工业和信息化普通高等教育
“十三五”规划教材立项项目

21世纪高等学校
管理科学与工程系列教材

微课版

管理运筹学

Management Operational Research

徐选华 ◉ 主编

谭春桥 马本江 刘智勇 简惠云 ◉ 副主编

中国工信出版集团 人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

工业和信息化普通高等教育
"十三五"规划教材立项项目

21世纪高等学校
管理科学与工程系列教材

微课版

管理运筹学

Management Operational Research

徐选华 ● 主编
谭春桥 马本江 刘智勇 简惠云 ● 副主编

图书在版编目（CIP）数据

管理运筹学 : 微课版 / 徐选华主编. -- 北京 : 人民邮电出版社, 2018.1
21世纪高等学校管理科学与工程系列教材
ISBN 978-7-115-45440-9

Ⅰ. ①管… Ⅱ. ①徐… Ⅲ. ①管理学－运筹学－高等学校－教材 Ⅳ. ①C931.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第122082号

内容提要

本书参照教育部管理学科运筹学课程教学大纲要求，结合国内重点高校运筹学教材流行版本的内容体系和作者多年的教学成果和经验编写而成，本书系统地讲解了在经济管理领域应用最为广泛的线性规划、对偶规划、灵敏度分析、运输问题、目标规划、整数规划、动态规划、图与网络分析、存储论、排队论和决策论，不同类型的高校可以根据本校的实际情况及学时限制选择其中的主要内容进行教学。

本书的特色是在介绍管理运筹学基本原理和应用方法的基础上，运用大量的经济和管理领域实例和案例，以问题为导向，着眼于培养读者应用运筹学原理和方法解决实际管理与决策问题的能力、运用国际上流行的运筹学软件 WinQSB 进行经济管理决策分析的能力，弱化具体的模型和公式的推演过程，让读者将主要的时间和精力集中在问题分析建模、软件求解、经济管理决策分析上。

本书注重原理及其实际应用，所列例题、习题与案例既具有代表性又紧密结合经济管理实际，同时兼顾相关专业需要，具有一定的深广度。本书每章章末有小结和一定数量的习题（附答案），便于读者自学。

本书适合作为高等院校经济管理类本专科生、MBA、EMBA、MPA、工程硕士学员的教材或参考书，亦可供广大从事实际工作的企业管理人员、工程技术人员和政府部门相关人员自学参考。

◆ 主　　编　徐选华
副 主 编　谭春桥　马本江　刘智勇　简惠云
责任编辑　刘向荣
责任印制　焦志炜
◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京鑫正大印刷有限公司印刷
◆ 开本：787×1092　1/16
印张：17.25　　　　2018 年 1 月第 1 版
字数：454 千字　　　　2018 年 1 月北京第 1 次印刷

定价：49.80 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315
广告经营许可证：京东工商广登字 20170147 号

前 言

FOREWORD

运筹学是一门定量优化的决策科学，起源于20世纪30年代英国的军事系统模拟实验，当时科学家称之为Operations Research，其研究的内容是综合协调、统筹规划先进的军事技术和装备等资源，以期发挥最大的效益。在第二次世界大战期间和战后的经济、生产恢复时期，一些由多学科专家组成的运筹团体在军事决策、资源合理利用以及提高生产效率等领域都做出了很大的贡献，他们的工作也促使运筹学在理论上逐步形成为一门新兴的边缘学科，并迅速得到普及和发展。20世纪50年代，我国运筹学界在翻译“Operations Research”这一术语时，从《史记·高祖本纪》中“夫运筹策帷帐之中，决胜于千里之外，吾不如子房”一语，摘取“运筹”二字作为这门学科的名称，之后为学术界普遍接受。

管理运筹学利用现代数学、系统科学、计算机科学以及其他科学的最新成果，来研究人类从事各种活动中处理事务的数量化规律，使得有限的人、财、物、时、空、信息等资源得到充分和合理的利用，以期获得尽可能满意的经济和社会效果。管理运筹学内容相当丰富，包括很多分支科学，就其理论和应用意义来归纳，具有以下性质和特征。

