时代云图 SHI DAI YUN TU 理工社

【张宇数学教育系列丛书】 2019

张宇考研数学
题源探析经典1000题

（解析分册·数学二）

主编○张宇

北京理工大学出版社
INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

时代云图 SHI DAI YUN TU 理工社

【张宇数学教育系列丛书】

张宇考研数学题源探析经典1000题

（解析分册·数学二）

主编○张宇

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学题源探析经典1000题. 解析分册. 数学二 / 张宇主编. —北京:北京理工大学出版社,2018. 3

ISBN 978-7-5682-5366-6

Ⅰ. ①张… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第040431号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 天津市蓟县宏图印务有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 14
字　　数 / 350千字
版　　次 / 2018年3月第1版　2018年3月第1次印刷
定　　价 / 59.80元(共2册)

责任编辑 / 高　芳
文案编辑 / 胡　莹
责任校对 / 黄拾三
责任印制 / 边心超

Contents 目录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第一篇 高等数学

第 1 章 函数、极限、连续

A组

一、选择题

1.1. (D) **【解析】** 对于命题 ①，由数列收敛的定义可知，若数列 $\{u_n\}$ 收敛于 A，则对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在自然数 N，当 $n > N$ 时，恒有

$$|u_n - A| < \varepsilon,$$

则当 $n_i > N$ 时，恒有

$$|u_{n_i} - A| < \varepsilon,$$

因此数列 $\{u_{n_i}\}$ 也收敛于 A，可知命题正确.

对于命题 ②，不妨设数列 $\{x_n\}$ 为单调递增的，即

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots,$$

其中某一给定子数列 $\{x_{n_i}\}$ 收敛于 A，则对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在自然数 N，当 $n_i > N$ 时，恒有

$$|x_{n_i} - A| < \varepsilon.$$

由于数列 $\{x_n\}$ 为单调递增的数列，对于任意的 $n > N$，必定存在 $n_i \leqslant n \leqslant n_{i+1}$，有

$$-\varepsilon < x_{n_i} - A \leqslant x_n - A \leqslant x_{n_{i+1}} - A < \varepsilon,$$

从而

$$|x_n - A| < \varepsilon,$$

可知数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A. 因此命题正确.

对于命题 ③，因 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = A$，由极限的定义可知，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，必定存在自然数 N_1, N_2，使得

当 $2n > N_1$ 时，恒有 $|x_{2n} - A| < \varepsilon$；

当 $2n + 1 > N_2$ 时，恒有 $|x_{2n+1} - A| < \varepsilon$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时，总有 $|x_n - A| < \varepsilon$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. 可知命题正确.

故答案选择(D).

1.2. (C) **【解析】** 令 $u(x) = \dfrac{2}{x}$，$v(x) = \dfrac{1}{x}$，当 $x \to 0$ 时可排除(A)；令 $u(x) = v(x) = \dfrac{1}{x}$，当 $x \to 0$ 时可排除(B)；令 $u(x) = \dfrac{1}{x}$，$v(x) = -\dfrac{1}{x}$，当 $x \to 0$ 时可排除(D)；对于选项(C)，如 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2}[f(x) + g(x)] = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在，矛盾，故此论断正确.

1.3. (B) **【解析】** 若 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 是无穷小，则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n \cdot \dfrac{1}{x_n} = 0$，故(B) 正确.

若取 $x_n=\dfrac{1}{n}$，$y_n=1$，则满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，且 $\{x_n\}$ 在 $n\to\infty$ 时是无穷小、有界、单调递减的，但 $\{y_n\}$ 不是无穷小，排除(A)，(C)，(D).

1.4. (D) **【解析】** 令 $g(x)=\varphi[\varphi(x)]$，注意 $\varphi(x)$ 是奇函数，有

$$g(-x)=\varphi[\varphi(-x)]=\varphi[-\varphi(x)]=-\varphi[\varphi(x)]=-g(x),$$

因此 $\varphi[\varphi(x)]$ 为奇函数. 同理可得 $f[\varphi(x)]$，$f[f(x)]$，$\varphi[f(x)]$ 均为偶函数. 答案选(D).

