GAODENGSHUXUE TONGBUFUDAO YU FUXITIGAO

高等数学
同步辅导与复习提高

第三版

金 路 徐惠平 编

复旦大学出版社

高等数学

同步辅导与复习提高

（第三版）

金　路　徐惠平　编

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步辅导与复习提高/金路,徐惠平编. —3 版. —上海:
复旦大学出版社,2018.7
ISBN 978-7-309-13655-5

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①金…②徐… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 092763 号

高等数学同步辅导与复习提高(第 3 版)
金　路　徐惠平　编
责任编辑/陆俊杰

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号　邮编:200433
网址:fupnet@ fudanpress. com　http://www. fudanpress. com
门市零售:86-21-65642857　团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143　出版部电话:86-21-65642845
江苏省句容市排印厂

开本 787×960　1/16　印张 42. 25　字数 787 千
2018 年 7 月第 3 版第 1 次印刷
印数 1—4 100

ISBN 978-7-309-13655-5/O · 657
定价:80. 00 元

内 容 提 要

本书是理工科、技术学科、经济与管理、医学等类学生学习高等数学课程的学习辅导书. 全书共八章:极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、级数和常微分方程. 本书重视基础知识的学习与基本技能的训练,强调教学内容与习题解析的同步衔接;注重知识整合,科学地指导学生进行解题;有针对性地扩展知识面,并精心选择了许多综合性问题、比较灵活的问题,以及一些研究型问题,引导学生独立思考和深入训练;注意数学建模基础的介绍和训练,培养数学的应用意识;在例题讲解中,适时穿插一些评注,起到画龙点睛的作用. 本书还对全国和一些院校的硕士研究生入学考试试题,以及一些数学竞赛试题,适当地进行选择,有机地穿插在例题和习题之中. 全书每节之后都配置了一定量的习题,并附有答案或提示.

本书的深度和广度能适应大多数专业的数学知识学习需要,可作为高等学校理科、工科、技术学科等非数学类专业的学习指导书,也可供经济、管理和医学等有关专业使用,并可作为上述各专业的教学参考书. 同时,对于有志报考研究生的学生来说,也是一本较全面的复习用书.

第三版前言

本书自出版以来，受到了同行及学生们的普遍关注和认可．在我们结合教学的使用过程中，它有效地促进了学生解决问题的训练，提高了独立思考的主动性和学习兴趣，改善了学习效果．同时，教师和学生们也不断提出新的问题和建议，促使我们以更高的观点梳理高等数学中各部分内容之间的关系，并将一些相关数学分支的基础纳入高等数学背景下加以讨论，为学生今后的学习打好基础．在这次修订过程中，我们在更加重视基础的同时，重点在如下三个方面作了修改：

一、适度扩展了知识面，增加了一些数学基础知识内容，并更加注重各部分内容之间的联系，努力为学生研究问题和解决问题提供更多的工具和思路，提高数学的应用水平．

二、保持同步辅导与复习提高的编写宗旨，对全书从整体叙述上作了进一步的思考和加工，修改了不当之处，力争提高良好的使用体验度，切合学习和应用的实际需要．

三、增加了例题和习题，重点在于综合性问题和应用性问题，扩展了例题的多样性，并加强了数学建模基础的介绍和训练，力争使全书更加充实与全面，适用性更广．

本次修订得到了复旦大学数学科学学院和学院同事的支持和帮助，复旦大学出版社范仁梅同志和陆俊杰同志也给予了大力支持和鼓励，在此谨致衷心的感谢，同时也诚挚地恳请各位同行继续提出批评和建议．

编　者

2018 年 3 月于复旦大学

第二版前言

本书第一版出版以来,受到了同行及学生们的普遍关注,许多教师将其作为教学参考书向学生推荐,取得了良好的教学效果,使我们倍感欣慰.同时,我们在教学过程中也收到了大量的信息反馈,许多具有丰富教学经验的教师提供了中肯的意见和建议,使用本书的学生们也经常谈及他们的使用体会和希望,鼓励我们对本书进行进一步的补充与完善.

在这次修订过程中,我们基本保持了原书的编写宗旨和结构框架,对全书整体上作了全面梳理,并作了适当的增删,重点在如下几个方面作了修改:

一、在适当调整基础练习题材的基础上,重点增加了综合性例题,并注意拓展知识面,试图进一步帮助学生复习、联络已学过的内容,提高知识的应用水平,增强学生融会贯通地分析问题、解决问题的能力.

二、对全书从整体叙述上作了进一步的加工,使之更确切、科学和规范.同时对一些内容进行了细致的补充和修改,力争使内容表述更加简单易懂.

