普通高等教育“十三五”规划教材

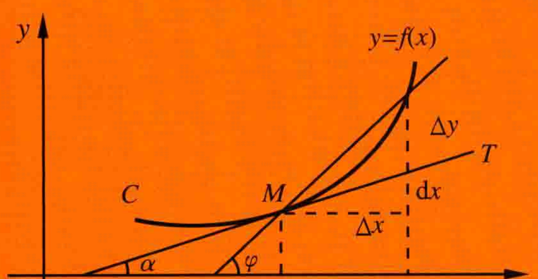
大学数学基础丛书

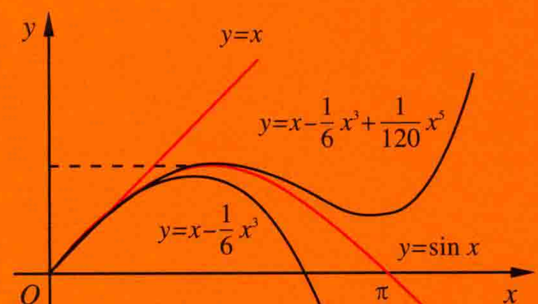
丛书主编 袁学刚 周文书 刘满

高等数学学习指导

（下册）

袁学刚 张友 主编





清华大学出版社

| 大学数学基础丛书 |

高等数学学习指导

（下册）

袁学刚 张 友 主编

清华大学出版社
北 京

内容简介

本书是与高等学校理工科各专业高等数学课程同步的学习指导书，全书分为上、下两册。上册内容包括函数、数列及其极限、函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理及其应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程；下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数。每节包括知识要点、疑难解析、经典题型详解和课后习题选解四个模块。每章的开始列出了本章的基本要求和知识网络图，最后部分是复习题解答和自测题。编写本书的主要目的是为了帮助学生更好地理解“高等数学”课程的内容，掌握课程的基本理论、解题方法及技巧。

本书可以作为高等学校理科、工科和技术学科等非数学专业的高等数学课程的学习指导书，也可作为青年教师的教学参考书和考研学生的复习用书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导.下册/袁学刚，张友主编.—北京：清华大学出版社，2018

(大学数学基础丛书)

ISBN 978-7-302-50925-7

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①袁…②张…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第189218号

责任编辑：刘　颖
封面设计：傅瑞学
责任校对：刘玉霞
责任印制：丛怀宇

出版发行：清华大学出版社

网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者：三河市少明印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：16.75　　**字　　数**：407千字
版　　次：2018年9月第1版　　**印　　次**：2018年9月第1次印刷
定　　价：39.80元

产品编号：077725-01

前言 PREFACE

众所周知，初等数学以常量为研究对象，而高等数学则以变量为研究对象，二者在研究内容、解题方法及技巧上存在许多本质上的差异。对于高等学校的理工科大学生，学习高等数学的重要性是不言而喻的，但要完成从初等数学到高等数学的思维跨越需要一个过程，想学好这门课程并不容易。编者认为，学好高等数学的第一要素是学习并用好“规则”，这些“规则”包括：教材内容涵盖的定义、性质、定理、推论及一些重要的结论等。学习并用好“规则”可分为三个阶段：初级阶段是规范并合理使用“规则”，即能够使用基本概念和基本结论解决一些较为直观的问题；中级阶段是掌握并灵活运用“规则”，随着学习的深入，“规则”越来越多，需要解决的问题亦是如此，此阶段要求学生能够解决具有一定难度的问题；高级阶段是熟知并综合利用“规则”，通过规范的培养训练，使学生能够解决一些启发性和综合性较强的问题。

编写本部学习指导书源于以下两方面的考虑：

一是加强教材内容的认知。目前已出版并正在使用的《高等数学》教材都有各自的特点和优势，但限于篇幅，不可能完全覆盖并诠释每个知识点的内涵和适用范围。想要达到“以人为本、因材施教、夯实基础、创新应用”的指导思想，任重道远。

