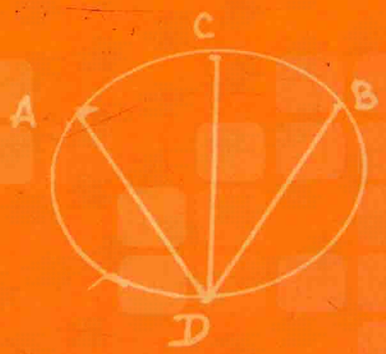
中央民族大学离退休教师学术著作出版资助项目
——“金秋”学术文库系列丛书

薛振邦　编著

Jingji Xiaoyizhong De
Shuxue Fangfa

经济效益中的数学方法



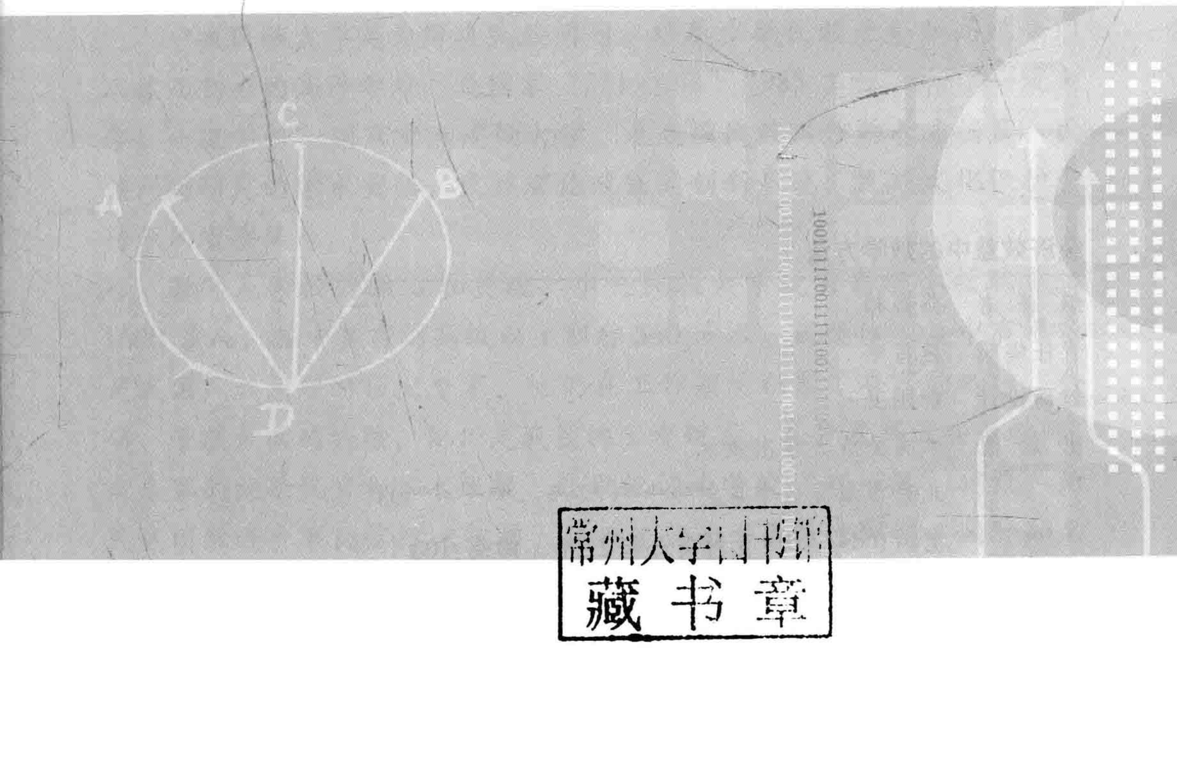
中央民族大学出版社
China Minzu University Press

中央民族大学“一流大学和一流学科”建设项目资助出版

薛振邦　编著

Jingji Xiaoyizhong De
Shuxue Fangfa

经济效益中的数学方法



中央民族大学出版社
China Minzu University Press

图书在版编目(CIP)数据

经济效益中的数学方法/薛振邦编著. —北京:中央民族大学出版社,2017.12

ISBN 978-7-5660-1435-1

Ⅰ.①经… Ⅱ.①薛… Ⅲ.①经济数学—数学方法
Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第243503号