1.5. (B) **【解析】** 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内，$\sin x$ 是增函数，$\cos x$ 是减函数.

任取 $x_1,x_2\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $x_1<x_2$，有 $\cos x_1>\cos x_2$，所以 $\sin(\cos x_1)>\sin(\cos x_2)$，即 $f(x)$ 是减函数；由于 $\sin x_1<\sin x_2$，所以 $\cos(\sin x_1)>\cos(\sin x_2)$，即 $\varphi(x)$ 是减函数.

【注】 复合函数的单调性：若 $f(x)$ 是增函数，$\varphi(x)$ 是减函数，则 $f[f(x)]$，$\varphi[\varphi(x)]$ 是增函数，而 $f[\varphi(x)]$，$\varphi[f(x)]$ 是减函数.

1.6. (D) **【解析】** $f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant 0,\\ (-x)^2+(-x), & -x>0\end{cases}=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ x^2-x, & x<0.\end{cases}$

1.7. (D) **【解析】** 若 $\alpha(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$，$\beta(x)=x$，当 $x\to 0$ 时，都是无穷小. 但 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，故 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$ 无法比较阶的高低，排除(A)，(B)，(C). 所以选(D).

1.8. (A) **【解析】** 对于任意给定的正数 M，总存在点 $x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，当 $n>\dfrac{2M-\pi}{4\pi}$ 时，有 $|f(x_n)|=\left|2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right|>M$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界，所以(A) 正确，(B)，(D) 错误.

(C) 错，对于任意给定的正数 M，无论 x 取多么大的正数，总有 $x_n=|2n\pi|>x$（只要 $|n|>\dfrac{x}{2\pi}$），使 $f(x_n)=x_n\sin x_n=0<M$，故当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 不是无穷大（千万不要将无穷大与无界混为一谈）.

1.9. (C) **【解析】** 由题设可知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}}{x^3}\neq 0$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+bx)e^x-(1+ax)}{x^3(1+bx)}\neq 0$. 因为 $x\to 0$ 时，分母趋于零，由洛必达法则知 $\lim\limits_{x\to 0}[be^x+(1+bx)e^x-a]=0$，得到 $b+1-a=0$.

又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+bx)e^x-(1+ax)}{x^3(1+bx)}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2b+1)e^x+bxe^x}{6x+12bx^2}$ 成立，则必须有 $2b+1=0$，即 $b=-\dfrac{1}{2}$，再结合 $b+1-a=0$，得 $a=\dfrac{1}{2}$.

1.10. (B) **【解析】** 令 $\dfrac{1}{x}=t$，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\sin\frac{1}{x}}-1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^a-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{\sin t}-1}{(1+t)[(1+t)^{a-1}-1]}=\frac{1}{a-1}\ (a\neq 1).$$

1.11. (D) **【解析】** 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时为无界变量，不是无穷大. 令 $g(x)=x$，当 $x\to 0$ 时为无穷小，$f(x)g(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，可排除(A). 设 $x\to 0$ 时，令 $f(x)=x^2$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$ 可排除(B)， (C).因此选(D).

1.12. (B) **【解析】方法一** 若 $f(x)+\sin x$ 在点 x_0 处连续,则

$$f(x)=[f(x)+\sin x]-\sin x$$

在点 x_0 处也连续,与已知矛盾.

方法二 排除法.设 $f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处间断,但 $f(x)\sin x=0$ 在 $x=0$ 处连续.若设 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处间断,但 $f^2(x)=1$, $|f(x)|=1$ 在 $x=0$ 处都连续.故可排除(A),(C),(D).