二是弥补课堂教学的不足。学生在学习高等数学时，课堂教学只是其中的一部分。由于教学时数的限制，导致课堂教学密度大、速度快，多数大一新生不能适应高等数学教学方式和方法，并且许多解题方法与技巧不可能在课堂上得到完整的讲解与演练，当然更谈不上让学生系统掌握这些方法与技巧。

为此，本书对教材的各个知识要点进行了必要的提炼、释疑、分析、串联，目的是帮助初学者理解、熟悉并规范使用“规则”，掌握必要的解题方法与技巧，使其能够对各知识要点有更好的理解和参悟，达到融会贯通的效果，进而提升综合解题能力和自主学习能力。

本部学习指导书的章节与普通高等教育“十三五”规划教材《高等数学》(清华大学出版社，袁学刚和张友主编)同步，与其他版本《高等数学》教材的内容并行，可以作为大一学生的学习指导书，与课堂教学同步使用，也可作为备考硕士研究生的考生进行总结性复习或专题性研究的学习资料。本书各章节的基本框架如下：

知识要点：列出本节必须掌握的知识点，包括定义、性质、定理、推论、一些重要的结论，并配以必要的说明。

疑难解析：根据多年教学的经验，选择一些容易出现理解不到位和混淆的知识点进行解答，帮助读者正确理解并合理使用这些“规则”。

经典题型详解：每节精选了一些基础类、提高类和综合类的经典题型，给出有针对性的分析、归纳和总结，引领读者分析问题的内涵、定位所用的知识点、指出使用的方法和技巧，进而提高读者对相关“规则”的认知能力和综合应用能力。

课后习题选解及复习题解答：针对配套教材的课后习题和复习题中具有一定难度的题目给出了部分解答，更重要的是体现解题的标准步骤和解题的方法及技巧。

自测题：在经典题型和课后习题基础上，精选了一些难度适中及较高的题目，其中包括一些考研真题。

本书由大连民族大学理学院组织编写。袁学刚和张友任主编，负责全书的统稿及定稿。参与编写本书的教师有：谢丛波（第 1 章）、张文正（第 2 章）、董丽（第 3、4 章）、楚振艳（第 5 章）。

感谢大连民族大学各级领导在编写本书时给予的关心和支持。感谢清华大学出版社的刘颖编审在编写本书时给予的具体指导及宝贵建议。本书在编写过程中，参阅了一些同行专家编写的辅导书，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，成书仓促，书中一定存在某些不足或错误，恳请广大同行和读者批评指正。

编　者

2018 年 6 月

目录 CONTENTS

第1章

向量代数与空间解析几何

一、基本要求

1. 理解向量的概念,掌握向量的坐标表示法,会求单位向量、方向余弦、向量在坐标轴上的投影.

2. 会求向量的数量积、向量积和混合积,掌握两向量平行、垂直的条件.

3. 会求平面的点法式方程、一般式方程,会判定两个平面的垂直、平行.

4. 会求直线的对称式方程、参数方程,会判定两条直线是否平行、垂直,会判定直线与平面间的关系(垂直、平行、直线在平面上).

5. 理解二次曲面的方程及其图形.

二、知识网络图

- 空间解析几何与向量代数
  - 向量代数
    - 与向量相关的定义
      - 向量的定义(定义1.1)
      - 向量的模(定义1.2)
      - 向量的夹角(定义1.3)
    - 向量的线性运算
      - 三角形法则(定义1.4)
      - 负向量(定义1.5)
      - 数乘运算(定义1.6)
    - 平行向量(定理1.1)
    - 向量在轴上的投影(定义1.7及性质1、性质2)
    - 向量的坐标表示
    - 向量间的运算
      - 数量积的定义(定义1.8)及坐标表示(定理1.2)
      - 向量积的定义(定义1.9)及坐标表示(定理1.3)
      - 混合积的定义(定义1.10)及坐标表示(定理1.4)
  - 空间平面方程的表示形式:点法式、一般式、截距式
  - 空间直线方程的表示形式:一般式、对称式、参数式、两点式
  - 位置关系
    - 平面与平面(定理1.5、定理1.6)
    - 直线与直线(定理1.7)
    - 直线与平面(定理1.8、定理1.9)
  - 夹角:两个平面、两条直线、直线与平面
  - 有轴平面束(定理1.10)、平行平面束(定理1.11)
  - 曲面方程的表示形式:一般式、参数式
  - 特殊曲面及其方程:母线平行于坐标轴的柱面、旋转曲面、二次曲面
  - 空间曲线方程的表示形式:一般式、参数式
  - 特殊曲线及其方程:在坐标平面上的投影曲线