（1）管理运筹学是一门以数学为工具，寻求各种经济管理决策问题最优方案的学科，所以是一门优化科学，也是一门内容相当广泛且实践性很强的应用数学。正因为如此，在我国早期引进和从事这门学科的先驱者多为数学家，如我国著名数学家华罗庚教授在普及和推广统筹法、优选法方面的贡献，受到国家和人民的推崇和尊敬。

（2）管理运筹学研究问题从系统的观点出发，研究全局性的规划问题和综合优化的规律。它是一门新兴科学——系统工程学的主要基础理论，促进了运筹学与系统工程在我国的普及和应用，最早的宣传和组织工作是由著名科学家钱学森教授倡导和主持的。

（3）管理运筹学的目的是为经济和管理人员在做决策时提供科学的依据，因此它是实现管理现代化的有力工具。运筹学从诞生之日起，就以组织管理科学化作为己任，其理论和实践已表明它是现代管理科学的重要组成部分。许多高等院校的经济、管理、信息科学等专业都开设了运筹学课程。

根据社会经济的发展及人才培养的需求，迫切需要一本适用于高等院校经济管理类本专科生、MBA、EMBA、MPA、工程硕士的管理运筹学教材，本书正是在这一需求背景下，结合教育部管理学科运筹学课程教学大纲而编写，侧重于运筹学在经济和管理领域的应用，重点解决经济与管理领域中的优化和决策问题。

在内容的选取方面，本书充分考虑到本专科生、MBA、EMBA、MPA、工程硕士以及经济管理专业、企业管理和工程技术人员的需求，强化掌握管理运筹学原理和方法的应用，注重分析、处理和解决经济与管理

领域实际决策问题能力的培养。因此，本书在介绍原理的基础上，通过大量的应用实例和案例，同时阐明其经济意义，从中找到管理的思路和方法。本书内容叙述力求通俗易懂，便于自学。

读者学习本书应该着重培养以下三个方面的能力：善于运用所学知识，为经济和管理领域各种实际问题建立数学模型；掌握各种模型的优化方法及其软件求解方法；正确理解和应用模型中各种参数软件求解结果的经济和管理意义。

本书由中南大学商学院博士生导师徐选华教授任主编，谭春桥、马本江、刘智勇、简惠云任副主编，博士生导师李一智教授任主审。其中第 1 章、第 2 章和第 3 章由徐选华教授编写，第 4 章和第 8 章由谭春桥教授编写，第 5 章由刘智勇博士编写，第 6 章由简惠云副教授编写，第 7 章由马本江教授编写。中南大学商学院的领导及同事对本书的编写工作给予了大力支持和鼓励，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，书中难免存在疏漏与不妥之处，恳请读者不吝赐教。

编者

2017 年 12 月

目录

CONTENTS

第1章 线性规划基础

1.1 引言

20 世纪 30 年代末，前苏联数学家康特罗维奇研究交通运输和机械加工等部门的生产管理工作，于 1939 年写了《生产组织与计划中的数学方法》一书初稿，为线性规划建立数学模型及解法奠定了基础；与此同时，美国数学家库普曼研究了选择最优化运输方案的方法，建立了“线性规划数学模型”，并取得了重大进展。他们二人由于科学的创建，后来成为诺贝尔经济学奖的获得者。到了 40 年代，线性规划得到进一步应用和发展，在工业、农业生产管理，交通运输的指挥高度，资源开发，商业和银行等领域得到广泛应用，对提高企业的经济效益有显著成效。自 1947 年美国数学家丹齐格（G.B.Dantzig）提出了一般线性规划问题求解方法——单纯形法之后，线性规划在理论上趋向成熟，在实用中日益广泛与深入，特别是在电子计算机能处理成千上万个约束条件和决策变量的线性规划问题之后，线性规划的适用领域更为广泛了，从解决技术问题的最优化设计，到工业、农业、商业、交通运输业、军事、经济计划和管理决策等领域都可以发挥作用，它已是现代管理科学的重要基础理论。