二、填空题

1.13. na **【解析】**令 $x=-1$,则 $f(1)=f(-1)+f(2)$,因 $f(x)$ 是奇函数,得到 $f(2)=f(1)-f(-1)=2f(1)=2a$.再令 $x=1$,则 $f(3)=f(1)+f(2)=3f(1)=3a$,现用数学归纳法证明 $f(n)=na$.

当 $n=1,2,3$ 时,已知或者已证.假设 $n=k$ 时,有 $f(k)=ka$.当 $n=k+1$ 时,$f(k+1)=f(k-1)+f(2)=(k-1)a+2a=(k+1)a$,故对一切正整数 n,有 $f(n)=na$,令 $x=0$,则 $f(2)=f(0)+f(2)$,即 $f(0)=0=0\cdot a$,又 $f(x)$ 是奇函数,故对一切负整数 n 有 $f(n)=-f(-n)=-(-na)=na$.所以对一切整数 n,均有 $f(n)=na$.

1.14. $e^{\frac{1}{100}x^2}$ **【解析】**当 x 充分大时,有重要关系:$e^{\alpha x}\gg x^{\beta}\gg \ln^{\gamma}x$,其中 $\alpha,\beta,\gamma>0$,故本题填 $e^{\frac{1}{100}x^2}$.

1.15. $\frac{1}{2}$ **【解析】**$\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin 2x}=\dfrac{1}{2}$.

1.16. 0 **【解析】**$\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$.

1.17. e^6 **【解析】**$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\exp\left\{\lim\dfrac{2}{\sin x}\cdot\ln(1+3x)\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot 3x}{\sin x}\right\}=e^6$.

1.18. $-\frac{1}{6}$ **【解析】**$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{(e^{x^2}-1)\ln(1-x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{6}x^3}{x^2(-x)}=-\dfrac{1}{6}$.

1.19. e^6 **【解析】**$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x-2}\right)^{2x-1}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3(2x-1)}{x-2}\right\}=e^6$.

1.20. $\frac{1}{3}$;1 **【解析】**当 $x\to -1$ 时,

$$\sqrt[3]{x}+1\xlongequal{t=x+1}\sqrt[3]{t-1}+1=-(\sqrt[3]{1-t}-1)\sim-\left(-\frac{1}{3}t\right)=\frac{x+1}{3},$$

故 $A=\frac{1}{3}$,$k=1$.

三、解答题

1.21.【解】本题考查分段函数的复合方法.下面用解析法求解.

首先,广义化为 $f[g(x)]=\begin{cases}[g(x)]^2-1, & g(x)\leqslant 0,\\ \ln g(x), & g(x)>0.\end{cases}$

由 $g(x)$ 的表达式知,

若 $g(x)\leqslant 0$,即$\{x\mid 2e^x-1\leqslant 0\}\cap\{x\mid x\leqslant 0\}$或$\{x\mid x^2-1\leqslant 0\}\cap\{x\mid x>0\}$,而

$\{x \mid 2e^x - 1 \leqslant 0\} \cap \{x \mid x \leqslant 0\} = \{x \mid x \leqslant -\ln 2\} \cap \{x \mid x \leqslant 0\} = \{x \mid x \leqslant -\ln 2\}$,

$\{x \mid x^2 - 1 \leqslant 0\} \cap \{x \mid x > 0\} = \{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\} \cap \{x \mid x > 0\} = \{x \mid 0 < x \leqslant 1\}$.

当 $g(x) > 0$，即 $\{x \mid 2e^x - 1 > 0\} \cap \{x \mid x \leqslant 0\}$ 或 $\{x \mid x^2 - 1 > 0\} \cap \{x \mid x > 0\}$，而

$\{x \mid 2e^x - 1 > 0\} \cap \{x \mid x \leqslant 0\} = \{x \mid x > -\ln 2\} \cap \{x \mid x \leqslant 0\} = \{x \mid -\ln 2 < x \leqslant 0\}$,

$\{x \mid x^2 - 1 > 0\} \cap \{x \mid x > 0\} = \{x \mid x > 1 \text{ 或 } x < -1\} \cap \{x \mid x > 0\} = \{x \mid x > 1\}$.