1.1 空间直角坐标系和向量

一、知识要点

1. 空间直角坐标系

在空间中取一个定点 O,过 O 点作相互垂直的三条数轴.这三条数轴依次被指定为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴),并且规定这三个轴正向的顺序满足**右手法则**,如图 1.1 所示.如此确定的坐标系称为**空间直角坐标系**或笛卡儿**直角坐标系**,按右手法则建立的坐标系称为**右手系**.

点 O 称为**坐标原点**;x 轴、y 轴、z 轴称为**坐标轴**;这三条坐标轴中的每两条坐标轴所确定的平面称为**坐标面**,依次为 xOy 坐标面、yOz 坐标面、zOx 坐标面.三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分称为一个**卦限**,共 8 个卦限,如图 1.2 所示,其中第Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限在 xOy 坐标面上方;第Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限在 xOy 坐标面下方.

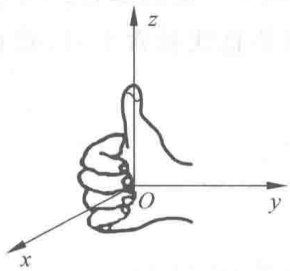


图 1.1

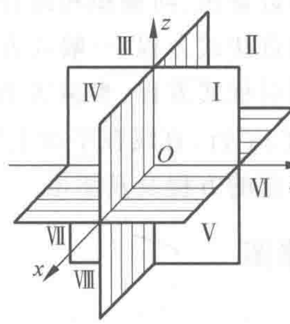


图 1.2

空间中任意一点 P 与三元有序数组(x,y,z)之间存在一一对应关系.有序数组(x,y,z)称为点 P 的**坐标**,记作 $P(x,y,z)$,并依次称 x,y,z 为点 P 的**横坐标**、**纵坐标**和**竖坐标**.由三个坐标轴张成的卦限与坐标轴方向的对应关系、各卦限内点的坐标(x,y,z)的符号见表 1.1.在空间直角坐标系中,一些特殊点的坐标表示汇总为表 1.2.

表 1.1

卦限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x 轴	正半轴	负半轴	负半轴	正半轴	正半轴	负半轴	负半轴	正半轴
y 轴	正半轴	正半轴	负半轴	负半轴	正半轴	正半轴	负半轴	负半轴
z 轴	正半轴	正半轴	正半轴	正半轴	负半轴	负半轴	负半轴	负半轴
坐标符号	(+,+,+)	(−,+,+)	(−,−,+)	(+,−,+)	(+,+,−)	(−,+,−)	(−,−,−)	(+,−,−)

表 1.2

特殊点	坐标原点 O	x 轴	y 轴	z 轴	xOy 坐标面	yOz 坐标面	zOx 坐标面
坐标	$(0,0,0)$	$(x,0,0)$	$(0,y,0)$	$(0,0,z)$	$(x,y,0)$	$(0,y,z)$	$(x,0,z)$

2. 空间中两点间的距离公式

空间中的两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 与 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 间的距离公式为

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1.1}$$

特别地,空间中任意一点 $P(x,y,z)$ 与坐标原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$|OP| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{1.2}$$

3. 向量的概念及其性质

定义 1.1 既有大小又有方向的量称为**向量**或者**矢量**. 如图 1.3 所示,以 A 为起点,B 为终点的向量记作 $\overrightarrow{AB}$. 为简便起见,常用小写的粗体字母表示.

注意,如果两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的大小相等且方向相同,则称这两个向量**相等**,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 进一步地,与起点无关的向量称为**自由向量**,简称**向量**. 由此可知,不论向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的起点是否一致,只要大小相等,方向相同,即为相等的向量,也就是说,一个向量和它经过平行移动(方向不变,起点和终点位置改变)所得的向量都是相等的.