线性规划（Linear Programming，LP）是运筹学的基础部分，是目前应用最广泛的一种系统优化方法，广泛应用于工农业生产和经济管理等领域，其核心思想是以最少的资源消耗取得最大的经济效果，即研究在一定的人、财、物等资源条件下，取得最大的经济效益。例如，某企业生产两种产品，需要消耗三种资源，根据资源供应商可知三种资源的限量，根据生产工艺可知产品单耗（单位产品的资源消耗量），根据财务部和市场部的调研和预测可知两种产品的单位利润，现要制订两种产品的最优生产计划，使得企业能够获得的利润最大。这就是一个比较典型的线性规划问题案例，通过建立该问题的线性规划数学模型，对该模型进行优化求解获得最优解，根据该最优解即可获得最优生产计划。

1.2 线性规划及其数学模型

在生产管理和经营活动中经常提出一类问题，即如何合理有效地利用有限的人、财、物等资源，才能得到最佳的经济效果。下面我们来讨论一个经典的线性规划问题引例。

1.2.1 线性规划问题引例

【例 1-1】（线性规划问题引例）某公司生产甲、乙两种产品，均需在 A、B、C 三种不同的设备上加工，产品加工所需工时单耗、产品销售后能获得的利润及设备可用工时数如表 1-1 所示。问：如何安排生产计划，才能使该公司获得的总利润最大？

表 1-1　　产品生产基础数据表

设备 / 单耗 / 产品	A	B	C	利润（元/千克）
甲	3	5	9	70
乙	9	5	3	30
限制工时	540	450	720	

解：这是一个典型的线性规划问题，下面建立该问题的线性规划数学模型。

① 设甲、乙产品产量分别为 x_1 千克、x_2 千克——决策变量，简称变量

② 设总利润为 Z，则

$\text{Max } Z = 70x_1+30x_2$　　——目标函数

③ 设备可用工时数限制　　——约束条件

$3x_1 + 9x_2 \leqslant 540$　　A 设备可用工时约束

$5x_1 + 5x_2 \leqslant 450$　　B 设备可用工时约束

$9x_1 + 3x_2 \leqslant 720$　　C 设备可用工时约束

$x_1, x_2 \geqslant 0$　　非负约束

因此原问题的数学模型为（其中 s.t.是 subject to 的简写，意为约束条件）：

$$\text{Max } Z = 70x_1+30x_2 \quad ①$$
$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1 + 9x_2 \leqslant 540 & ②\\ 5x_1 + 5x_2 \leqslant 450 & ③\\ 9x_1 + 3x_2 \leqslant 720 & ④\\ x_1,x_2 \geqslant 0 & ⑤\end{cases} \tag{1-1}$$

这就是该线性规划问题引例的数学模型，因此数学模型就是对一个实际问题以适当的数学公式来表达它的内在关系。

1.2.2 数学模型的经济含义

当我们把一个实际问题表达成 LP 数学模型时，一定要注意和理解数学模型中的经济含义。

1. 数学模型的三要素

（1）有一组待确定的决策变量。如【例 1-1】中（x_1，x_2）为一个具体行动方案。

一般来说，构成线性规划的问题都有很多具体方案可供选择，但是最优的方案往往只有一个，要从很多的可行方案中去求得这个最优方案，使得资源得到充分利用，避免因任意选取其他方案而造成资源的浪费，这样就能够达到最优的经济效果。