综上可得
$$f[g(x)] = \begin{cases} (2e^x - 1)^2 - 1, & x \leqslant -\ln 2, \\ \ln(2e^x - 1), & -\ln 2 < x \leqslant 0, \\ (x^2 - 1)^2 - 1, & 0 < x \leqslant 1, \\ \ln(x^2 - 1), & x > 1. \end{cases}$$

1.22.【解】 由 $f[g(x)] = \begin{cases} 1, & \dfrac{1}{e} < g(x) < 1, \\ g(x), & 1 \leqslant g(x) < e \end{cases}$ 得到 $f[g(x)] = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0, \\ e^x, & 0 \leqslant x < 1. \end{cases}$

【注】 在求 $f[g(x)]$ 时，既要把解析式 $f(x)$ 中的 x 都换为 $g(x)$，同时要把表示自变量变化范围中的 x 换为 $g(x)$，并由得到的不等式求出复合函数的自变量的变化范围.

1.23.【解】 当 $x \to 0$ 时，$\tan x \sim x$，$(1 + \sin x)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \dfrac{1}{n}\sin x \sim \dfrac{x}{n}$，故原极限 $= \dfrac{1}{n}$.

1.24.【解】 当 $x \to 0$ 时，$\sin x \sim x$，$e^x - e^{-x} = e^{-x}(e^{2x} - 1) \sim 2x$，故原极限 $= 2$.

1.25.【解】 当 $x \to 0$ 时，$\ln(1 + x^4) \sim x^4$，$1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$，$1 - \cos\dfrac{x}{2} \sim \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{8}x^2$，故原极限 $= \dfrac{1}{16}$.

1.26.【解】 这是"1^∞"型未定式极限，可用公式 $\lim\limits_{x \to 0} u^v = \exp\{\lim\limits_{x \to 0} v(u - 1)\}$ 计算（事实上 $\ln u = \ln[1 + (u - 1)] \sim u - 1 (u \to 1)$）. 故原式 $= \exp\left\{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + e^x - 1}{x}\right\} = \exp\left\{\lim\limits_{x \to 0}\left(1 + \dfrac{e^x - 1}{x}\right)\right\} = e^2$.

1.27.【解】 原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{6}\sin^3 x \cdot x}{x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{6}x^4}{x^4} = \dfrac{1}{6}$.（投命题者所好，当狗 $\to 0$ 时，狗 $- \sin$ 狗 $\sim \dfrac{1}{6}$ 狗^3）

1.28.【解】 当 $x \to 0$ 时，$e^{\tan x} - e^{\sin x} = e^{\sin x}(e^{\tan x - \sin x} - 1) \sim \tan x - \sin x$，$x\sin^2 x \sim x^3$，故

$$\text{原式} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} \cdot \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\text{当 } x \to 0 \text{ 时}, \tan x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2\right).$$

1.29.【解】 $\lim\limits_{x \to 0^+}\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \exp\left\{\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{\tan x}{x} - 1\right)\right\} = \exp\left\{\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{\tan x - x}{x}\right)\right\}$

$$= \exp\left\{\lim_{x \to 0^+} \frac{\tan x - x}{x^3}\right\} = \exp\left\{\lim_{x \to 0^+} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}\right\} = e^{\frac{1}{3}}.$$

根据海涅定理，取 $x = \dfrac{1}{n}$，则原式 $= e^{\frac{1}{3}}$.

1.30.【解】 原式 $= \lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \dfrac{-2}{x + 1}\right)^x = \exp\left\{\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-2x}{x + 1}\right\} = e^{-2}$.

