高等数学

核心理论剖析与解题方法研究

程克玲 著

GAODENG SHUXUE

HEXIN LILUN POUXI YU JIETI FANGFA YANJIU

电子科技大学出版社
University of Electronic Science and Technology of China Press

高等数学

核心理论剖析与解题方法研究

程克玲　著

电子科技大学出版社
University of Electronic Science and Technology of China Press
·成都·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学核心理论剖析与解题方法研究/程克玲著.
--成都：电子科技大学出版社，2018.1
ISBN 978-7-5647-5754-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①程… Ⅲ.①高等数学—题解—方法
研究 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 028033 号

内容简介

本书对高等数学核心理论及解题方法进行了研究，主要内容包括：函数与极限、导数与微分、微分中值定理、导数的应用、不定积分、定积分、多元函数与重积分、级数等。本书结构合理，条理清晰，内容丰富新颖，是一本值得学习研究的著作，可供相关人员参考使用。

高等数学核心理论剖析与解题方法研究
GAODENG SHUXUE HEXIN LILUN POUXI YU JIETI FANGFA YANJIU
程克玲 著

策划编辑 杜 倩 刘 愚
责任编辑 刘 愚

出版发行 电子科技大学出版社
成都市一环路东一段 159 号电子信息产业大厦九楼 邮编 610051
主 页 www.uestcp.com.cn
服务电话 028－83203399
邮购电话 028－83201495

印 刷 三河市铭浩彩色印装有限公司
成品尺寸 170 mm×240 mm
印 张 15.75
字 数 282 千字
版 次 2018 年 4 月第 1 版
印 次 2018 年 4 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5647-5754-0
定 价 65.00 元

前　言

数学是自然科学的基石，而高等数学又是整个数学大厦的根基.高等数学以函数为主要研究对象，以微积分为核心内容，具有高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性.在长期的发展过程中，高等数学已经形成了其独特而且完整的思想方法体系，针对各类问题也有着一定的解题技巧.要想深入研究和学习高等数学，就必须针对其各类问题展开系统性的研究，归纳总结其解题方法与应用技巧，从而深刻把握高等数学的思想性、方法性与灵活性.为此，作者特撰写本书.

从内容上看，全书共分 8 章.在分别对函数与极限、导数与微分、微分中值定理、导数的应用、不定积分、定积分、多元函数与重积分、级数等高等数学核心理论进行系统剖析的同时，针对各部分理论对应的解题方法技巧展开了研究讨论.所选例题均为高等数学中极具有代表性的典型例题，每一题在求解完成之后，都会给出相应的解题方法技巧点评，不少例题还尝试使用多种方法解答.与此同时，书中对每一部分内容所涉及问题的解决方法都尽可能地进行必要的归类与对比研究.

全书由浅入深、循序渐进、结构严谨、逻辑清晰、抓住关键、突出重点.在确保理论完整、推理严密的同时，力求呈现高等数学精深而严谨的思想魅力与灵活多变而又有章可循的方法技巧.另外，书中还加入了作者对一些问题的求解方法的创新尝试.

本书是作者在多年高等数学教学与研究经验的基础上，虚心接受同行专家的指导，收集并参考大量的学术文献撰写而成的.在此，特向所参考文献的作者与提供指导和帮助的专家表示衷心的感谢.由于作者水平有限，加之时间仓促，虽然经过多次细心检查修改，书中仍然不免会有不足之处，真诚欢迎同行学者和广大读者批评指正.