三、调整并增加了许多习题,力争使全书更加充实与全面,增强理论知识的适当充实与数学能力的科学训练效果.

四、补充了一些近年的各类试题及竞赛题,希望能为读者提供更多的信息,也使本书的适用性更广.

在本书的编写过程中,复旦大学数学科学学院和教务处给予了大力支持,数学科学学院的各位教师也提供了各种建议、支持和帮助,在此表示衷心的感谢.同时,感谢复旦大学出版社范仁梅同志的大力支持和鼓励,由于她的辛勤工作和热情帮助,本书才得以顺利出版.

我们深知一本成熟的教学资料需久经锤炼,因而仍然热切期望广大读者和同行提出宝贵的批评和建议,以期通过进一步努力,使这本书的质量提升到一个新的台阶.

编　者

2012 年 10 月于复旦大学

第一版前言

“高等数学”是大学学习中的一门重要基础课程.由于数学在自然科学、工程技术和社会科学等领域的作用越来越突出,应用面越来越广,因此社会对具有良好数学素质和创新能力强、知识面广的人才的需要也越来越迫切.“高等数学”作为学生学习现代科学知识的基础课程,承载着锻炼学生逻辑思维、培养学生熟练运算能力和运用数学技术的能力,以及为后续课程提供良好基础的重任,其重要性不言而喻.而高等数学研究对象和方法的改变,对于刚从初等数学学习转到高等数学学习的学生来说,从认知、观念、心理等各个层面常常感到不适应、感到困惑.特别是对于形式多样、难易不同、方法各异的习题和练习感到无所适从、感到手足无措.虽然对于如何学好高等数学大家见仁见智,各有不同观点和方法,但学习数学知识的有效途径是多做习题,却是经过长期的数学教学实践所达成的共识.

我们通过多年的教学实践,深知学生的疑难与困惑,了解在学习方法、解题方法和技巧方面的引导对于他们的重要性.经过长期的教学实践和研究积累,查阅了各种期刊、教学参考资料和习题集,并听取了同行的意见和建议,我们编写了这本高等数学学习辅导教材,以适应教学需要.在编写过程中,我们特别注意了以下几点:

一、重视基础知识的学习与基本技能的训练,适当增强基础题目的讲解内容.这是因为只有熟练掌握了基本概念、基本原理和基本方法,才能有能力去分析和解决复杂的问题.同时,这也是锻炼逻辑思维、训练数学表达与推理的必要环节.

二、强调教学内容与例题分析的同步衔接,增强典型问题和规律性解答部分的内容,为学生课后复习与练习提供尽可能多的方法、技巧与参照,在开拓读者思路方面提供一把入门的钥匙.

三、系统总结教学内容,注重知识整合,科学地指导学生进行数学解题.在题目的选取与安排上,逐步增加综合型例题,以例题为载体,复习和运用学过的知识,培养学生综合运用数学知识去解决问题的能力.

四、解题训练的根本目的是培养和锻炼学生运用数学知识去解决数学问题的能力,因此在重视基础的同时,我们还选择了许多比较灵活的问题,以及一些研究型问题,它们需要具有一定的解题经验与较深入地思考才能够入手.通过这些例题,希望引导学生认识到独立思考和独立工作的重要性,体验分析问题、研究问

题、转化问题,进而解决问题的过程.

五、对许多例题给出了多种解法,展示数学方法的灵活性与多样性.同时,在许多有启示的例题之后给出一些评注,揭示其内在蕴含的规律和可操作的方法,达到举一反三的效果.

六、由于"高等数学"是招收研究生考试的科目,我们对于全国和一些院校的硕士研究生入学考试试题,以及一些数学竞赛试题,适当地进行选择,有机地穿插在本书的例题和习题之中.这样,一方面为有志于继续深入学习的学生提供帮助,另一方面也为正在学习高等数学的学生提供更多的综合能力训练素材.

七、为使学生能够进一步掌握学习内容和进行自我训练,了解自己的学习状况,在每小节之后都配置了一定量的习题,并附有答案或提示.

在本书的编写过程中,复旦大学数学科学学院童裕孙、陈纪修、吴泉水、程晋、楼红卫、朱大训等教授提供了各种建议、支持和帮助;复旦大学教务处也予以鼓励和支持,在此表示衷心的感谢.同时,感谢复旦大学出版社范仁梅同志的大力支持和帮助,由于她的辛勤工作,本书才得以与读者见面.

囿于学识,本书错误和不当之处在所难免,殷切期望广大读者和同行提出宝贵的批评和建议.