定义 1.2 向量的大小称为向量的**模**,将向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 的模分别记作 $|\overrightarrow{AB}|$ 和 $|\boldsymbol{a}|$. 特别地,模为 1 的向量称为**单位向量**,将向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量分别记作 $\overrightarrow{AB}^\circ$ 和 $\boldsymbol{a}^\circ$. 模为 0 的向量称为**零向量**,记作 $\mathbf{0}$. 注意,零向量没有规定方向,其方向是任意的.

定义 1.3 若将两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 经过平行移动,则它们的起点重合后会形成两个角 θ 和 γ,如图 1.4 所示,不妨设 $\theta\leqslant\gamma$. 将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间所夹的较小的角 θ 定义为**两向量的夹角**,记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$,显然 $\theta\in[0,\pi]$. 特别地,当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时,$\theta=0$;当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时,$\theta=\pi$.

4. 向量的线性运算

定义 1.4 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为两个给定的向量. 任取一点 A,作 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,再以 B 为起点,作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,连结 AC,如图 1.5 所示,则向量 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**,记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 这种求两个向量和的方法称为**三角形法则**.

对于两个不平行的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,将 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的起点移至同一点,以 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线所表示的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,如图 1.6 所示. 这种求和的方法称为**平行四边形法则**.

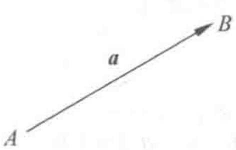


图 1.3

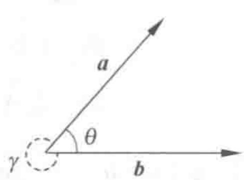


图 1.4

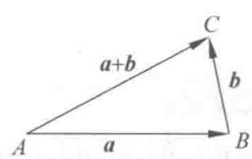


图 1.5

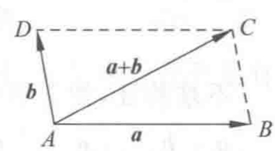


图 1.6

定义 1.5 对于给定的向量 $\boldsymbol{a}$,与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**,记作 $-\boldsymbol{a}$.

两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差(或称**减法**)可以定义为 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$. 如图 1.7 所示,将向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 移至公共的始点 O,且 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$,则有

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}.$$

特别地,当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行时,若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同,

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的长度等于两向量的长度之和；若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 中长度较长的向量的方向相同，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的长度等于两向量长度之差.

定义 1.6 设 $\boldsymbol{a}$ 是一个给定的向量，λ 是一个实数，规定数 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$. 该向量的模为 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$. 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$. 特别地，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的大小是 $\boldsymbol{a}$ 的大小的 λ 倍，方向不变；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的大小是 $\boldsymbol{a}$ 的大小的 $|\lambda|$ 倍，方向相反，如图 1.8 所示.

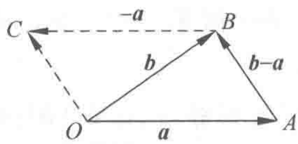


图 1.7

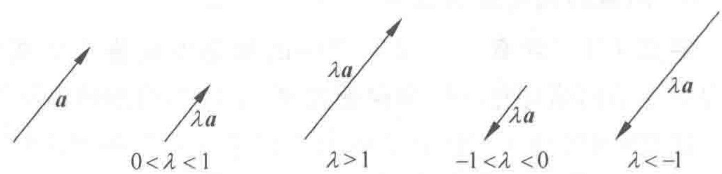


图 1.8

对于任意的实数 λ 和 μ，向量的线性运算满足如下性质：

(i) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(ii) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$（参见图 1.9）；

(iii) 零元素 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$；

(iv) 负元素 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$；

(v) 单位元 $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；

(vi) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(vii) 分配率 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；

(viii) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$（参见图 1.10）.