作　者

2017 年 11 月

目 录

第 1 章　函数与极限……………………………………………………………… 1

1.1　函数与极限基本理论概述 ……………………………………………… 1

1.2　数列极限 …………………………………………………………………… 8

1.3　函数极限……………………………………………………………………… 18

1.4　极限思想方法及其应用……………………………………………………… 30

1.5　函数的连续性与间断点……………………………………………………… 31

1.6　闭区间上函数的连续性……………………………………………………… 36

第 2 章　导数与微分 ……………………………………………………………… 40

2.1　导数与微分基本理论概述…………………………………………………… 40

2.2　导数的计算…………………………………………………………………… 44

2.3　两类特殊函数导数的计算…………………………………………………… 49

2.4　导数几何意义及其物理意义………………………………………………… 54

2.5　微分及其在近似计算中的应用……………………………………………… 60

第 3 章　微分中值定理 …………………………………………………………… 67

3.1　微分中值定理基本理论概述………………………………………………… 67

3.2　中值等式与不等式的证明…………………………………………………… 69

3.3　函数等式与不等式的证明…………………………………………………… 77

3.4　泰勒公式的应用……………………………………………………………… 80

3.5　微分中值定理相关问题中常用的“凑导”技巧……………………………… 85

第 4 章　导数的应用 ……………………………………………………………… 88

4.1　导数应用基本理论概述……………………………………………………… 88

4.2　利用洛必达法则求极限……………………………………………………… 90

4.3　函数单调性与凹凸性………………………………………………………… 93

4.4　函数极值和最值……………………………………………………………… 96

4.5　曲线渐近线 ………………………………………………………………… 100

4.6 函数作图方法及其应用 …… 103

第5章 不定积分 …… 106
5.1 不定积分基本理论概述 …… 106
5.2 与原函数有关的几类问题的求解方法 …… 107
5.3 凑微分法及其应用 …… 112
5.4 第二类换元法及其应用 …… 116
5.5 分部积分法及其应用 …… 119
5.6 有理函数、三角函数有理式、简单无理函数不定积分的求解 …… 124

第6章 定积分 …… 133
6.1 定积分基本理论概述 …… 133
6.2 定积分的若干计算 …… 138
6.3 变限积分的相关问题 …… 145
6.4 定积分不等式的证明 …… 149
6.5 定积分应用中相关问题的求解 …… 153

第7章 多元函数与重积分 …… 163
7.1 多元函数微积分基本理论概述 …… 163
7.2 偏导数与全微分 …… 169
7.3 二重积分与三重积分 …… 177
7.4 曲线积分与曲面积分 …… 193
7.5 重积分应用举例 …… 213

第8章 级数 …… 219
8.1 级数基本理论概述 …… 219
8.2 级数收敛性的判定 …… 224
8.3 幂级数的和函数与收敛域的求解 …… 234
8.4 函数展开成幂级数的方法 …… 241

参考文献 …… 245

第 1 章　函数与极限

函数是高等数学研究的基本对象,可以说,高等数学的理论就是针对函数展开的.而极限理论和方法是高等数学理论的基础和基本工具.本章将就函数的一些基本概念和极限的基础理论及方法展开研究讨论,并深入探讨一些典型例题的解题方法.

1.1　函数与极限基本理论概述

现实世界中的一切事物都在一定的时空之中运动变化,并且这种运动变化并不是放任自由的,而是在相互联系、彼此制约的关系中进行,这种关系通常具体反映为一定的数量关系.更直接地说,在同一自然现象中,往往同时存在几个变化着的量——我们称其为变量,这几个量并不是孤立地在变,而是相互联系并遵循一定的变化规律.函数就是用来描述自然现象中的各变量相互联系变化的一种数学概念.

1.1.1　集合与映射

集合与映射是函数概念的两大支撑,在给出函数的基本概念之前,有必要先对这两大基本概念进行简要说明.

集合是现代数学的基本语言,广义上讲,任意一些指定事物组成的整体就称为集合,而集合中的每一个事物称为这个集合的元素.通常情况下,人们总是将某种属性相同的事物放在一起组成一个集合.

一个普通的集合通常用一个大写字母表示,集合中的元素一般用小写字母表示.如果 a 是集合 A 中的元素,则表示为 $a\in A$,读作"a 属于 A";如果 a 不是集合 A 中的元素,则表示为 $a\notin A$,读作"a 不属于 A".当一个集合不包含任何元素的时候,则称其为空集,记作 $\varnothing$.集合的元素必须具有确定性、互异性、无序性三个特征,其中,确定性是指构成集合的元素具有明确的特征,对于某一元素 a,其要么在集合 A 中,要么不在集合 A 中,二者必居其

一，能够明确地区分，不能模棱两可；互异性是指同一元素在集合中不能重复；无序性是指集合的构成与元素的顺序无关.

集合的基本表示方法有枚举法和描述法两种. 枚举法是将集合中的元素一一列举出来，例如集合 A 由元素 $-1,0,1.2,5,9,13$ 组成，则表示为 $A=\{-1,0,1.2,5,9,13\}$. 描述法又称属性法，如果集合 A 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成，则可以利用描述法将集合 A 表示为 $A=\{x \mid x$ 具有某种性质 $P\}$.

事物是相互联系的，集合与集合之间也存在着一些重要的关系. 设 A 与 B 是两个集合，如果集合 A 的元素全部是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A \subset B$，读作"A 包含于 B"；如果集合 A 的元素全部是集合 B 的元素，且 B 中的元素不全属于 A，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A \subseteq B$，读作"A 真包含于 B"；如果集合 A 的元素全部是集合 B 的元素，且 B 中的元素也全属于 A，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$，读作"A 等于 B". $\varnothing$ 具有特殊性，它不包含任何元素，人们规定空集是任何集合的子集.