经济效益中的数学方法

编 著 者 薛振邦
责任编辑 杜星宇
封面设计 舒刚卫
出 版 者 中央民族大学出版社
北京市海淀区中关村南大街27号 邮编:100081
电话:68472815(发行部) 传真:68933757(发行部)
68932218(总编室) 68932447(办公室)
发 行 者 全国各地新华书店
印 刷 厂 北京盛华达印刷有限公司
开 本 787×1092(毫米) 1/16 印张:19.5
字 数 320千字
版 次 2017年12月第1版 2017年12月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5660-1435-1
定 价 68.00元

总　序

中央民族大学是为解决民族问题、培养少数民族干部和高级专门人才而创办的高等学府。是国家“211 工程”“985 工程”和“一流大学、一流学科”国家重点建设大学。是我国民族工作的人才摇篮，民族问题研究的学术重镇，民族理论政策的创新基地，民族文化保护和传承的重要阵地。

教师是学校的核心和灵魂。中央民族大学现有离退休教职员工1600 多人，其中具有副高级以上职称 540 多人。离退休人员中有很多是我国民族问题的顶尖专家，他们在工作期间积累了丰富的教学、科研、管理方面的经验，他们是我校的宝贵财富。充分发挥这些老教师、老专家的经验优势和学术优势，鼓励他们为学校“双一流”建设、为民族团结进步事业贡献经验和智慧，是学校建设特色鲜明、国际知名的高水平研究型大学的重要举措。

为了贯彻落实中共中央《关于进一步加强和改进离退休干部工作的意见》（中办发〔2016〕3 号）文件精神，我校制定出台了《中央民族大学离退休教师学术著作出版资助办法》，明确从“双一流”学科建设专项经费中拨出专款，资助我校离退休教师出版学术著作，并建立了资格认定、学科专家组评审及学校评审委员会终审的申报评审机制，确保学术质量。

这些学术著作都是自成体系的，只有汇编为丛书，才能相得益彰，蔚为大观，既便于研读查考，又利于文化积累，《中央民族大学金秋学

术文库系列丛书》这套主要收录中央民族大学离退休教师独立撰写或主编的学术著作的开放式丛书也就应运而生了。

“莫道桑榆晚，为霞尚满天”。希望通过实施这一学术著作资助出版项目，汇集民族高等教育的优秀经验成果，加强民族精神文化传承，鼓励离退休教师坚持学术研究，提高我校的知名度和凝聚力，激励后人，为学校建设乃至民族事业发展贡献新的力量。

薪火相继，学林重光。愿这套丛书伴随中央民族大学发展的脚步，不断迈向新的高度！

中央民族大学离退休教师学术著作出版
编审委员会
2017 年 9 月 11 日

前　　言

20 世纪 80 年代出版的《现代西方经济学概论》上篇是由经济学家厉以宁撰写的，就西方现代宏观经济和微观经济基本理论做了系统的全面介绍和评论。数学家秦宛顺写了下篇，对上篇经济命题做了数学推导。这是一部经济数学大纲，同时开启了经济数学这个热门话题。数学的特征：第一是它的抽象性，第二是它的精确性或者更确切地说是逻辑的严格性，最后是它应用的广泛性。如何将数学广泛地应用到经济领域，并产生显著的经济效益是人们十分关切的问题。

企业家、经营管理者决策时，都希望得到产品的最大利润或最小消耗，以获得最好的经济效益。若将经济问题抽象转化为数学问题，那么高等数学的宝库中各门学科都有求解最优值和最佳方案的方法。考虑到读者的数学修养，本书用通俗浅显的语言通过近百个实例讲述了这些方法。第一章帮助读者复习高等数学基础理论（微积分、线性代数、概率论与数理统计）中的主要内容并带上了经济色彩。第二章是俗称“平凡劳动中的数学”的线性规划，其中绝大多数的例子是出于生产管理第一线的干部、技术员之手。其余各章是运筹学和概率论，理论性较强，有的或属于前沿学科的内容在经济中的应用。

本书对如何将经济问题抽象转化为数学问题和经济决策问题做了简明的阐述，它是企业经营管理者创新和提高经济效益的必备参考书。本书可作为高职高专院校经济管理类专业教材或教学参考书。