1.31.【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-1)\cos^2 x}{\sin^2 x}\right\}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin^2 x}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to 0}-\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x^2}\right\}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

1.32.【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+\cos x}\cdot\dfrac{\sin x+x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}\cdot\dfrac{x}{\ln(1+x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}+x\sin\frac{1}{x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

1.33.【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{a}{x}-\dfrac{1}{x^2}\ln(1+ax)\right]$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{ax-\ln(1+ax)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\dfrac{a}{1+ax}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2x}{2x(1+ax)}=\frac{a^2}{2}.$$

1.34.【解】 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{x}{1+\ln x}}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x\ln x}{1+\ln x}\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to 0^+}x\left(1-\dfrac{1}{1+\ln x}\right)\right\}=e^0=1.$

1.35.【解】 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\tan x}=\exp\{\lim\limits_{x\to 0^+}\tan x\cdot\ln(\cot x)\}=\exp\{\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln(\cot x)\}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\sin x\cos x}\right\}$$

$$=e^0=1.$$

1.36.【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^2}{x\cdot\dfrac{1}{2}x(1+\sqrt{\cos x})}=\dfrac{1}{2}.$

1.37.【解】 为了在使用洛必达法则时使求导数变得简单，先作变量代换，令 $t=\dfrac{1}{x}$，从而

$$原式=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{2t})}{\ln(1+e^t)}=\lim_{t\to+\infty}\frac{2e^{2t}}{1+e^{2t}}\cdot\frac{1+e^t}{e^t}=2.$$

1.38.【分析】 此题为“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式，若用洛必达法则，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\xlongequal{洛必达法则}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\xlongequal{洛必达法则}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},$$

连续使用完两次法则，又回到了起点，法则失效，正确的做法是先对式子恒等变形.

【解】 分子分母同乘 e^{-x}，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1.$

1.39.【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}}=1.$

1.40.【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}-\dfrac{1}{2}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\cdot\dfrac{2x-(1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)}\right]$，

又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=-\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x-(1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)}=-1$，故原极限 $=\dfrac{e}{2}$.

1.41.【解】 不正确. 初等函数是指由常数及基本初等函数经有限次四则运算及有限次复合步骤

所得到的，并用一个式子表示的函数. 分段函数虽用几个表达式表示，但并不能说肯定不能用一个表达式表示，因此，分段函数可能是初等函数，也可能不是初等函数，如 $\varphi(x)=|x|$，通常写成分段函数的形式 $|x|=\begin{cases}x, & x\geq 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 但也可以写成一个表达式 $|x|=\sqrt{x^2}$，所以函数 $\varphi(x)=|x|$ 是初等函数. 而 $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 则不是初等函数.

【注】 虽然有些分段函数是初等函数，但把它写成一个表达式时，无助于我们讨论它的性质，相反，常会给我们增加麻烦. 因此对于分段函数，除特殊需要外，通常我们没有必要去鉴别它是不是初等函数.

一般地，如果 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上是初等函数，$g(x)$ 在 $[c,b]$ 上是初等函数，且 $f(c)=g(c)$，那么分段函数 $\varphi(x)=\begin{cases}f(x), & a\leqslant x\leqslant c,\\ g(x), & c<x\leqslant b\end{cases}$ 必是初等函数，因为这时 $\varphi(x)$ 可以写成一个表达式：

$$\varphi(x)=f\left(\frac{x-c-|x-c|}{2}+c\right)+g\left(\frac{x-c+|x-c|}{2}+c\right)-f(c),x\in[a,b].$$

1.42.【解】 显然 $f(0)$ 无意义.

当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+2}-1}{x^{2n}+1}=\begin{cases}-1, & 0<|x|<1,\\ x^2, & |x|>1,\\ 0, & |x|=1.\end{cases}$

而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1$，则 $x=0$ 为可去间断点. 又

$$f(1^-)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}(-1)=-1,f(1^+)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}x^2=1,$$

则 $x=1$ 为跳跃间断点.

由于 $f(x)$ 是偶函数，则 $x=-1$ 也是跳跃间断点.