完全由数组成的集合称为数集. 在高等数学中，为了研究问题的方便，人们定义了很多特殊的数集，例如，全体实数组成的集合称为实数集 $\mathbf{R}$，全体复数组成的集合称为复数集 $\mathbf{C}$，全体有理数组成的集合称为有理数集 $\mathbf{Q}$，全体自然数组成的集合称为自然数集 $\mathbf{N}$，全体整数组成的集合称为整数集 $\mathbf{Z}$. 显然，自然数集 $\mathbf{N}$、整数集 $\mathbf{Z}$、有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$ 之间存在关系 $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$. 与此同时，人们还常在表示数集的字母的右上角加"+"或"−"来表示该数集的特殊子集，例如，$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$，而 $\mathbf{N}^{+}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

集合还可以进行一定的运算，最基本的运算是交、并、差. 设 A 与 B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的并集，记作 $A \cup B$，读作"A 与 B 的并集"，用描述法可以表示为 $A \cup B=\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$；由所有属于 A 且属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的交集，记作 $A \cap B$，读作"A 与 B 的交集"，用描述法可以表示为 $A \cap B=\{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$；由所有属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集，记作 $A \backslash B$，读作"A 与 B 的差集"，用描述法可以表示为 $A \backslash B=\{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$. 如果在研究某个问题时，限定在一个大的集合 I 中进行，所研究的其他集合 A 都是 I 的子集，此时，我们称集合 I 为全集或基本集. 称 $I \backslash A$ 为 A 的余集或补集，记作 A^{C}.

在集合的基础上，即可以给出映射的定义. 设 A 与 B 是两个非空集合（数集），如果存在一个法则 f，使得对 A 中每个元素 x，按法则 f，在 B 中均有唯一确定的元素 y 与之对应，那么称 f 为从集合 A 到集合 B 的映射，记为

$$f: A \to B, \tag{1-1-1}$$

其中，元素 y 称为元素 x（在映射(1-1-1)下）的像，并记作 $f(x)$，即有 $y = f(x)$；元素 x 称为元素 y（在映射(1-1-1)下）的一个原像；集合 A 称为该映射(1-1-1)的定义域，用 D_f 表示，即 $D_f = A$；集合 A 中所有元素的像所组成的集合称为映射(1-1-1)的值域，用 R_f 表示，即 $R_f = \{f(x) \mid x \in A\}$，在很多文献资料中，值域 R_f 也常被表示为 $f(A)$，显然，$R_f = f(A) \subset B$.

映射有单射、双射、满射等相关概念. 对于映射(1-1-1)，如果其值域 $R_f = B$，即集合 B 中任一元素 y 都是集合 A 中某元素（在映射(1-1-1)下）的像，则称映射(1-1-1)为集合 A 到 B 上的满射；如果对集合 A 中任意两个不同元素 x_1, x_2（其中 $x_1 \neq x_2$），它们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则称(1-1-1)为集合 A 到 B 的单射；如果映射(1-1-1)既是单射，又是满射，则称映射(1-1-1)为一一映射，也称双射.

在映射基本概念的基础上，又可以延伸出逆映射和复合映射的概念. 设映射(1-1-1)是集合 A 到 B 的单射，根据单射的定义可知，对于每个 $y \in R_f$，有唯一的 $x \in A$ 满足 $f(x) = y$，于是可以定义一个从 R_f 到 A 的新映射

$$g: R_f \to A. \tag{1-1-2}$$

对于每个 $y \in R_f$，规定 $g(y) = x$，则 x 满足 $f(x) = y$. 映射(1-1-2)称为映射(1-1-1)的逆映射，记作 f^{-1}，其定义域 $D_{f^{-1}} = R_f$，值域 $R_{f^{-1}} = A$. 设有两个映射

$$h: M \to N_1, \tag{1-1-3}$$

$$q: N_2 \to K, \tag{1-1-4}$$

其中，$N_1 \subset N_2$. 则由映射(1-1-3)和(1-1-4)可以定义出一个从集合 M 到 K 的对应法则，它将每个 $x \in M$ 映射成 $q[h(x)] \in K$. 显然，这个对应法则确定了一个从集合 M 到 K 的映射，这个映射称为映射(1-1-3)和(1-1-4)构成的复合映射，记作 $q \circ h$，即