目　录

第一章　预备知识

为便于读者阅读和理解，本章讲述高等数学中的基础理论：微积分、线性代数、概率论与数理统计中与经济有关的主要内容。

§1　几种重要的经济函数

1. 函数

在自然现象或经济活动中有两个变量 x，y，若 x 在其变化区域 D 内任意取定一个值，y 都有唯一确定的值与之相对应，就称 y 是 x 的函数，x 叫作自变量，函数 y 又叫作因变量，记为 $y=f(x)$。x 的变化区域 D 称为函数 $f(x)$ 的定义域，$f(x)$ 也表示与 x 值相应的函数值，全体函数值称 $y=f(x)$ 的值域记作 R。符号"f"表示 y 与 x 相对应的规律（或称对应法则），即对于任意取定的 x（简记为 $x\in D$）是按照何种规律得到 y 的值（一般用运算法则给出）。

求某函数的定义域在中学数学中，读者已受过很好的训练，这里不再讲述。

求某函数的函数值，记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$，它表示对应于 $x=x_0$ 时的函数值 y_0。

例如，设 $y=f(x)=\sqrt{4-x^2}$，求在 $x=-1$ 处的函数值：$y(-1)=f(-1)=\sqrt{4-(-1)^2}=\sqrt{3}$。

为了直观地表示一个函数 $f(x)$ 的自变量 x 与因变量 y 间对应取值的关系，用

数对（x，y）与笛卡尔平面直角坐标系下的点 P 间的一一对应，即用点 P 的集合（或点 P 形成的轨迹）来表示函数 $f(x)$，并称它为函数 $f(x)$ 的图像。下面列出读者熟知的五种基本初等函数：

（1）幂函数　$y=x^\alpha$，α 为任何实数

（2）指数函数，$y=a^x$，（$a>0$，$a\neq1$）

（3）对数函数　$y=\log_a x$，（$a>0$，$a\neq1$）

特别地，当 $a=\mathrm{e}$（e 是无理数，$\mathrm{e}=2.71828\cdots$）时

$$y=\log_{\mathrm{e}} x=\ln x$$

（4）三角函数

$$y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\tan x,\ y=\cot x,\ y=\sec x,\ y=\csc x$$

（5）反三角函数　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\mathrm{arccot}\ x$，$y=\mathrm{arcsec}\ x$，$y=\mathrm{arccsc}\ x$

2. 经济中常用的函数

在市场经济中，表现最为活跃的几个因素——价格（P）、需求（Q）、供给（S）、成本（C）、收益（R）等，它们之间相互依存和影响，研究这些因素间的函数关系、相关关系（见第四章），对了解和掌握现代经济的特点和研究经营管理的经济效益是非常重要的。

（一）需求函数

需求是指消费者在一定价格条件下对商品的需要。需求有两个条件：第一，消费者愿意购买；第二，消费者有支付能力；仅有第一个条件，只能被看成欲望或需要，而不是需求。用 Q 表示消费者对商品的需求量，P 表示商品的价格，则 Q 是 P 的函数 $Q=Q(P)$，称它为需求函数，这里 P 是自变量，Q 是因变量。

一般地，消费者对某种商品的需求量随价格上涨而减少，因此需求函数是价格的减函数。如需求函数可能遇到以下几种例外的情况：某些商品的价格越下降，需求越小。例如：装饰品代表一定的社会地位与身份，如果价格下降，它们就不能再代表这种社会地位与身份，对它们的需求就会减少；某些商品的

价格越高，需求就越大。例如、名贵珍品，往往价格越高，越显示它们的珍贵性；少数人的逆反心理盲目地认为，“商品价格越高，越是好货”，本来价值几十元（或几百元）的商品卖不出去，换个高出原价几倍或十几倍的标签反而销售一空。

