的约束力 $\boldsymbol{F}_{Bx}$ 和 $\boldsymbol{F}_{By}$ 可合成为一个力（即 $\boldsymbol{F}_{NB}$），因而 AB 是受三个不平行力作用而平衡的构件，三力作用线的汇交点可由 $\boldsymbol{F}_{DC}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 确定。AB 构件的受力如图 1-5d 所示。

一般情况下为便于计算通常应用图 1-5c 进行分析。

1.5 习题解答

1-1　图 1-6 中设 $AB=l$，在 A 点受四个大小均等于 F 的力 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$ 和 $\boldsymbol{F}_4$ 作用。试分别计算每个力对 B 点之矩。

解：分别计算每个力对 B 点之矩为

$$M_B(\boldsymbol{F}_1) = -l\sin45°F_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}lF$$

$$M_B(\boldsymbol{F}_2) = -lF_2 = -lF$$

$$M_B(\boldsymbol{F}_3) = -l\sin45°F_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}lF$$

$$M_B(\boldsymbol{F}_4) = 0$$

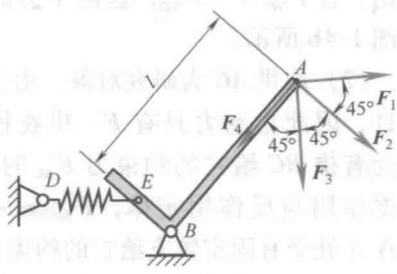

图 1-6　题 1-1 图

1-2　如图 1-7 所示正平行六面体 $ABCD$，重为 $P=100$N，边长 $AB=60$cm，$AD=80$cm。今将其斜放使它的底面与水平面成 $\varphi=30°$角，试求其重力对棱 A 的力矩。又问当 φ 等于多大时，该力矩等于零？

解：力对 A 点的矩为

$$M_A(\boldsymbol{P}) = P\times50\sin(36.87°-\varphi)$$

当 $\varphi=30°$时，$M_A(\boldsymbol{P})=6\text{N}\cdot\text{m}$

当 $\varphi=36°52'$时，力 P 通过 A 点，所以 $M_A(\boldsymbol{P})=0$。

1-3　作用在悬臂梁上的载荷如图 1-8 所示，试求该载荷对点 A 的力矩。

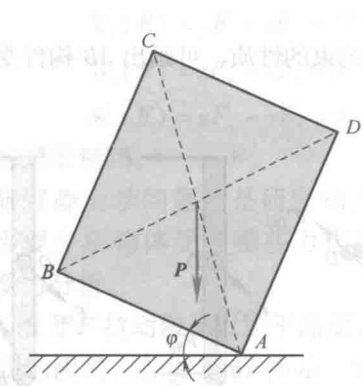

图 1-7　题 1-2 图

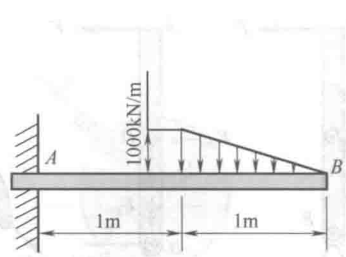

图 1-8　题 1-3 图

解：图示载荷的合力为 $F=q\cdot\dfrac{l}{2}=500$kN，作用点位置距离 A 点为 $\dfrac{4}{3}$m，所以

$$M_A = \left(-500 \times \frac{4}{3}\right)\text{kN} \cdot \text{m} = -667\text{kN} \cdot \text{m}$$