$$q \circ h: M \to K, (q \circ h)(x) = q[h(x)], x \in M. \tag{1-1-5}$$

根据复合映射的定义可以看到，映射(1-1-3)和(1-1-4)构成复合映射的条件是：映射(1-1-3)的值域 R_h 必须包含在映射(1-1-4)的定义域内，即 $R_h \subset D_q$. 否则，不能构成复合映射. 由此可以进一步得知，映射(1-1-3)和映射(1-1-4)的复合是有顺序的，映射 $q \circ h$ 有意义并不表示 $h \circ q$ 也有意义. 即使 $q \circ h$ 与 $h \circ q$ 都有意义，复合映射 $q \circ h$ 与 $h \circ q$ 也未必相同.

在高等数学中，映射又称为算子. 根据集合 A 与 B 的不同情形，在不同的数学分支中，映射又有不同的惯用名称. 例如，从非空集 A 到数集 B 的映射又称为 A 上的泛函，从非空集 A 到它自身的映射又称为 A 上的变换，从实数集（或其子集）A 到实数集 B 的映射通常称为定义在集合 A 上的函数.

1.1.2　函数的定义

在集合与映射的基础上，即可给出函数的准确定义.

定义 1.1.1　设数集 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集，即 $D \subset \mathbf{R}$，则称映射

$$f: D \to \mathbf{R} \tag{1-1-6}$$

为定义在数域 D 上的函数，记作 $y = f(x)(x \in D)$. 其中，x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域(与映射的定义相呼应，定义域 D 有时也用 D_f 来表示). 对于定义域 D 内的每一个元素 x，在 $\mathbf{R}$ 上均有唯一确定的值与之对应，该值称为函数在 x 处的函数值，一般用 $f(x)$ 表示. 全体函数值 $f(x)$ 构成的数集称为函数的值域，记作 $f(D)$ 或 R_f.

根据函数的定义可知，函数包括三大要素，分别是定义域、值域和对应法则. 对应法则给出了因变量与自变量之间的依赖关系，我们通常把这种关系称为函数关系. 函数是从实数域的子集到实数域上的映射，其值域总是被实数域 $\mathbf{R}$ 所包含，而值域的元素组成则完全由定义域与对应法则所决定. 故而，定义域与对应法则是函数的决定性要素. 定义域是函数自变量的取值范围，定义域不同，即使对应法则相同，函数的值域也可能不同. 关于定义域的确定，人们一般采用两种方法，一种是根据函数的具体应用背景来确定，即定义域的选取要使得函数具有实际意义；另一种则是根据函数的解析表达式来确定，即将函数用一个代数表达式表示出来，定义域的选取要确保代数表达式有意义. 在高等数学中，人们把按第二种方法确定的定义域称为自然定义域.

函数的表示方法一般有四种，分别是表格法、图形法、解析法和文字表述法. 表格法就是通过合适的表格将自变量与因变量对应地罗列出来；图形法是通过描绘在坐标系内的几何图形直观地反映函数关系；解析法是用数学运算式子来表示自变量与因变量之间的数量关系；而文字表述法则是应用简明、精练的语言来描述函数. 这些方法在初等数学中已经详细讨论过，这里不再赘述.

需要强调的是，严格意义上说，$f(x)$ 表示的是自变量 $x \in D$ 对应的函数值，但是，人们总是习惯于用“$f(x), x \in D$”或“$y = f(x), x \in D$”，表示定义在数集 D 上的函数. 甚至有时候会直接用因变量的记号来表示函数，即把函数直接记为 $y = y(x)$.

1.1.3　函数的性质与运算

函数反映了自变量与因变量之间的关系，这种变量关系具有一些基本

的特性，把握这些特性，有助于掌握了解函数的性态. 函数的特性可以总结为有界性、单调性、奇偶性和周期性，详述如下.

(1) 有界性. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在实数 $M>0$，使得对于定义域 D 内任意一点 x，有 $|f(x)|<M$，则称函数 $y=f(x)$ 在定义域 D 内有界，M 就是函数 $y=f(x)$ 的一个界；否则称函数 $y=f(x)$ 在定义域 D 内无界. 进一步，如果存在实数 M_1，使得对于定义域 D 内任意一点 x，有 $f(x)\leqslant M_1$，则函数 $y=f(x)$ 在定义域 D 内有上界，M_1 就是函数 $y=f(x)$ 的一个上界；如果存在实数 M_2，使得对于定义域 D 内任意一点 x，有 $f(x)\geqslant M_2$，则函数 $y=f(x)$ 在定义域 D 内有下界，M_2 就是函数 $y=f(x)$ 的一个下界. 显然，函数 $y=f(x)$ 的上、下界和界，就是其值域的上、下界和界.