（2）有一个明确的目标要求（Max 或 Min）。如【例 1-1】中要求利润 Z 最大。

显然，任取一种计划产量 x_1 和 x_2 值的可行方案（即满足全部约束条件），都会得到一定数量的利润，但不一定是最大，因此目标要求与待定的决策变量的取值紧密相关，也就是说目标值是决策变量的函数，称为目标函数。另外目标要求依具体问题的性质不同而不同，本例中求总利润，因此越大越好，用符号 Max 表示；有的情况下可能是计算费用或时间，因此越小越好，用符号 Min 表示。

人们常把线性规划研究的问题归纳为两类：第一类是某项任务确定后，如何统筹安排，尽量以最少的资源去完成这项任务；第二类是现有一定数量的资源，合理安排和使用它们，使完成的任务最多，创造的财富最大。实际上这两类问题是同一个问题的两个方面或两种提法，本质都是寻求整个问题的某项整体指标的最优解。

（3）存在一组约束条件。如【例 1-1】中 A、B、C 三种设备可用工时的约束。

它们都是用决策变量的线性方程来表示的，约束条件反映规划的客观限制，在产品生产过程中，资源往往是有限的，约束条件确定规划的实现范围，即确定了所求变量的变化域。

2. 数学模型中系数的含义

（1）目标函数中决策变量的系数 c_j，称为价值系数。

如【例 1-1】中的 70、30 就叫价值系数，表示单位产品提供的利润（元/千克）。在具体问题中有明确的经济含义和计量单位。

（2）约束条件左边决策变量前的系数 a_{ij}，称为约束条件系数。

在具体问题中也有明确的经济含义和计量单位，如表 1-1 中的 3、5、9 和 9、5、3 为单耗，表示单位产品的设备工时消耗量（小时/千克）。

（3）约束条件右边常数 b_i，称为限制常数。如表 1-1 中的 540、450、720 就叫限制常数，表示设备 A、B、C 现有最大的可用工时。在具体问题中也有明确的含义和计量单位。

1.2.3 数学模型解的名称

在线性规划数学模型式（1-1）中，一般我们能够找到决策变量的很多个解，即有很多种决策方案，将所有约束条件用图形绘出，如图 1-1 所示。以下定义线性规划（LP）数学模型几种解的名称。

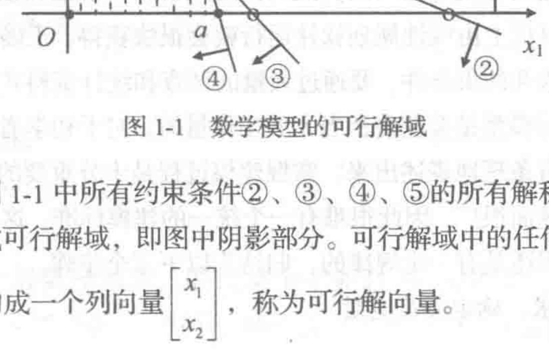

图 1-1 数学模型的可行解域

（1）可行解：凡满足图 1-1 中所有约束条件②、③、④、⑤的所有解称为可行解，它们对应可行方案。所有可行解的集合构成可行解域，即图中阴影部分。可行解域中的任何一点称为可行点，对应一个可行方案，这个点的坐标构成一个列向量 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$，称为可行解向量。

（2）最优解：凡使得目标函数 Z 值达到最优（最大或最小）的可行解称为最优解。最优解一般情况下是唯一存在的，但在一些特殊的 LP 数学模型中，可能有无穷多个最优解或者不存在最优解的情况。

（3）基本解：约束条件直线的交点对应的解称为基本解，如图 1-1 中所有实心点和空心点对应的解。

（4）基本可行解：可行解域边界上的约束条件直线交点对应的解，即图 1-1 中所有实心点对应的解。它满足两个条件：一是基本解，约束条件直线交点对应的解；二是可行解，即满足所有约束条件的解，在可行解域内。