编　者

2010 年 6 月于复旦大学

目　　录

第一章
极限与连续

§1.1 函　　数

知识要点

一、函数的概念

定义 1.1.1　设 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的一个子集，如果按某个规则 f，使得对于 D 中每个数 x，都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称 f 是以 D 为**定义域的(一元)函数**，称 x 为**自变量**，y 为**因变量**. 这个函数关系记作

$$f: D \to \mathbf{R},$$
$$x \mapsto y.$$

又记 $y = f(x)$，并称 $R = \{f(x) \mid x \in D\}$ 为函数 f 的**值域**.

有时为明确起见，记上述函数 f 的定义域为 $D(f)$，值域为 $R(f)$.

设函数 f 的定义域为 D，在平面直角坐标系中称 $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$ 为函数 f 的图像.

二、函数的性质

1. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 $D(f)$ 关于原点对称. 如果

$$f(-x) = f(x),\ x \in D(f),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**；如果

$$f(-x) = -f(x),\ x \in D(f),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于坐标原点中心对称.

2. 周期性

对于函数 $f(x)$，如果存在正数 T，使得

$$f(x + T) = f(x),\ x \in D(f),$$

则称 $f(x)$ 是以 T 为**周期**的**周期函数**,满足上述关系的最小正数 T 称为 $f(x)$ 的**最小正周期**.

3. 单调性

设有函数 $f(x)$,如果对于任意 $x_1, x_2 \in D \subset D(f)$,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \ (\text{或} f(x_1) \geqslant f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在 D 上是**单调增加**(或**单调减少**)的;如果上述关系式中等号均不成立,则称 $f(x)$ 在 D 上是**严格单调增加**(或**严格单调减少**)的.

4. 有界性

设有函数 $f(x)$,$D \subset D(f)$,如果存在常数 M,使得

$$f(x) \leqslant M,\ x \in D,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上有**上界**,称 M 为 $f(x)$ 的一个上界;如果存在常数 m,使得

$$f(x) \geqslant m,\ x \in D,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上有**下界**,称 m 为 $f(x)$ 的一个下界;在 D 上既有上界又有下界的函数称为在 D 上**有界**. 显然 f 是 D 上的有界函数等价于:存在正常数 K,使得

$$|f(x)| \leqslant K,\ x \in D.$$

如果这样的数 K 不存在,则称 $f(x)$ 在 D 上**无界**.

三、复合函数与反函数

设有函数 f 和 g,称定义在

$$\{x \mid x \in D(g),\ g(x) \in D(f)\}$$

上的函数 $f \circ g$ 为 f 和 g 的**复合函数**,其中

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

对于复合函数 $f \circ g$,称 $u = g(x)$ 为中间变量,称 $x \in D(f \circ g)$ 为自变量.

设有函数 f,如果对每一个 $y \in R(f)$,有唯一的 $x \in D(f)$ 满足 $y = f(x)$,则称这个定义在 $R(f)$ 上的对应关系

$$y \mapsto x$$

为函数 f 的**反函数**,记作 f^{-1}.

四、初等函数

常数函数,幂函数,指数函数,对数函数,三角函数,反三角函数这 6 类函数称为**基本初等函数**. 由这些基本初等函数经过有限次四则运算和复合所构成的函数,统称为**初等函数**.

例题分析

例 1.1.1 求函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{(x-1)^2}{x-3}}$ 的定义域.

解 定义域中的点 x 应满足:

$$\frac{(x-1)^2}{x-3}\geqslant 0,$$

也就是

$$\begin{cases}(x-1)^2\geqslant 0,\\ x-3>0,\end{cases} \text{或} \begin{cases}(x-1)^2\leqslant 0,\\ x-3<0.\end{cases}$$

由此即得

$$x>3, \text{或} x=1,$$

所以函数的定义域为 $D(f)=\{1\}\cup(3,+\infty)$.

例 1.1.2 证明函数 $f(x)=\dfrac{2^x}{1+2^x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调增加.

证 任取 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$,则

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2^{x_1}}{1+2^{x_1}}-\frac{2^{x_2}}{1+2^{x_2}}$$

$$=\frac{2^{x_1}-2^{x_2}}{(1+2^{x_1})(1+2^{x_2})}<0,$$

其中最后一个不等式利用了函数 $y=2^x$ 的严格单调增加性质. 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格单调增加.

例 1.1.3 讨论下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\ln(\sin x+\sqrt{\sin^2x+1})$;

(2) $f(x)=x\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$.

解 (1) 因为对于每个 $x\in\mathbf{R}$,有

$$f(-x)=\ln(-\sin x+\sqrt{\sin^2x+1})=\ln\frac{1}{\sin x+\sqrt{\sin^2x+1}}$$

$$=-\ln(\sin x+\sqrt{\sin^2x+1})=-f(x),$$

所以 $f(x)=\ln(\sin x+\sqrt{\sin^2x+1})$ 为奇函数.