(2) 单调性. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，x_1，x_2 是定义域 D 内的区间 I 上任意两点. 如果当 $x_1<x_2$ 时必有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调增加；如果当 $x_1<x_2$ 时必有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单调减少. 一般情况下，我们将在某一区间上单调递增（减）的函数称为该区间上的单调增（减）函数.

(3) 奇偶性. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D，且定义域 D 关于原点对称. 如果对于任意的 $x\in D$，有 $f(x)=f(-x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为偶函数；如果对于任意的 $x\in D$，有 $f(x)=-f(-x)$，则称函数 $y=f(x)$ 为奇函数. 从几何图像上看，偶函数的图形关于 y 轴对称，如图 1-1 所示；而奇函数的图形关于原点中心对称，如图 1-2 所示.

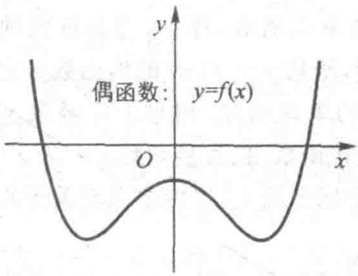

图 1-1

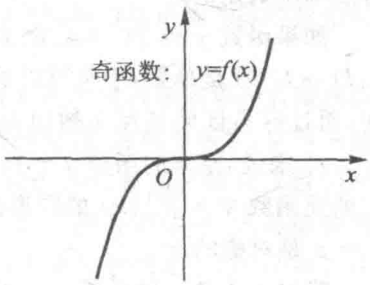

图 1-2

(4) 周期性. 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个非零常数 T，使得对定义域 D 内的任意 x，有 $x+T\in D$，而且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数，T 称为函数 $y=f(x)$ 的一个周期. 显然，函数 $y=f(x)$ 的周期 T 的整数倍仍然是其周期. 一般情况下，函数的周期是指其最小正周期.

除了上述重要性质以外，函数也可以进行四则运算. 这一点很容易理解，因为函数的表达式其实就是代数式，只要相关变量满足一定的要求，函数就可以进行四则运算. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别是定义在 D_f 与 D_g 上的函数，且 $D_f \cap D_g \neq \varnothing$，令 $D = D_f \cap D_g$. 则函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的加法可以定义为 $(f+g)(x) = f(x) + g(x), x \in D$；减法可以定义为 $(f-g)(x) = f(x) - g(x), x \in D$；乘法可以定义为 $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in D$；除法可以定义为 $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in D \setminus \{x \mid g(x) = 0, x \in D\}$.

1.1.4 反函数与复合函数

通过前面的讨论可以看到，函数是由普通映射转化而来的. 映射还有逆映射和复合映射，那么是否也可以定义反函数和复合函数呢？答案是肯定的.

定义 1.1.2 设函数

$$f: D \to f(D) \tag{1-1-7}$$

是单射. 根据前文关于单射的讨论可知，函数(1-1-7) 必然存在逆映射 $f^{-1}: f(D) \to D$，我们称映射 f^{-1} 为函数(1-1-7) 的反函数. 通常人们将函数 $y = f(x)(x \in D)$ 的反函数记作 $y = f^{-1}(x)(x \in f(D))$.

根据定义 1.1.2，对每个 $y \in f(D)$，有唯一的 $x \in D$，使得 $f(x) = y$，于是有 $f^{-1}(y) = x$. 这就是说，反函数 f^{-1} 的对应法则是完全由函数 f 的对应法则所确定的.

如果函数 $y = f(x)$ 是定义在 D 上的单调函数，那么，容易证明映射 $f: D \to f(D)$ 是单射，于是可以进一步证明，函数 $y = f(x)$ 的反函数必定存在，而且容易证明其反函数也是 $f(D)$ 上的单调函数. 相对于反函数 $y = f^{-1}(x)$ 来说，原来的函数 $y = f(x)$ 称为直接函数. 把直接函数 $y = f(x)$ 和它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标平面上，这两个图形关于直线 $y = x$ 是对称的.

定义 1.1.3 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u = g(x)$ 的定义域为 D_g，且函数 $u = g(x)$ 的值域 $R_g \subset D_f$，那么由式

$$y = f[g(x)], x \in D_g \tag{1-1-8}$$

确定的函数称为由函数 $y = f(u)$ 与函数 $u = g(x)$“先 g 后 f”的次序复合而构成的复合函数，记为 $f \circ g$，它的定义域为 D_g，变量 u 称为中间变量.