1.2.4 线性规划数学模型的一般形式

综上所述，线性规划数学模型从结构上看包括决策变量、目标函数、约束条件三个部分，完整的表达式为：

$$\text{Max（Min）} Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \cdots + c_n \cdot x_n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n \leqslant (\geqslant, =)\ b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n \leqslant (\geqslant, =)\ b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n \leqslant (\geqslant, =)\ b_m \\ x_j \geqslant 0,\ j = 1, \cdots, n \end{cases} \tag{1-2}$$

如果式（1-2）中的方程（包括目标函数和约束条件）均是线性方程，则式（1-2）称为线性规划数学模型；如果式（1-2）中的方程出现非线性方程，则式（1-2）称为非线性规划数学模型。

1.2.5 线性规划问题求解过程

利用线性规划求解实际问题可归结为以下三个步骤。

第一步 将实际问题转化为数学模型（数学公式），这一步叫建模。

第二步 求解数学模型的最优解，有以下两种方法。

方法（1）图解法，适合于两个变量的 LP 数学模型。

方法（2）单纯形法，适合于任意个变量的 LP 数学模型。

第三步 将数学模型的最优解转化为原问题的最优方案。

1.3 线性规划问题建模

建模是解决线性规划问题的重要环节。从实践的角度来讲，一个正确数模的建成，标志着问题的解决接近完成一半，答案在计算机上由线性规划软件运行就会很快获得。正确建模要求建模者熟悉规划问题的基本内容，明确目标要求和约束条件，要通过大量的调查和统计资料获取原始的可靠数据。这些要求对于建立一个较复杂的实际模型是要花费相当大的工作量的。对于初学者来说，怎样从问题的内容出发，分析和认识问题，善于有条理地表述出来，掌握建模过程是十分重要的技术。

线性规划适用解决的问题面很广，因此很难有一个统一的建模标准，这就使建模成为一种带技巧性的工作。即使如此，建模过程还是有一定规律的，归结为以下三个步骤。

第一步 分析问题的要求，确定决策变量。

第二步 找出问题目标要求，确定目标函数。

第三步 分析决策变量所受的限制，列出约束条件。

本节通过经济管理领域中几个典型问题来说明建模过程，同时介绍不同类型问题的建模过程，使得对线性规划的应用领域和它的现实意义有进一步的认识。

1.3.1 资源合理利用问题

资源合理利用是企业编制生产计划时经常考虑的实际问题。其任务是企业（也可以是一个地区，甚至整个国家）如何规划和调配它的有限资源以达到生产的目的，并使企业获取最大的利润；或使资源、材料耗费最少，从而使生产成本为最小。现举例说明。

【例 1-2】某厂生产 A、B 两种产品，都需用煤、金属材料、电力等资源。制造 A 产品 1 吨需用煤 6 吨、金属材料 80 千克、电力 50 千瓦；制造 B 产品 1 吨需用煤 8 吨、金属材料 50 千克、电力 10 千瓦。现该厂仅有煤 540 吨、电力 2 000 千瓦和金属材料 4 000 千克可供利用，其他资源可以充分供应。又知：A、B 产品能得到的利润分别为 6×10^3 元/吨和 5×10^3 元/吨。问：在现有这些资源条件下，应生产多少 A 和 B 产品，使企业获得利润最大？试建立该问题的数学模型。

解：这是一个典型的资源合理利用问题，将问题转化为表 1-2，辅助建模。

表 1-2 产品生产基础数据表

资源 / 单耗 / 产品	煤（吨）	金属材料（千克）	电力（千瓦）	利润（10^3元/吨）
A	6	80	50	6
B	8	50	10	5
资源限量	540	4 000	2 000	