(2) 因为对于每个 $x\in\mathbf{R}$,有

$$f(-x)=-x\frac{2^{-x}-1}{2^{-x}+1}=-x\frac{1-2^x}{1+2^x}=f(x),$$

所以$f(x) = x\dfrac{2^x - 1}{2^x + 1}$为偶函数.

例 1.1.4　证明函数$f(x) = x\sin x$是非周期函数.

证　用反证法. 设$T > 0$是$f(x) = x\sin x$的一个周期,则

$$f(x + T) = f(x),\ x \in \mathbf{R}.$$

在上式中取$x = 0$,有$T\sin T = 0$,于是对某个正整数k,成立$T = k\pi$. 这样便有

$$f(x + T) = (x + T)\sin(x + T) = (-1)^k(x + T)\sin x.$$

再在$f(x + T) = f(x)$中取$x = \dfrac{\pi}{4}$,并注意上式可得,对于$k = 1,2,\cdots$,成立

$$\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} = (-1)^k\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)\sin\frac{\pi}{4},$$

即

$$(-1)^k k = \frac{1}{4}(1 - (-1)^k),$$

这是不可能的. 因此$f(x) = x\sin x$是非周期函数.

例 1.1.5　讨论下列函数是否有界:

(1) $f(x) = \arctan x,\ x \in (-\infty, +\infty)$;

(2) $f(x) = \tan x,\ x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$;

(3) $f(x) = \tan x,\ x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

(4) $f(x) = x\cos x,\ x \in (-\infty, +\infty)$.

解　(1) 因为$|\arctan x| < \dfrac{\pi}{2},\ x \in (-\infty, +\infty)$,所以$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上有界.

(2) 因为$|\tan x| \leqslant 1,\ x \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$,所以$f(x)$在$\left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$上有界.

(3) 函数$f(x)$无界. 用反证法来证明:若$f(x)$在$\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$上有界,则存在$L > 0$,使得

$$|\tan x| \leqslant L,\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

但是,取$x_L = \arctan(L + 1) \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$,便有

$$|f(x_L)| = |\tan x_L| = L + 1 > L,$$

这与L的选取矛盾.

(4) 函数$f(x)$无界. 用反证法来证明:若f在$\mathbf{R}$上有界,则存在$L > 0$,使得

$$|x\cos x| \leqslant L,\ x \in \mathbf{R}.$$

但是,取 $x_n = 2n\pi(n = 1,2,\cdots)$,便有

$$|f(x_n)| = |x_n\cos x_n| = 2n\pi,$$

取足够大的 n,例如取 $n = \left[\frac{L}{2\pi}\right] + 1$,便有

$$|f(x_n)| > L,$$

这与 L 的选取矛盾.

例 1.1.6 试将下列函数分解为几个简单函数的复合:

(1) $F(x) = \ln(1 + \sin^2 2x)$, $D(F) = (-\infty, +\infty)$;

(2) $F(x) = (1 + \arctan^4 3x)^3$, $D(F) = (-\infty, +\infty)$.

解 (1) 取

$$\begin{aligned}
&f(u) = \ln u,\ D(f) = (0, +\infty),\\
&g(v) = 1 + v^2,\ D(g) = (-\infty, +\infty),\\
&h(w) = \sin w,\ D(h) = (-\infty, +\infty),\\
&k(x) = 2x,\ D(k) = (-\infty, +\infty),
\end{aligned}$$

则有

$$F = f \circ g \circ h \circ k.$$

(2) 取

$$\begin{aligned}
&f(u) = u^3,\ D(f) = (-\infty, +\infty),\\
&g(v) = 1 + v^4,\ D(g) = (-\infty, +\infty),\\
&h(w) = \arctan w,\ D(h) = (-\infty, +\infty),\\
&k(x) = 3x,\ D(k) = (-\infty, +\infty),
\end{aligned}$$

则有

$$F = f \circ g \circ h \circ k.$$

例 1.1.7 设 $f(x) = e^{x^2}$,一元函数 φ 满足 $f[\varphi(x)] = 1 - x$,并且 $\varphi(x) \geqslant 0$,求 φ.

解 由 $f(x) = e^{x^2}$ 及 $f[\varphi(x)] = 1 - x$,得

$$f[\varphi(x)] = e^{[\varphi(x)]^2} = 1 - x,$$

因此解得 $\varphi(x) = \pm\sqrt{\ln(1 - x)}$. 又因为 $\varphi(x) \geqslant 0$,所以

$$\varphi(x) = \sqrt{\ln(1 - x)},\ x \leqslant 0.$$

例 1.1.8 设 $f(x) = \sqrt{x + |x|}$,求 $f[f(x)]$.