1-4　60N 的力作用在圆盘边缘的点 C 上，试用两种方法求此力对 O、A 和 B 三点的矩。尺寸如图 1-9 所示。

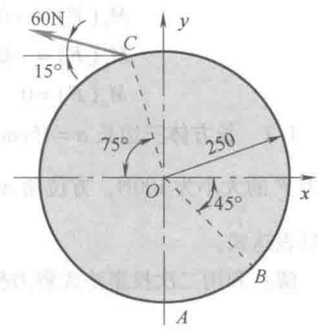

图 1-9　题 1-4 图

解：共有以下 3 种方法，①合力矩定理，②矢量法，③几何法，选任意两种方法即可，本答案仅选其中两种。

解法一：合力矩定理。选择圆盘边缘点 C 的切线方向为 τ 轴方向；选择直角坐标轴 $Oxyz$ 如图 1-9 所示。设 $F_T = 60\text{N}$，则

$$F_T^\tau = F_T \sin 60°$$
$$F_{Tx} = -F_T \cos 15°$$
$$F_{Ty} = F_T \sin 15°$$

所以得

$$M_O(\boldsymbol{F}_T) = F_T^\tau \times 250\text{mm} = 13\text{N} \cdot \text{m};$$
$$M_A(\boldsymbol{F}_T) = F_T^\tau \times 250\text{mm} + F_{Tx} \times 250\text{mm} = 27.5\text{N} \cdot \text{m}$$
$$M_B(\boldsymbol{F}_T) = F_T^\tau \times 250\text{mm} + F_{Tx} \times 250\text{mm}\ \sin 45° - F_{Ty} \times 250\text{mm}\ \cos 45° = 20.49\text{N} \cdot \text{m}$$

解法二：矢量法。从 O 点向 C 点引矢径 $\boldsymbol{r}_{OC}$，由于

$$\boldsymbol{r}_{OC} = -250\sin 15°\boldsymbol{i} + 250\cos 15°\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{F} = F_{Tx}\boldsymbol{i} + F_{Ty}\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r}_{OC} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -250\sin 15° & 250\cos 15° & 0 \\ F_{Tx} & F_{Ty} & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 13\text{N} \cdot \text{m}\boldsymbol{k}$$

同理，从 A 点向 C 点引矢径 $\boldsymbol{r}_{AC}$，则

$$\boldsymbol{r}_{AC} = -250\sin 15°\boldsymbol{i} + (250 + 250\cos 15°)\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{M}_A(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r}_{AC} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -250\sin 15° & 250 + 250\cos 15° & 0 \\ F_{Tx} & F_{Ty} & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 27.5\text{N} \cdot \text{m}\boldsymbol{k}$$

同理，从 B 点向 C 点引矢径 $\boldsymbol{r}_{BC}$，则

$$\boldsymbol{r}_{BC} = (250\cos 45° - 250\sin 15°)\boldsymbol{i} + (250\cos 15° - 250\sin 45°)\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{M}_B(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r}_{BC} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 250\cos 45° - 250\sin 15° & 250\cos 15° - 250\sin 45° & 0 \\ F_{Tx} & F_{Ty} & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 20.49\text{N} \cdot \text{m}\boldsymbol{k}$$

1-5　图 1-10 所示为一力 $\boldsymbol{F}$ 作用在手柄的 A 点上，该力的大小和指向未知，其作用线与 Oxz 平面平行。已知 $M_x(\boldsymbol{F}) = -3600\text{N} \cdot \text{cm}$，$M_z(\boldsymbol{F}) = 2025\text{N} \cdot \text{cm}$。求该力对 y 轴之矩。

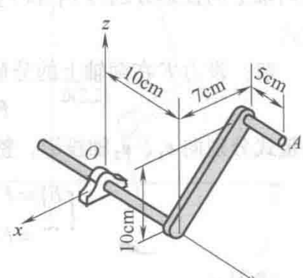

图 1-10　题 1-5 图

解：$M_x(\boldsymbol{F}) = -F_y \times 10\text{cm} + F_z \times 15\text{cm} = -3600\text{N} \cdot \text{cm}$

$M_z(\boldsymbol{F}) = -F_y \times 7\text{cm} - F_x \times 15\text{cm} = 2020\text{N} \cdot \text{cm}$

由 $F_y = 0$，得到 $F_x = -135\text{N}$，$F_z = -240\text{N}$，则

$$M_y(\boldsymbol{F}) = F_z \times 7\text{cm} + F_x \times 10\text{cm} = -3030\text{N} \cdot \text{cm}$$

1-6　图 1-11 所示柱截面，在 A 点受力 $\boldsymbol{F}$ 作用。已知 $F = 100\text{kN}$，坐标

如图所示。求该力对三个坐标轴之矩。

解：

$$M_x(\boldsymbol{F}) = -0.125F = -12.5\text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_y(\boldsymbol{F}) = -0.05F = -5\text{kN}\cdot\text{m}$$
$$M_z(\boldsymbol{F}) = 0$$

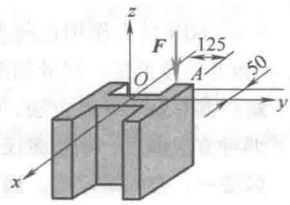

图 1-11　题 1-6 图

1-7　长方体三边长 $a=16\text{cm}$，$b=15\text{cm}$，$c=12\text{cm}$，如图 1-12 所示。已知力 $\boldsymbol{F}$ 的大小为 100N，方位角 $\alpha=\arctan\dfrac{3}{4}$，$\beta=\arctan\dfrac{4}{3}$，试写出力 $\boldsymbol{F}$ 的矢量表达式。