(1) 确定决策变量。要求回答的是 A、B 产品的生产量，现用 x_1 和 x_2 分别表示 A、B 产品的生产量（吨）。

(2) 确定目标函数。工厂是要求利润为最大，设 Z 表示企业利润，则有

$$\text{Max } Z=6x_1+5x_2 \ (10^3 \text{元})$$

(3) 确定约束条件。根据该问题三种资源（煤、金属材料、电力）可用量的限制，可建立这三种资源限制约束条件如下。

煤： $6x_1+8x_2 \leqslant 540$（吨）

金属材料： $80x_1+50x_2 \leqslant 4\,000$（千克）

电力： $50x_1+10x_2 \leqslant 2\,000$（千瓦）

非负限制： $x_1, x_2 \geqslant 0$

可得该问题线性规划数模如下：

$$\text{Max } Z = 6x_1+5x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 6x_1+\ 8x_2 \leqslant 540 \\ 80x_1+50x_2 \leqslant 4\,000 \\ 50x_1+10x_2 \leqslant 2\,000 \\ x_1,x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

资源合理利用问题的一般数模如下：假设某个企业有 m 种资源，已知每种资源的数量为 b_i（$i=1,2,\cdots,m$）；该企业能生产 n 种产品（x_j 为第 j 种产品的产量，$j=1,2,\cdots,n$），已知生产每一种产品单位

产量所消耗的各种资源数量，我们用 a_{ij} 表示第 j 种产品对第 i 种资源单耗；设各种产品的价格为已知，用 c_j 表示第 j 种产品的单价；在现有资源条件下如何规划生产，使得产值最大。数模如下：

$$\text{Max } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2 \\ \qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m \\ x_j \geqslant 0,\ j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

1.3.2 运输问题

在国民经济中如何组织好一个企业、一个地区乃至全国范围内的物资调运工作是十分重要的。譬如某类产品有若干个生产地，已知每个生产地的产量；这类产品有若干个消费地，各地需求量也知道。假如总产量和总消费量恰好相等，由各产地运到各消费地的运输单价已知，现如何来编制一个最优的运输计划，使总的运输费用为最小。

【例 1-3】某地有三个有色金属矿 A_1、A_2、A_3，生产同一种金属矿石，A_1 矿的年产量为 100 万吨，A_2 矿为 80 万吨，A_3 矿为 50 万吨。矿石全部供应 4 个冶炼厂，B_1 厂的全部需求量为 50 万吨，B_2 厂为 70 万吨，B_3 厂为 80 万吨，B_4 厂为 30 万吨。总产量恰好等于总需求量，矿石由各矿山运到冶炼厂的单位运价已知，如表 1-3 所示。问：如何安排运输，使各矿山的矿石运到冶炼厂，满足各厂的需要，且总运输费用最小？试建立该问题的数学模型。

表 1-3　　运价表　　（单位：元/吨）

冶炼厂 / 运价 / 矿山	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1.5	2	0.3	3
A_2	7	0.8	1.4	2
A_3	1.2	0.3	2	2.5

解：这是一个运输问题，要制订最优运输计划使总运输费用最小。

(1) 确定决策变量。要确定各矿山运给冶炼厂多少矿石，使总运输费用最小，故设 x_{ij} 表示第 i 个矿山运到第 j 个冶炼厂的矿石量，可列表 1-4。

表 1-4　　运输计划表

冶炼厂 / 运输量（万吨）/ 矿山	B_1	B_2	B_3	B_4	产量（万吨）
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	100
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	80
A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	50
需求量（万吨）	50	70	80	30	230

(2) 确定目标函数。本题给出的表 1-4 中的单位运价就是价值系数 c_{ij}（元/吨）。问题的目标是求总

运输费用最小，设 Z 表示总运输费用，故目标函数为

$$\text{Min } Z=1.5x_{11}+2x_{12}+0.3x_{13}+3x_{14}+7x_{21}+0.8x_{22}+1.4x_{23}+2x_{24}+1.2x_{31}+0.3x_{32}+2x_{33}+2.5x_{34}\ (\text{万元})$$