1.43.【解】 令 $x^n-t^n=u$，则 $F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{n}\int_0^{x^n}f(u)\mathrm{d}u$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^{2n}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{nx^{2n}}\int_0^{x^n}f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)nx^{n-1}}{2nx^{2n-1}}=\frac{1}{2n}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^n)}{x^n}=\frac{f'(0)}{2n}.$$

1.44.【解】 $f(x)$ 无定义的点是使 $1-x=0$ 和 $1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}=0$ 的点，即 $x=1$ 和 $x=0$，所以 $f(x)$ 的连续区间为 $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$.

当 $x\to 0$ 时，$1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\to 0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$，所以 $x=0$ 是无穷间断点.

当 $x\to 1^-$ 时，$\dfrac{x}{1-x}\to+\infty$，$1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\to-\infty$，所以 $f(1^-)=0$，而当 $x\to 1^+$ 时，$\dfrac{x}{1-x}\to-\infty$，$1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}\to 1$，所以 $f(1^+)=1$. 所以 $x=1$ 是跳跃间断点.

1.45.【证】 已知 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，令 $x_2=0$，则 $f(x_1)=f(x_1)+f(0)$，可得 $f(0)=0$，又 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)=f(0)=0$，而 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f(x_0)+f(\Delta x)-f(x_0)=f(\Delta x)$，两边取极限得到 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)=0$，故函数 $f(x)$ 在任意点 x_0 处连续.

1.46.【解】 当 $k\leqslant 0$ 时，$I=-\infty$，极限不存在；

当 $k>0$ 时，$I\xlongequal[x=\frac{1}{t}]{\infty-\infty}\lim\limits_{t\to 0^+}\left[\left(\dfrac{1}{t^a}+\dfrac{8}{t^1}+2\right)^k-\dfrac{1}{t}\right]$（注意 $a\geqslant 5$）

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{(1+8t^{\alpha-4}+2t^{\alpha})^k - t^{\alpha k-1}}{t^{\alpha k}},$$

只有当 $\alpha k-1=0$，即 $k=\frac{1}{\alpha}$ 时，极限才为"$\frac{0}{0}$"型，否则极限为 ∞，不存在.

故 $$I=\lim_{t\to 0^+}\frac{(1+8t^{\alpha-4}+2t^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}-1}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{\alpha}(8t^{\alpha-4}+2t^{\alpha})}{t},$$

当 $\alpha=5$ 时，$I=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{5}\frac{(8t+2t^5)}{t}=\frac{8}{5}$，此时 $k=\frac{1}{5}$；

当 $\alpha>5$ 时，$I=0$，此时 $k=\frac{1}{\alpha}$.

B组

一、选择题

1.1.（A）**【解析】**有限个无穷小的和、差、积、绝对值还是无穷小.

1.2.（C）**【解析】**对于数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，教材写法一般为：

$$\forall\alpha>0, \exists \text{ 正整数 } N>0, \text{当 } n>N \text{ 时，有 } |a_n-A|<\alpha.$$

这里，α 作为衡量 $|a_n-A|$ 大小的尺度，只需要满足任意小的正数即可，而不必拘泥于表达形式，(A) 中的 2α，(B) 中的 α^2，(D) 中的 $\frac{2}{\alpha}$，均可在 $\alpha>0$ 时，任意小，但(C) 中的 $2^{\alpha}>1$，不可能为任意小，故选(C). 至于对"$n>N$"的其他写法，(A)(B)(C)(D) 均可接受.

1.3.（A）**【解析】**不妨设 $f(x)$ 单调递增，且 $|f(x)|\leqslant M$，对任一点 $x_0\in(a,b)$，当 $x\to x_0^-$ 时，$f(x)$ 随着 x 增加而增加且有上界，故 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 存在；当 $x\to x_0^+$ 时，$f(x)$ 随着 x 减小而减小且有下界，故 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 存在，故 x_0 只能是第一类间断点.