解 按定义,有

$$f[f(x)] = \sqrt{f(x) + |f(x)|} = \sqrt{\sqrt{x + |x|} + |\sqrt{x + |x|}|}.$$

当 $x \geqslant 0$ 时，

$$\sqrt{x+|x|}+\left|\sqrt{x+|x|}\right| = \sqrt{2x}+\sqrt{2x} = \sqrt{8x}.$$

当 $x < 0$ 时，

$$\sqrt{x+|x|}+\left|\sqrt{x+|x|}\right| = \sqrt{x-x}+\left|\sqrt{x-x}\right| = 0.$$

于是

$$f[f(x)] = \begin{cases} \sqrt[4]{8x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

例 1.1.9 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1, \\ \ln x, & x \geqslant 1, \end{cases}$ $\varphi(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0, \\ x+1, & x \leqslant 0, \end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

解 显然

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} \varphi(x), & \varphi(x) < 1, \\ \ln\varphi(x), & \varphi(x) \geqslant 1. \end{cases}$$

由 φ 的定义，$\varphi(x) < 1$ 当且仅当 $x+1 < 1$，即 $x < 0$，此时 $\varphi(x) = x+1$；$\varphi(x) \geqslant 1$ 当且仅当 $x > 0$ 或 $x = 0$，即 $x \geqslant 0$，此时 $\varphi(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} = e^x, x \geqslant 0$. 因此

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ \ln e^x, & x \geqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ x, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

例 1.1.10 求下列函数的反函数：

(1) $f(x) = \dfrac{2-x}{x+1}$;

(2) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x-x^2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x-1, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

解 (1) 设 $y = \dfrac{2-x}{x+1}$，则 $y(x+1) = 2-x$，由此解得

$$x = \frac{2-y}{y+1},$$

即 $f(x)$ 的反函数为其自身：

$$f^{-1}(x) = \frac{2-x}{x+1},\ x \neq -1.$$

(2) 设 $y = \begin{cases} \sqrt{2x-x^2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x-1, & 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$

当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时，$y = \sqrt{2x-x^2}$，从中解得

$$x = 1-\sqrt{1-y^2},\ 0 \leqslant y \leqslant 1;$$

当 $1 < x \leqslant 2$ 时，$y = 2x - 1$，从中解得

$$x = \frac{y+1}{2},\ 1 < y \leqslant 3.$$

所以 $f(x)$ 的反函数为

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - x^2}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \dfrac{x+1}{2}, & 1 < x \leqslant 3. \end{cases}$$

例 1.1.11 求 $y = \sin x \mid \sin x \mid \left(\mid x \mid \leqslant \dfrac{\pi}{2} \right)$ 的反函数.

解 当 $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ 时，$y = \sin^2 x$，于是 $\sin x = \sqrt{y}(0 \leqslant y \leqslant 1)$，所以

$$x = \arcsin \sqrt{y},\ 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

当 $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x < 0$ 时，$y = -\sin^2 x$，于是 $\sin x = -\sqrt{-y}(-1 \leqslant y < 0)$，所以

$$x = \arcsin(-\sqrt{-y}) = -\arcsin\sqrt{-y},\ -1 \leqslant y < 0.$$

于是 $y = \sin x \mid \sin x \mid$ 的反函数为

$$y = \begin{cases} \arcsin \sqrt{x}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\arcsin\sqrt{-x}, & -1 \leqslant x < 0. \end{cases}$$

例 1.1.12 已知函数 $f(x)$ 满足

$$f(x) + 2f\left(\frac{2-x}{1+x}\right) = 3x,$$

求 $f(x)$.

解 令 $u = \dfrac{2-x}{1+x}$，则 $x = \dfrac{2-u}{u+1}$. 代入给出的条件得

$$f\left(\frac{2-u}{1+u}\right) + 2f(u) = \frac{3(2-u)}{1+u},$$

即成立

$$f\left(\frac{2-x}{1+x}\right) + 2f(x) = \frac{3(2-x)}{1+x}.$$

此式与 $f(x) + 2f\left(\dfrac{2-x}{1+x}\right) = 3x$ 结合解得

$$f(x) = \frac{4 - 3x - x^2}{1+x}.$$

例 1.1.13 设函数 f 与 g 互为反函数，且 $f(x) \neq 0$. 若函数 $y = g\left[\dfrac{2}{f(3x-1)}\right]$ 可定义，求其反函数.