(3) 确定约束条件。由表 1-4 可以写出

$$\text{s.t.}\begin{cases} \left.\begin{array}{l} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=100 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=80 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=50 \end{array}\right\} \text{各矿山矿石输出量与产量平衡} \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=50 \\ \left.\begin{array}{l} x_{12}+x_{22}+x_{32}=70 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=80 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=30 \end{array}\right\} \text{各冶炼厂矿石输入量与需求量平衡} \\ x_{ij}\geqslant 0,\ i=1,\cdots,3;\ j=1,\cdots,4 \end{cases}$$

运输问题的一般数模可表达如下：设某产品有 m 个生产地，其产量分别为 a_i（i=1,2,…,m）；该产品有 n 个消费地，需要量分别为 b_j（j=1，2，…，n），并且产销平衡，即总产量等于总需求量。以 c_{ij} 表示第 i 产地运到第 j 消费地的单位产品运价。则数模为：

$$\text{Min } Z=(c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\cdots+c_{1n}x_{1n})+\cdots+(c_{m1}x_{m1}+c_{m2}x_{m2}+\cdots+c_{mn}x_{mn})$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}=a_1 \\ \cdots\cdots \\ x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn}=a_m \\ x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{m1}=b_1 \\ \cdots\cdots \\ x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{mn}=b_n \\ x_{ij}\geqslant 0,\ i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n \end{cases}$$

1.3.3 合理下料问题

合理下料是许多工业部门中经常遇到的问题。例如机械加工时，常常将一定的条形金属原材料或板料切割成若干段或块，加工成所需的毛坯。在一般情况下，材料不可能被完全利用，就有边角余料要处理，处理不好就会造成大材小用，优材劣用，甚至当成废物收集，搬运回炉。这样产品材料单耗高，成本也就高。因此如何最大限度地减少边角余料，提高原材料利用率，就是提高经济效益的规划问题。现举一例说明。

【例 1-4】 有一批长度为 180 厘米的钢管，需截成 70 厘米、52 厘米和 35 厘米三种管料，如图 1-2 所示。它们的需求量应分别不少于 100 个、150 个和 100 个。问：应如何下料才能使钢管的余料为最少？试建立该问题的数学模型。

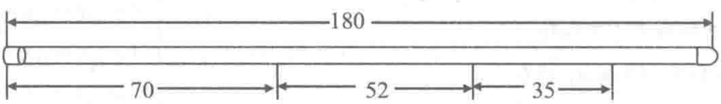

图 1-2 钢管长度及其管料尺寸示意图

解： 这是一个合理下料问题，下料方案是在满足管料尺寸条件下可能的各种下料方式中进行选择，利用上图列出所有的下料方式（共有 8 种），如表 1-5 所示。

表 1-5　　下料方式列表

下料方式 \ 管料个数 \ 管料尺寸	70（厘米）	52（厘米）	35（厘米）	余料（厘米）
一（x_1根）	2	0	1	5
二（x_2根）	1	2	0	6
三（x_3根）	1	1	1	23
四（x_4根）	1	0	3	5
五（x_5根）	0	3	0	24
六（x_6根）	0	2	2	6
七（x_7根）	0	1	3	23
八（x_8根）	0	0	5	5
管料需求数（个）	100	150	100	

（1）确定变量。设 x_j 为第 j 种下料方式所用的钢管根数，$j=1,2,\cdots,8$。

（2）确定目标函数。要求总余料最少，设总余料为 Z，则

$$\text{Min } Z = 5x_1+6x_2+23x_3+5x_4+24x_5+6x_6+23x_7+5x_8 \text{（厘米）}$$

（3）确定约束条件。获得的管料个数不少于需求量，即：

70 厘米管料个数需求约束：$2x_1+x_2+x_3+x_4 \geqslant 100$（个）

52 厘米管料个数需求约束：$2x_2+x_3+3x_5+2x_6+x_7 \geqslant 150$（个）

35 厘米管料个数需求约束：$x_1+x_3+3x_4+2x_6+3x_7+5x_8 \geqslant 100$（个）

非负约束：$x_j \geqslant 0$，并且为整数，$j=1,2,\cdots,8$

于是该下料问题的线性规划数模如下：

$$\text{Min } Z = 5x_1 + 6x_2 + 23x_3 + 5x_4 + 24x_5 + 6x_6 + 23x_7 + 5x_8$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 100 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \geqslant 150 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 5x_8 \geqslant 100 \\ x_j \geqslant 0,\ \text{并且为整数},\ j = 1,2,\cdots,8 \end{cases}$$