1.4.（C）**【解析】**$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)}-e^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x\left[e^{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}-1\right]}{x^n}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}-1}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^n}=C\neq 0,$$

则 $n=3$ 时，$C=\frac{1}{3}$.

1.5.（A）**【解析】**由泰勒公式知 $\sin ax=ax-\frac{1}{6}a^3x^3+o(x^3)\ (x\to 0)$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-a)x+\frac{1}{6}a^3x^3+o(x^3)}{-bx^3}=1,$$

解得 $a=1$，$-\frac{1}{6b}=1$，即 $a=1$，$b=-\frac{1}{6}$.

1.6.（C）**【解析】**由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3ax^2+b}{(e^{\sin^2 x}-1)\cos x}$，当 $b\neq 0$ 时，该极限为 ∞，于是 $b=0$，从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{3ax^2+b}{(e^{\sin^2 x}-1)\cos x}\xlongequal{\text{等价无穷小代换}}\lim_{x\to 0}\frac{3ax^2}{\sin^2 x}=3a=1\Rightarrow a=\frac{1}{3}.$$

1.7.(D) 【解析】因 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$,故 $k>0$.若 $\lambda>0$,则必存在一个 x 使得 $\lambda-e^{-kx}=0$,即分母为 0,矛盾,故 $\lambda\leqslant 0$.

1.8.(D) 【解析】因为

$$f(x)=\ln\frac{1+x^2}{1+\sin^2 x}=\ln\left(1+\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\right)\sim\frac{x^2-\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\sim x^2-\sin^2 x(x\to 0).$$

又
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^{n-1}}=2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(n-1)x^{n-2}}$$
$$\xlongequal{n=4}2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3},$$

因此 $n=4$.

【注】更希望读者看出:$x^2-\sin^2 x=(x+\sin x)(x-\sin x)\sim 2x\cdot\frac{1}{6}x^3=\frac{1}{3}x^4(x\to 0)$,这样便可直接得出答案.

1.9.(C) 【解析】$f_2(x)=f_1[f_1(x)]=\dfrac{f_1(x)}{\sqrt{1+[f_1(x)]^2}}=\dfrac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$,

设
$$f_k(x)=\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}(k\geqslant 1),$$

则
$$f_{k+1}(x)=f_1[f_k(x)]=\frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}}=\frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}},$$

因此对任意 $n\geqslant 1$,有 $f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$,故选(C).

二、填空题

1.10. 1 【解析】$\lim\limits_{x\to 0^+}e^x(\sin x+\cos x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0^-}(2x+a)=a$.由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,可得
$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=1=\lim_{x\to 0^-}f(x)=a.$$

1.11. $5;\frac{1}{4^5}$ 【解析】原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(1-\frac{3}{x}\right)\left(1-\frac{4}{x}\right)\left(1-\frac{5}{x}\right)}{\left(4-\frac{1}{x}\right)^{\alpha}}x^{5-\alpha}$
$$=4^{-\alpha}\cdot\lim_{x\to\infty}x^{5-\alpha}=\beta>0,$$

所以 $\alpha=5,\beta=\dfrac{1}{4^5}$.

1.12. $-\frac{\sqrt{2}}{6}$ 【解析】$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x})(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}{(x+2)(x-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$
$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\lim_{x\to 1}\frac{2(1-x)}{x-1}=-\frac{\sqrt{2}}{6}.$$

1.13. 2 【解析】$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}=2.$$

1.14. -3 **【解析】**当 $x\to 0$ 时，

$$\ln\frac{1-ax^2}{1+ax^2}=\ln\left(1-\frac{2ax^2}{1+ax^2}\right)\sim-\frac{2ax^2}{1+ax^2}\sim-2ax^2,$$

$$\frac{1}{10\ 000}x^4+\sin^2(\sqrt{6}x)\sim\sin^2(\sqrt{6}x)\sim 6x^2,$$

故 $a=-3$.