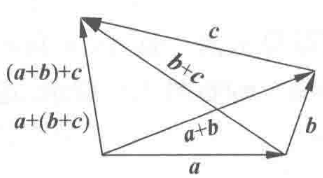


图 1.9

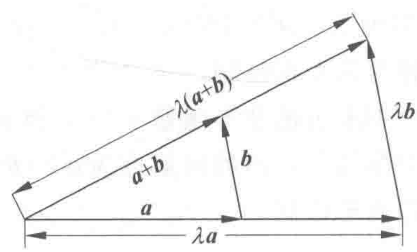


图 1.10

不难验证，如下不等式成立：

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||\leqslant|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量 $\boldsymbol{a}^{\circ}$ 的关系为

$$\boldsymbol{a}^{\circ}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} \text{ 或写成 } \boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}.$$

5. 向量的共线与共面

对于两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，如果它们的方向相同或相反，则称这两个向量**平行**，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 因为零向量的方向是任意的，所以认为零向量平行于任何向量. 若将两个平行向量的起点放在同一点，它们的终点和公共起点将在同一条直线上，所以两个向量平行也称为两向

量共线.

定理 1.1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,那么向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一实数 λ,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

对于 $k(k\geqslant 3)$ 个向量,当把它们的起点放在同一点时,如果这 k 个向量的终点和它们的公共起点在一个平面内,则称这 k 个向量**共面**.

6. 向量在轴上的投影

定义 1.7 设有一个数轴 u,它由单位向量 $\boldsymbol{e}$ 及定点 O 确定,如图 1.11 所示. 对任给的向量 $\boldsymbol{a}$,作 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$,并由点 P 作与 u 轴垂直的平面交 u 轴于点 P',则称点 P' 为点 P 在 u 轴上的**投影**,向量 $\overrightarrow{OP'}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的分向量. 设 $\overrightarrow{OP'}=\lambda\boldsymbol{e}$,则数 λ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的投影,记作 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$ 或 $(\boldsymbol{a}_u)$.

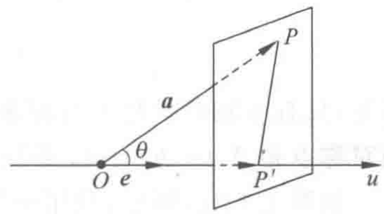


图 1.11

向量及其线性运算在轴上的投影具有如下性质：

性质 1 设 u 轴与向量 $\boldsymbol{a}$ 的夹角为 θ,如图 1.11 所示,则向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的投影等于向量 $\boldsymbol{a}$ 的模乘以 $\cos\theta$,即 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$.

性质 2 (1) $\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}$；(2) $\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$($\lambda$ 为任意实数). 两个运算的图示分别如图 1.12(a)和图 1.12(b)所示.

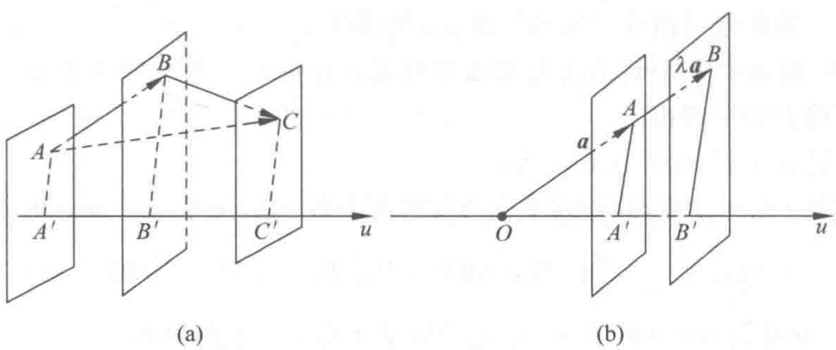


图 1.12

二、疑难解析

1. 在空间直角坐标系中,某一点关于原点、坐标面及坐标轴对称的点特征分别是什么？如何确定对称点？

答 如图 1.13(a)所示,对于给定的点 $A(a,b,c)$,它关于原点对称的点的特征是：这两个点到原点的距离相等,且到坐标轴的距离相等,到坐标平面的距离也相等；如图 1.13(b)所示,点 A 关于某一坐标面对称的点的特征是：这两个点到该坐标平面的距离相等；如图 1.13(c)所示,点 A 关于某一坐标轴对称的点的特征是：这两个点到该坐标轴的距离相等.