与复合映射一样，$u = g(x)$ 与 $y = f(u)$ 能构成复合函数 $f \circ g$ 的条件是：函数 $u = g(x)$ 的值域 R_g 必须包含于函数 $y = f(u)$ 的定义域 D_f；否则，

不能构成复合函数. 有时,也会遇到两个以上函数所构成的复合函数,只要它们顺次满足构成复合函数的条件.

1.1.5　初等函数

在高等数学中,人们将如下六类经常用到的函数统称为基本初等函数.

(1) 常数函数:$y = C, C \in \mathbf{R}$,且是一个固定的常数.

(2) 幂函数:$y = x^a, a \in \mathbf{R}$,且是一个固定的常数.

(3) 指数函数:$y = a^x, a \in \mathbf{R}$,而且是一个大于 0 且不等于 1 的固定常数.

(4) 对数函数:$y = \log_a x, a \in \mathbf{R}$,而且是一个大于 0 且不等于 1 的固定常数. 当 $a = \mathrm{e}$[①] 时,对数函数简写为 $y = \ln x$,称为自然对数.

(5) 三角函数:$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$ 等. 其中,$y = \sin x, y = \cos x$ 分别称为正弦函数和余弦函数,定义域为 $\mathbf{R}$;$y = \tan x$ 称为正切函数,定义域为 $\left\{x \middle| x \in \mathbf{R}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$;$y = \cot x$ 称为余切函数,定义域为 $\{x | x \in \mathbf{R}, x \neq k\pi\}$;$y = \sec x$ 称为正割函数,定义域为 $\left\{x \middle| x \in \mathbf{R}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$;$y = \csc x$ 称为余割函数,定义域为 $\{x | x \in \mathbf{R}, x \neq k\pi\}$.

(6) 反三角函数:$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ 等. 其中,$y = \arcsin x, y = \arccos x$ 分别称为反正弦函数和反余弦函数,定义域为 $[-1, 1]$;$y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ 分别称为反正切函数和反余切函数,定义域为 $\mathbf{R}$.

由常数和上述六种基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合运算所构成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数. 初等函数的定义域一般取自然定义域,即使得初等函数表达式有意义的自变量的所有取值的数集. 初等函数包括的内容极其广泛,在高等数学中,凡是能够用一个解析式子表示的函数,都是初等函数. 但必须注意的是,分段函数往往不是初等函数,因为有的分段函数不能用一个数学式子来表示,但也不能说分段函数都不是初等函数.

在自然科学研究与工程技术应用中,经常会用到以 e 为底的指数函数

---

① e 称为自然常数,它是一个无理数,由极限 $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 或 $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 求得,其值约为 2.718281828459045….

$y=e^x$ 和 $y=e^{-x}$ 产生的双曲函数以及它们的反函数——反双曲函数. 双曲函数与反双曲函数均是初等函数，双曲函数的具体定义如下.

(1) 双曲正弦函数：$\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

(2) 双曲余弦函数：$\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$.

(3) 双曲正切函数：$\tanh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

(4) 双曲余切函数：$\coth x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$.

其中，双曲正弦、双曲余弦、双曲正切函数的反函数分别为 $y=\operatorname{arsh} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$，$y=\operatorname{arch} x=\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$，$y=\operatorname{arth} x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

1.2 数列极限

极限是人们为了精确描述变量在某个变化过程中的变化趋势而引入的. 它的成功引入，为微积分的诞生奠定了基础，为数学研究开辟了一个全新的空间. 故而，极限可以视作是高等数学的根基，而极限方法则是高等数学最常用、最基本的方法. 这里，我们就以数列的极限为切入口，展开对极限及其解题方法的讨论.

1.2.1 数列及其极限

1. 数列及其子列

所谓数列，即按顺序排列的一列数. 从映射的观点出发，数列可以准确定义为从正整数集到实数集上的映射，即

$$f:\mathbf{N}^+\to\mathbf{R},\tag{1-2-1}$$

简记为 x_n，即 $x_n=f(n)\,(n\in\mathbf{N}^+)$. 在具体应用中，数列也常常被写成 x_1，x_2，…，x_n，…，记作 $\{x_n\}$. 其中，数 x_n 称为数列的第 n 项，而 x_n 的表达式 $f(n)\,(n\in\mathbf{N}^+)$ 则称为数列的通项（一般项）. 通过这一定义可以看出，数列其实就是一种特殊的函数.