1.15. $-\frac{2}{9}$；2 **【解析】**$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\cos\frac{2x}{3}\right)}{Ax^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\cos\frac{2x}{3}-1\right)}{Ax^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos\frac{2x}{3}-1}{Ax^k}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\left(\frac{2x}{3}\right)^2}{2}}{Ax^k}=-\frac{2}{9}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{Ax^k}=1,$$

则 $k=2$，$-\frac{2}{9A}=1$，即 $A=-\frac{2}{9}$.

1.16. $-\frac{1}{32}$；2 **【解析】**当 $x\to\pi$ 时，

$$\sqrt[4]{\sin\frac{x}{2}}-1=\sqrt[4]{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)}-1=\sqrt[4]{1+\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)-1\right]}-1$$

$$\sim\frac{1}{4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)-1\right]$$

$$\sim\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2\right]=-\frac{1}{32}(x-\pi)^2,$$

故 $A=-\frac{1}{32}$，$k=2$.

1.17. $e^{-\pi}$ **【解析】**因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2\mathrm{d}t\xlongequal{\frac{\infty}{\infty}}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2=1$,

所以 原式 $\xlongequal{1^\infty}\exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[\frac{1}{x}\int_0^x\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2\mathrm{d}t-1\right]\right\}=\exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\int_0^x\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2\mathrm{d}t-x\right]\right\}$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to+\infty}\left[\int_0^x\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)^2\mathrm{d}t-\int_0^x\mathrm{d}t\right]\right\}=\exp\left\{\int_0^{+\infty}\frac{-4t^2}{(t^2+1)^2}\mathrm{d}t\right\}$$

$$\xlongequal{t=\tan\theta}\exp\left\{-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\right\}=e^{-\pi}.$$

三、解答题

1.18.【解】因为 $(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}>(3^n)^{\frac{1}{n}}=3$,

又 $(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}<(3\times 3^n)^{\frac{1}{n}}=3\times 3^{\frac{1}{n}}$，$\lim\limits_{n\to\infty}3\times 3^{\frac{1}{n}}=3$,

由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$.

1.19.【解】这是"$\infty-\infty$"型未定式极限，首先通分变成"$\frac{0}{0}$"或"$\frac{\infty}{\infty}$"型未定式，然后使用洛必达法则求极限.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{3xe^x+x^2e^x}{e^x+xe^x-1}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3e^x+5xe^x+x^2e^x}{2e^x+xe^x}=\frac{3}{2},$$

或利用等价无穷小代换 $e^x-1\sim x(x\to0)$，则

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3xe^x+x^2e^x}{2x}=\frac{3}{2}.$$

【注】典型错误：$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{x}-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x+xe^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}(2e^x+xe^x)=2.$

等价无穷小代换只能在乘除运算时使用，不能在加减运算时使用.

1.20.【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n$ 是"1^∞"型未定式极限，可以使用洛必达法则求极限，也可以凑成第二个重要极限，还可以利用等价无穷小代换.

方法一 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left[\frac{x-2ax+1}{x(1-2a)}\right]^x=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left[1+\frac{1}{x(1-2a)}\right]\left(令\frac{1}{x}=t\right)$$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{1-2a}\right)}{t}\xlongequal{洛必达法则}\lim_{t\to0^+}\frac{1}{1+\frac{t}{1-2a}}\cdot\frac{1}{1-2a}=\frac{1}{1-2a}.$$

方法二 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n=\ln\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^n\right\}$

$$=\ln\left\{\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)\cdot\frac{1}{1-2a}}\right\}=\ln e^{\frac{1}{1-2a}}=\frac{1}{1-2a}.$$

方法三 因为 $\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]\sim\frac{1}{n(1-2a)}(n\to\infty)$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}n\frac{1}{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}.$$

1.21.【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x(1-\cos x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x\cdot(1-\cos x)}{x(1-\cos x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}=\frac{1}{2}.$$

1.22.【解】 当 $x=0$ 时，原式 $=1$；

当 $x\neq0$ 时，原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\cdots$$