如图 1.13(a)所示,利用全等三角形原理,不难验证,点 $A(a,b,c)$ 关于坐标原点的对称点是 $A_1(-a,-b,-c)$.

如图 1.13(b)所示,若求点 $A(a,b,c)$ 关于 zOx 面的对称点,则点 A 在 zOx 面上的坐标

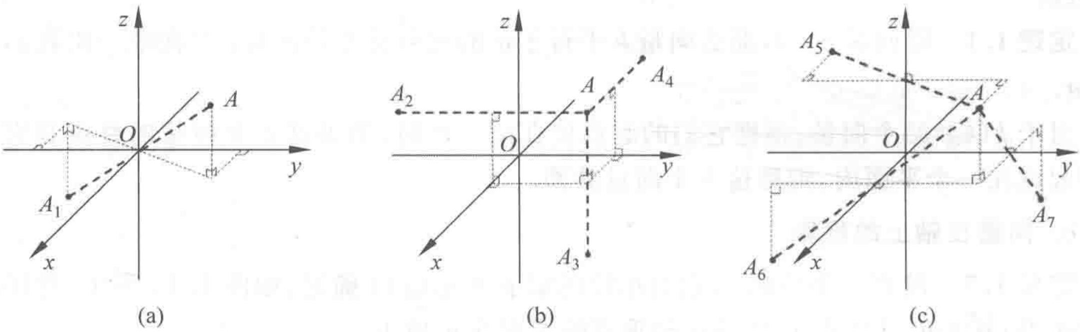


图 1.13

不变,只有 y 轴的坐标变为原来的相反数,因此 $A_2(a,-b,c)$ 即为所求;类似地,关于 xOy 面的对称点是 $A_3(a,b,-c)$;关于 yOz 面的对称点是 $A_4(-a,b,c)$.

如图 1.13(c)所示,利用全等三角形原理,不难验证,点 $A(a,b,c)$ 关于 z 轴的对称点是 $A_5(-a,-b,c)$;关于 x 轴的对称点是 $A_6(a,-b,-c)$; 关于 y 轴的对称点是 $A_7(-a,b,-c)$.

2. 向量的模和实数的绝对值有何联系和区别?

答 易见,模和绝对值所指的对象是不一样的.对于向量而言,它的模指的是向量的长度,是一个非负实数;实数的绝对值是一个非负实数.在几何上,实数的绝对值表示数轴上的点到原点的距离.若将向量的起点移至原点,则向量的模亦为终点到原点的距离.因此,向量的模可认为是实数的绝对值在二维和三维空间的推广.

3. 说法"向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是: 存在不全为零的两个数 α,β,使得 $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$"是否正确? 说明理由.

答 这个说法是正确的.这是因为:

若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 共线,故存在不全为零的两个数 α,β,使得 $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

反之,若 $\beta\neq0$,则有 $\boldsymbol{b}=-\dfrac{\alpha}{\beta}\boldsymbol{a}$.当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时,由定理 1.1 知,$-\dfrac{\alpha}{\beta}$ 即为 λ,故 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$;当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时,由 $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 可知,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 或者 $\beta=0$,此时向量 $\boldsymbol{a}$ 均平行于向量 $\boldsymbol{b}$.

因此,定理 1.1 的另一种等价说法是:向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是存在不全为零的两个数 α,β,使得 $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

三、课后习题选解(习题 1.1)

A类题

1. 在空间直角坐标系中,指出下列各点所在的卦限.

(1)$(1,-5,3)$; (2) $(2,4,-1)$; (3)$(1,-5,-6)$; (4) $(-1,-2,1)$.

分析 对照表 1.1 进行定位.

解 (1) 第Ⅳ卦限; (2) 第Ⅴ卦限; (3) 第Ⅷ卦限; (4) 第Ⅲ卦限.

2. 求点 $M(3,-5,4)$ 与原点及各坐标轴之间的距离.

分析 根据要求,利用两点间距离公式及勾股定理计算.