数列 $\{x_n\}$ 包含无穷多个项，从中任意抽取无穷多个，依照原下标次序 $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$ 重新排列而组成新的数列 x_{n_1}，x_{n_2}，…，x_{n_k}，…，我们

称其为数列$\{x_n\}$的一个子列，记为$\{x_{n_k}\}$. 对于数列的子列$\{x_{n_k}\}$，显然，x_{n_k}是新数列的第k项，而且有$n_k \geqslant k$恒成立.

2. 数列的极限

在了解了数列及其子列的定义之后，人们一般最关心的问题是数列中的各项的变化趋势，这就需要引入数列极限的概念. 在高等数学中，通常采用“ε-N定义法”来给出数列极限的定义.

定义 1.2.1 设有一数列$\{x_n\}$，如果存在一个常数A，对于任意给定的正数ε，总存在正整数N，当$n > N$时，恒有不等式$|x_n - A| < \varepsilon$成立，则称A为数列$\{x_n\}$的极限，或称数列$\{x_n\}$收敛于A，记作$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$或$a_n \to A(n \to \infty)$. 否则，称数列$\{x_n\}$不存在极限，或者数列$\{x_n\}$发散.

为了表述方便，定义1.2.1可以用逻辑符号表示为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}^+, \forall n > N \to |x_n - A| < \varepsilon.$$

这些符号对于学习和研究高等数学的人员来说再熟悉不过，这里不再赘述其具体含义.

3. 数列极限的性质

数列$\{x_n\}$的极限是A，意思就是数列通项x_n有无限接近常数A的趋势. 具有极限的数列，即收敛数列，一般具有如下四条重要性质.

(1) 唯一性. 如果数列$\{x_n\}$收敛，那么它的极限唯一.

(2) 有界性. 如果数列$\{x_n\}$收敛，那么数列$\{x_n\}$一定有界.

(3) 保号性. 如果数列$\{x_n\}$的极限为A，且$A > 0$(或$A < 0$)，那么存在正整数$N > 0$，当$n > N$时，$x_n > 0(x_n < 0)$恒成立. 根据收敛数列的保号性可进一步推得，如果数列$\{x_n\}$从某项起有$x_n \geqslant 0(x_n \leqslant 0)$恒成立，且其极限为$A$，那么必然有$A \geqslant 0$(或$A \leqslant 0$).

(4) 子列收敛性. 如果数列$\{x_n\}$收敛于A，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是A. 根据数列极限的子列收敛性可进一步推得，如果数列$\{x_n\}$有两个子数列收敛于不同的极限，那么该数列必然是发散的.

4. 数列极限的四则运算

数列极限可以进行四则运算，具体的运算法则如下.

(1) 数列极限的加减法. 如果数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$的极限都存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，则它们的和(差)数列$\{x_n \pm y_n\}$的极限也存在，而且有$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B$.

(2) 数列极限的乘法. 如果数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 的极限都存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，则数列 $\{x_n y_n\}$ 的极限也存在，而且有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = AB$. 根据数列极限的乘法法则可以进一步推得，如果数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$m$ 为正整数，则数列 $\{x_n^m\}$ 的极限也存在，其值为 A^m.

(3) 数列极限的除法. 如果数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 的极限都存在（数列 $\{y_n\}$ 不含有等于 0 的项），且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B \neq 0$，则数列 $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ 的极限也存在，而且有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right) = \dfrac{A}{B}$.

5. 无穷小与无穷大

定义 1.2.2 对于数列 $\{x_n\}$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，则称该数列为无穷小数列；如果 $\forall M > 0$，$\exists N \in \mathbf{N}^+$，使得当 $n > N$ 时，$|x_n| > M$，则称数列 $\{x_n\}$ 为无穷大数列，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$. 如果 $\forall M > 0$，$\exists N \in \mathbf{N}^+$，使得当 $n > N$ 时，$x_n > M$（或 $x_n < -M$），则称数列 $\{x_n\}$ 为正无穷大数列（或负无穷大数列），记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$（或 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$）.

根据无穷小数列与无穷大数列的定义，我们可以总结出如下结论.

(1) 数列 $\{x_n\}$ 的极限为 A，等价于数列 $\{x_n - A\}$ 为无穷小数列，同时还等价于数列 $\{|x_n - A|\}$ 是无穷小数列.

(2) 无穷小数列与有界数列对应相乘所得的数列仍是无穷小数列. 也就是说，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$，数列 $\{y_n\}$ 有界，那么，数列 $\{x_n y_n\}$ 必有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

(3) 无穷多个无穷小之和未必是无穷小.