另外，还有一些商品，小幅度升降价需求按正常情况变动；大幅度升降价人们就会采取观望的态度，需求将出现不规则的变化。例如，证券、黄金市场上常有的情况。

在经营管理和经济学中常见的需求函数有：(1) 线性需求函数：$Q=a-bp$，其中 $b\geqslant 0$，$a\geqslant 0$，均为常数；

(2) 二次曲线需求函数：$Q=a-bp-cp^2$，其中 a、b、c 均为 $\geqslant 0$ 的常数；

(3) 指数需求函数 $Q=Ae^{-bp}$，其中 $A>0$，$b\geqslant 0$ 均为常数。

需求函数的反函数，就是价格函数，记作 $P=P(Q)$，

一般地，价格是需求量的增函数。

（二）供给函数

供给是指某一时间内，生产者在一定价格条件下，愿意并可能出售的产品，其中包括：新提供的物品和已有的库存的物品。

生产者提供一定量商品所愿意接受的价格，称供给价格，以 P 表示供给价格，S 表示供给量，则 S 是 P 的函数 $S=S(P)$ 称为供给函数。

一般地，商品的供给与价格成正比，即随着价格的上升，供给增加，也就是 $S=S(P)$ 是增函数。

需求价格是指消费者对一定量商品所愿意支付的价格，供给价格是指生产者为提供一定量商品愿意接受的价格，综合考虑供需两个方面共同接受的价格 P_0，谓之均衡价格。因此，均衡价格就是市场上需求量 Q_0 与供给量 S_0 相等时的价格 P_0。这时，需求量 Q_0 与供给量 S_0 都称为均衡商品量。

在均衡价格下，生产者愿意出卖产品，消费者愿意购买商品；当高于均衡价格时，生产者更愿意出卖产品，生产积极性高，市场上可能出现“供过于求”，商品滞销；当低于均衡价格时，生产者不大愿意出卖产品，市场上可能出现“供不应求”，商品短缺，形成抢购。总之，市场上的商品价格围绕均衡价格发生波

动，经营管理者应及时掌握这个重要的市场信息。

例 1 某商品的需求量和供给量与其价格 P 的关系分别为：

$$\begin{cases} Q^2 - 20Q - P = -99 \\ 2Q^2 + P = 123 \end{cases}$$

试求市场的均衡价格和数量。

解：求均衡价格和数量只需解方程组：

$$\begin{cases} Q^2 - 20Q - P = -99 \\ 2Q^2 + P = 123 \end{cases}$$

得到

$$\begin{cases} Q_1 = 6 \\ P_1 = 15 \end{cases}, \begin{cases} Q_2 = -1 \\ P_2 = 120 \end{cases} \text{（无意义）}$$

故所求均衡价格为 15 个单位，均衡数量为 6 个单位。

（三）成本函数

从事生产，就需要投入，也就是成本。在微观经济学中，成本是指生产活动中所使用的生产要素的价格，成本也叫生产费用。

生产要素是指生产某种商品时所投入的经济资源，它包括劳动、资本、土地、企业才能；总成本是生产某特定产量的商品所需要的成本总额，它包括两个部分：固定成本与可变成本。

固定成本是指在短时间不发生变化或变化很小的生产投入，如厂房、设备等。常用 C_1 记之；随产品生产而投入的原材料、人工等，称为可变成本，它以 C_2 记之，它随产品数量的变化而直接变化。因此，可变成本是产品数量 q 的函数，即 $C_2 = C_2(q)$

也就是，总成本 C 也是产品数量 q 的函数，即 $C = C(q) = C_1 + C_2(q)$

在企业中，常常用平均成本，即生产单位产品所需的成本来衡量该企业生产的好坏，用 $\overline{C}(q)$ 表示平均成本，则

$$\overline{C}(q) = C(q)/q = \frac{\text{固定成本} + \text{可变成本}}{\text{产量}}$$

例 2　生产某产品 q 件的总成本为 $C(q)=300+2.5q$，求生产 100 个该产品时的总成本和平均成本。

解：由题意，产量为 100 时的总成本为：

$$C(100)=(300+2.5q)\big|_{q=100}=300+2.5\times100=550$$

所求平均成本

$$\overline{C}(100)=\frac{C(q)}{q}\bigg|_{q=100}=\frac{C(100)}{100}=\frac{550}{100}=5.5$$

（四）收益函数和利润函数

总收益是生产者出售一定数量的产品所得的全部收入，常用 R 表示。相应地，也有平均收益的概念，用 $\overline{R}$ 表示。

总收益，平均收益都是出售产品数量 q 的函数。设 p 为产品的价格；则生产者出售产品数量 q 时的总收益为：$R=R(q)=P(q)\cdot q$

平均收益为：$\overline{R}=\dfrac{R(q)}{q}=P(q)$

其中 $P(q)$ 是商品 q 的价格函数（显然，这个 q 对生产者来说是销售量；对消费者来说是需求量。不论销售量或需求量，都是产品推向市场的结果，因此都称商品量）。可以看出商品价格函数，由产品的平均收益函数来确定。