解 如图 1.14 所示,容易求得,

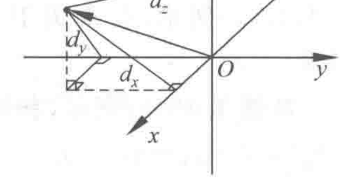


图 1.14

$$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{3^2+(-5)^2+4^2}=5\sqrt{2}.$$

故点 M 到 x,y,z 轴的距离分别为

$$d_x=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-3^2}=\sqrt{41};\quad d_y=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-(-5)^2}=5;\quad d_z=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-4^2}=\sqrt{34}.$$

或用如下方法计算可得：

$$d_x=\sqrt{(-5)^2+4^2}=\sqrt{41};\quad d_y=\sqrt{3^2+4^2}=5;\quad d_z=\sqrt{3^2+(-5)^2}=\sqrt{34}.$$

3. 在 x 轴上，求与点 $A(-4,1,7)$ 和点 $B(3,5,-2)$ 等距离的点的坐标.

分析 先依题意设出所求点的坐标，然后利用两点间的距离公式计算.

解 设所求点 P 坐标为 $(x,0,0)$，因为 $|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|$，所以

$$\sqrt{(-4-x)^2+(1)^2+(7)^2}=\sqrt{(3-x)^2+(5)^2+(-2)^2},$$

两边平方得 $x=-2$，故所求点 P 为 $(-2,0,0)$.

4. 在 yOz 坐标面上，求与三个点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$，$C(0,5,-1)$ 等距离的点的坐标.

分析 先依题意设出所求点的坐标，然后利用两点间的距离公式计算.

解 设所求点为 P，其坐标为 $(0,y,z)$，按题意有 $|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|$，所以

$$\begin{cases}3^2+(1-y)^2+(2-z)^2=0^2+(5-y)^2+(-1-z)^2,\\ 4^2+(-2-y)^2+(-2-z)^2=0^2+(5-y)^2+(-1-z)^2,\end{cases}$$

即 $\begin{cases}8y-6z=12,\\ 14y+2z=2.\end{cases}$ 解得 $y=\dfrac{9}{25}$，$z=-\dfrac{38}{25}$. 故所求点 P 的坐标为 $\left(0,\dfrac{9}{25},-\dfrac{38}{25}\right)$.

5. 已知菱形 $ABCD$ 的对角线 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DA}$.

分析 如图 1.15 所示，由于 $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$，可以先利用平行四边形法则建立方程组，然后求解方程组得到所求向量.

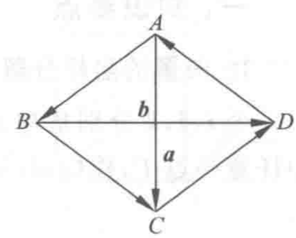


图 1.15

解 由菱形的性质可知：$\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}$. 因为

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a},\\ \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b},\end{cases}\quad 即\begin{cases}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a},\\ \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}.\end{cases}$$

解得

$$\overrightarrow{AB}=\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2},\quad \overrightarrow{BC}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2},\quad \overrightarrow{CD}=\frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{2},\quad \overrightarrow{DA}=-\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}.$$

B 类题

1. 证明：以 $A(4,3,1)$，$B(7,1,2)$，$C(5,2,3)$ 三点为顶点的三角形是等腰三角形.

分析 利用两点间距离公式分别求出三条边的长度即可.

证 因为

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(7-4)^2+(1-3)^2+(2-1)^2}=\sqrt{14},\quad |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(5-4)^2+(2-3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{6},$$

$$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(5-7)^2+(2-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{6},$$

易见，$|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$，结论得证. **证毕**

2. 利用向量证明：

(1) 对角线互相平分的四边形是平行四边形.

(2) 三角形两边的中点的连线平行于底边，并且其长度等于第三边的一半.

分析 根据要求，利用向量的线性运算证明.

证 (1) 如图 1.16(a)所示，已知四边形 $ABCD$ 的对角线向量为 $\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{DB}$，且 $\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$. 问题转化为，已知：$\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OC}$. 求证：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

因为