这是一个整数线性规划数学模型，即变量要求取整数。如果数学模型中所有的变量都要求取整数，则该数学模型称为纯整数线性规划数学模型；如果数学模型中一部分变量要求取整数，则该数学模型称为混合整数线性规划数学模型。

合理下料问题的一般数学模型如下：假设需要切割 m 种零件毛坯，其数量分别以 b_i 表示（$i=1,2,\cdots,m$）；设可能有 n 种下料方式，并分别以 $a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj}$ 表示第 j 种下料方式每根原料（或每块板料）所切割出来的各种零件毛坯数量。设 x_j 表示第 j 种下料方式所消耗的原材料根数，则有

$$\text{Min } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geqslant b_2 \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant b_m \\ x_j \geqslant 0,\ \text{且为整数},\ j = 1,\cdots,n \end{cases}$$

1.3.4 分派问题

在生产管理中，常有为了发挥最大工作效率而优化分派人员的问题，现举一例说明。

【例 1-5】设有 A、B、C、D 四件工作分派给甲、乙、丙、丁做，每项工作只能由一人来做，每个人只能做一项工作。希望适当安排人选，发挥各人特长又能使总的效率最大。表 1-6 表示各人对各项工作所具有的工作效率。

表 1-6　　人员工作效率表

工作 / 效率 / 人员	A	B	C	D
甲	0.6	0.2	0.3	0.1
乙	0.7	0.4	0.3	0.2
丙	0.8	1.0	0.7	0.3
丁	0.7	0.7	0.5	0.4

解：这是一个分派问题，要制订最优分派计划使总效率最大。

(1) 确定决策变量。设 x_{ij} 为分派第 i 个人从事第 j 项工作，$x_{ij}=1$、0（分派与否），如果 $x_{ij}=1$，说明把第 j 项工作分派给第 i 人来做；如果 $x_{ij}=0$，表示第 j 项工作不分派给第 i 人来做。因此，x_{ij} 只能取 0 和 1 两个值中之一，可列表 1-7。

表 1-7　　人员分派计划表

工作 / 分派与否 / 人员	A	B	C	D
甲	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
乙	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
丙	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}
丁	x_{41}	x_{42}	x_{43}	x_{44}

(2) 确定目标函数。总效率可以认为是各人从事每项工作效率之和，设总效率为 Z，

则目标函数为：

$$\begin{aligned}\text{Max } Z=&0.6x_{11}+0.2x_{12}+0.3x_{13}+0.1x_{14}+0.7x_{21}+0.4x_{22}+0.3x_{23}+0.2x_{24}+0.8x_{31}+1.0x_{32}+0.7x_{33}\\&+0.3x_{34}+0.7x_{41}+0.7x_{42}+0.5x_{43}+0.4x_{44}\end{aligned}$$

(3) 确定约束条件。由题意知，每个人只能被分派一项工作（且必须做一项工作），每项工作只能由一个人来做（且必须由一个人来做），由此可列出以下约束条件方程：

$$\text{s.t.}\begin{cases}\left.\begin{array}{l}x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=1\\x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=1\\x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=1\\x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}=1\end{array}\right\}\text{每个人只能做一项工作}\\\left.\begin{array}{l}x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1\\x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1\\x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=1\\x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=1\end{array}\right\}\text{每项工作只能由一人来做}\\x_{ij}=1、0,\ i=1,\cdots,4;\ j=1,\cdots,4\end{cases}$$