解：利用二次投影法先将力投影到 z 轴和 xOy 面上得

$$F_z = F\cdot\sin\alpha = 100\text{N}\times\frac{3}{5} = 60\text{N}$$

$$F_{xy} = F\cdot\cos\alpha = 100\text{N}\times\frac{4}{5} = 80\text{N}$$

再将 F_{xy} 投影到 x 轴和 y 轴得

$$F_x = F_{xy}\cdot\cos\beta = 80\text{N}\times\frac{3}{5} = 48\text{N}$$

$$F_y = -F_{xy}\cdot\sin\beta = -80\text{N}\times\frac{4}{5} = -64\text{N}$$

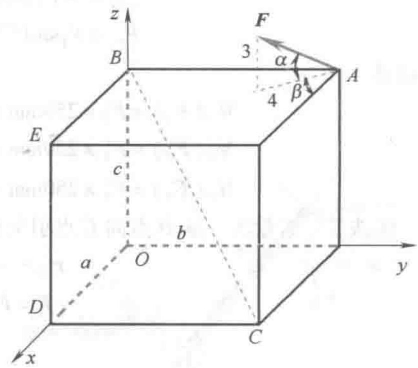

图 1-12　题 1-7 图

得到力 $\boldsymbol{F}$ 的矢量表达式为

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k} = (48\boldsymbol{i} - 64\boldsymbol{j} + 60\boldsymbol{k})\text{N}$$

1-8　图 1-13 所示 V、H 两平面互相垂直，平面 ABC 与平面 H 成45°，$\triangle ABC$ 为直角三角形。求力 $\boldsymbol{F}$ 在平面 V、H 上的投影。

解：力 $\boldsymbol{F}$ 在 BC 轴与 AC 轴上的投影分别为

$$F_{BC} = F\cdot\cos60°,\ F_{AC} = F\cdot\sin60°$$

F_{AC} 分别在 V、H 轴上的投影分别为

$$F_{AC\cdot V} = F\cdot\sin60°\cdot\sin45°$$
$$F_{AC\cdot H} = F\cdot\sin60°\cdot\cos45°$$

力 $\boldsymbol{F}$ 在平面 V、H 上的投影为

$$F_V = \sqrt{F_{AC\cdot V}^2 + F_{BC}^2} = \sqrt{(F\sin60°\sin45°)^2 + (F\cos60°)^2} = 0.791F$$
$$F_H = \sqrt{F_{AC\cdot H}^2 + F_{BC}^2} = \sqrt{(F\sin60°\cos45°)^2 + (F\cos60°)^2} = 0.791F$$

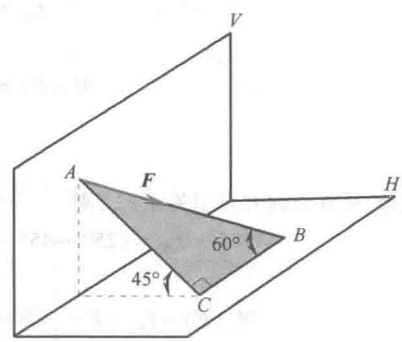

图 1-13　题 1-8 图

1-9　两相交轴夹角为 α（$\alpha\neq0$），位于两轴平面内的力 $\boldsymbol{F}$ 在这两轴上的投影分别为 F_1 和 F_2。如图 1-14所示。试写出 $\boldsymbol{F}$ 的矢量式。

解：设力 F 在两轴上的分量分别为 $\boldsymbol{F}_1'$、$\boldsymbol{F}_2'$，则

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_1' + \boldsymbol{F}_2'$$

矢量式分别向 $\boldsymbol{e}_1$、$\boldsymbol{e}_2$ 轴投影，整理得

$$\begin{cases} F_1' = F_1 - F_2'\cdot\cos\alpha & ① \\ F_2' = F_2 - F_1'\cdot\cos\alpha & ② \end{cases}$$

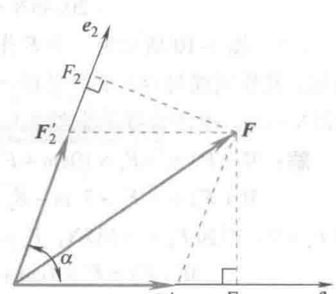

图 1-14　题 1-9 图

式①×cosα－式②解得

$$F_2' = \frac{F_2 - F_1\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$