例 3　设某商品的需求关系是

$$3q+4P=100$$

其中 q 是商品量，P 是该商品的价格，求销售 5 件时的总收益和平均收益。

解：由已知得商品价格为 $P=\dfrac{100-3q}{4}=25-\dfrac{3}{4}q$

所求总收益函数为 $R(q)=Pq=25q-\dfrac{3}{4}q^2$

因此，销售 5 件商品时的总收益和平均收益分别为

$$R(5)=\left(25q-\frac{3}{4}q^2\right)\bigg|_{q=5}=106.25$$

$$\overline{R}(5)=\frac{R(5)}{5}=21.25$$

下面介绍利润函数：

企业生产一定数量 q 的产品的总收益 $R(q)$ 与总成本 $C(q)$ 之差，就是它的总利润。记作 L，即 $L=L(q)=R(q)-C(q)$，它的平均利润，记作 $\overline{L}$；

$$\overline{L}=\overline{L}(q)=\frac{L(q)}{q}$$

总利润 L 和平均利润 $\overline{L}$ 都是产量 q 的函数。

例 4 在例 2 中，产品价格 p 为多少单位时，生产 100 个这种产品的总利润为 50？

解：设 $p=x$ 个单位，则生产 100 个这种产品的总收益

$R(100)=R(q)\big|_{q=100}=x\cdot q\big|_{q=100}=100x$

由例 2 的结果知道，生产 100 个这种产品的总成本 $C(100)=550$

所以，生产 100 个这种产品的总利润

$$\begin{aligned}L(100)&=L(q)\big|_{q=100}=[R(q)-C(q)]_{q=100}\\&=R(q)\big|_{q=100}-C(q)\big|_{q=100}=100x-550\end{aligned}$$

再由已知 $L(100)=50$，得

$$100x-550=50$$

求得 $x=6$ 个单位。也就是当产品价格定为 6 个单位时，生产 100 个这种产品的总利润为 50。

从例 2、例 4 的已知和计算结果看出：

（1）平均利润 $\overline{L}(100)=\dfrac{L(q)}{q}\bigg|_{q=100}=\dfrac{L(100)}{100}=\dfrac{50}{100}=0.5$

（2）平均成本$[\overline{C}(100)=5.5]$，平均利润 $\overline{L}(100)=0.5$ 和产品价格$(p=6)$之间的关系：

$$P(q)=\overline{C}(q)+\overline{L}(q),\text{或}\quad \overline{L}(q)=P(q)-\overline{C}(q)$$

即，平均利润等于产品价格与平均成本之差。

本节介绍了几个经济学中基本的、常用的也是重要的经济函数（需求、供给、成本、收益、利润函数），还有一些经济函数，例如库存函数等，待今后讲解导数在经济上的应用时，在举例中介绍。

§2　导数的应用

1. 函数的极限

极限方法是研究函数、引进导数、微分、积分乃至高等数学最主要的工具，它是迈进高等数学殿堂的门槛。

教学过程中，一般学生不易理解极限的概念。的确，极限是由初等数学过渡到高等数学的一个硬结，也是学生思维由不变到变、由有限到无限转化的一个关口。为了帮助学生顺利地渡过这个关口，先介绍一下我国古代数学家刘徽（263年，魏末晋初）朴素的极限思想，他为了计算圆的面积创造了割圆术，他从计算圆内接正六边形、正十二边形等的面积，算到圆内接正九十六边形，得出了圆周率的近似值（$\pi \approx 3.14$），并总结出："割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。"还有，古代数学家将求数列：1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$…的极限过程，比喻作"一尺之棰，日取其半，万世不竭"（棰是杆子的意思）。因此，极限概念描述了一个事物由量变到质变及由有限到无限的变化过程和趋向。