(4) 无穷大数列不存在极限，只是人们为了表述方便，当数列 $\{x_n\}$ 为无穷大数列时，称其极限为无穷大.

(5) 无穷小和无穷大、无穷大与无界之间是有一定的关系的. 如果 $x_n \neq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0$；如果数列 $\{x_n\}$ 是无穷大数列，那么其必然无界，但是，无界数列却未必是无穷大数列.

(6) 数列 $\{x_n\}$ 无界的充分必要条件是其存在无穷大子列.

6. 典型例题和解题方法

这部分内容所涉及的问题一般是利用数列极限的定义、性质、四则运算法则以及无穷小与无穷大的相关性质，来求解数列极限或证明数列极限是某值.

例 1.2.1　试判断下列哪种说法与数列极限的定义等价，并简要阐述理由.

(1) $\forall \varepsilon \in (0,1)$，$\exists N \in \mathbf{N}^+$，当 $n \geqslant N$ 时，有 $|x_n - A| < 100\varepsilon$.

(2) $\forall \varepsilon > 1$，$\exists N \in \mathbf{N}^+$，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - A| < \varepsilon$.

(3) $\forall N \in \mathbf{N}^+$，$\exists \varepsilon > 0$，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - A| < \varepsilon$.

(4) $\exists N \in \mathbf{N}^+$，$\forall \varepsilon > 0$，当 $n > N$ 时，有 $|x_n - A| < \varepsilon$.

解：根据定义 1.2.1 有，对数列 $\{x_n\}$，存在常数 A，使对任意给定的正数 ε(不论它多么小)，$\exists N \in \mathbf{N}^+$，使当 $n > N$ 时，不等式 $|x_n - A| < \varepsilon$ 恒成立. 将定义 1.2.1 分别与上述四条命题相比较可得如下结论.

(1) 由于定义 1.2.1 中自然数 N 不唯一，所以 $\forall n > N$ 与 $n \geqslant N$ 是等价的，又因 $\varepsilon > 0$ 具有任意性，故 ε 与 100ε 等价的. 进而可知，"$\forall \varepsilon \in (0,1)$，$\exists N \in \mathbf{N}^+$，当 $n \geqslant N$ 时，有 $|x_n - A| < 100\varepsilon$" 与定义 1.2.1 是等价的.

(2) 由定义 1.2.1 可知，ε 具有任意性，$\varepsilon > 1$ 不能保证 ε 为任意小，因而由 $|x_n - A| < \varepsilon$ 不能保证 x_n 与 A 无限接近. 故而，命题(2) 仅为定义 1.2.1 的必要条件，但不是充分条件，它与数列极限的定义 1.2.1 不等价.

(3) 由于 $\exists \varepsilon > 0$，而不是 $\forall \varepsilon > 0$，这时不能由 $|x_n - A| < \varepsilon$ 保证 x_n 与 A 任意接近，所以，命题(3) 仅是定义的 1.2.1 的必要条件，它与数列极限的定义 1.2.1 不等价.

(4) 由于定义 1.2.1 中的 N 不唯一，如果存在 $N \in \mathbf{N}^+$，使 $\forall \varepsilon > 0$，当 $n > N$ 时有 $|x_n - A| < \varepsilon$，这说明数列 $\{x_n\}$ 有极限 A. 说明命题(4) 是定义 1.2.1 的充分条件. 反之，如果 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$，不一定能找到那样的 N(它可能与 ε 无关，这一要求比 N 与 ε 有关的要求更高)，使 $\forall \varepsilon > 0$，当 $n > N$ 时，都有 $|x_n - A| < \varepsilon$. 因为在定义 1.2.1 中 N 是依赖于 ε 的给定而确定的，因而命题(4) 不是定义 1.2.1 的必要条件. 故而，它与数列极限的定义 1.2.1 不等价.

注意：在任何一个概念的定义中，其条件是该概念成立的充要条件，在极限的定义中同样如此，这一点非常重要，尤其是在利用定义解决相关问题时，必须予以充分考虑. 另外，在数列极限的"ε-N"定义中，深刻理解 ε 与 N 的本质含义，对于整体把握数列极限的定义十分关键，只有正数 ε 可以任意给定，才能保证 x_n 与 A 无限接近，而定义中的 N 则是随着 ε 的选定而选定的.

例 1.2.2　根据数列极限定义证明 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n+1}{2n+1} = \dfrac{3}{2}$.

证明：本题分两种方法来进行证明.