为了不冲淡正文，这里不讲述极限的内容。请读者参阅笔者曾发表过的一篇论文《极限》（《中央民族大学学报·自然科学版》，2012年第4期）。

2. 函数的连续性

实际应用中遇到的函数常有这样一个特点：当自变量的改变量非常小时，相应的函数值的改变量也非常小，这种性质引出连续函数的概念。

在函数 $y=f(x)$ 的定义域中，设自变量 x 由 x_0 变到 x_1，相应的函数值由 $f(x_0)$ 变到 $f(x_1)$，记 $\Delta x = x_1 - x_0$，$\Delta y = f(x_1) - f(x_0)$，它们分别叫作自变量 x 和函数 $y(x)$ 的增量或称改变量。

函数$f(x)$在点x_0处连续的意义是：设函数$f(x)$在点x_0及其领域有定义，如果当自变量的改变量趋于0（$\Delta x\to 0$）时，相应的函数的改变量也趋于0（$\Delta y\to 0$），即$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$

或$\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0+\Delta x)=f(x_0)$

如令$x=x_0+\Delta x$，则当$\Delta x\to 0$时，$x\to x_0$于是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

该式是函数$f(x)$在x_0点连续意义的另一种表达形式。就是说，当$x\to x_0$时函数$f(x)$的极限值等于函数$f(x)$在x_0点的函数值$f(x_0)$，那么函数在x_0点是连续的，因此$f(x)$在x_0点连续必须满足

（1）$f(x)$在x_0点有确定的函数值$f(x_0)$；

（2）当$x\to x_0$时，$f(x)$有确定的极限值，且这个极限值等于$f(x_0)$。

根据$\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$，函数$f(x)$在$x_0$点处连续还可表示成

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(\lim_{x\to x_0}x)$$

例如，对任意有理整函数（多项式）$p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，因有$\lim\limits_{x\to x_0}p(x)=a_0x_0^n+a_1x_0^{n-1}+\cdots+a_n=p(x_0)$，所以任何一个有理整函数在其定义域（$-\infty<x<+\infty$）上任何一点处都是连续的。

若函数$f(x)$在其定义区间D上任何一点处都是连续的，则称函数$f(x)$在区间D上连续。例如，有理整函数$p(x)$在区间$-\infty<x<+\infty$上连续。

若函数$f(x)$在点x_0处不满足连续条件，则称函数$f(x)$在点x_0处不连续，或者称函数$f(x)$在点x_0处间断。点x_0称为$f(x)$的间断点。

显然，如果$f(x)$在点x_0处有下列三种情形之一，则点x_0为$f(x)$的间断点：

（1）在点x_0处$f(x)$没有定义。

（2）$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在。

（3）虽然$f(x_0)$有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$

例如，$y=\dfrac{1}{x}$在点$x=0$处间断。这是因为$y=\dfrac{1}{x}$在点$x=0$处没有定义。

例 1 考察函数

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ x+1 & x>0\end{cases}$$ 在点 $x=0$ 处的连续性。

解：虽然 $f(0)=0$，但 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+1\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在。

所以，$f(x)$ 在 $x=0$ 处间断

例 2 考察函数 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\neq1\\ 1 & x=1\end{cases}$

在点 $x=1$ 处的连续性。

解：虽 $f(1)=1$，但 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}x+1=2\neq f(1)$，

所以，$f(x)$ 在 $x=1$ 处间断。

可以证明，§1 中给出的五种基本初等函数在其定义域内都是连续函数，因此，可以利用连续函数的运算法则推出，一般初等函数（由基本初等函数的和、差、积、商复合而成）在其定义区间内也都是连续的。这样，就可以根据连续函数的意义 $[\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)=f(x_0)]$，和两个重要极限来求一般初等函数的极限。

例 3 求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x}$，（2）$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{e^{x^2}\cos x}{\arcsin(1+x)}$

解：（1）
$$\lim_{x\to x_0}\frac{\tan x-\sin x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1\times\frac{1}{1}-1=0$$

（2）
$$\lim_{x\to0}\frac{e^{x^2}\cos x}{\arcsin(1+x)}=\lim_{x\to0}e^{x^2}\lim_{x\to0}\cos x\Big/\lim_{x\to0}\arcsin(1+x)=\frac{2}{\pi}$$

连续函数的性质：如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间上有以下三个性质：

（1）有界（有界性）。

（2）有最大值 M 和最小值 m（极值性）。