数理逻辑是什么

What Is Mathematical Logic?

【英】John N. Crossley 等 著

夏素敏 闫佳亮 译

中国轻工业出版社 | 全国百佳图书出版单位

What Is Mathematical Logic?

数理逻辑是什么

【英】John N. Crossley 等 著

夏素敏 闫佳亮 译

中国轻工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

数理逻辑是什么／（英）约翰·N.克罗斯利（John N. Crossley）等著；夏素敏，闫佳亮译．—北京：中国轻工业出版社，2018.12

ISBN 978-7-5184-2095-7

Ⅰ．①数… Ⅱ．①约… ②夏… ③闫… Ⅲ．①数理逻辑－普及读物 Ⅳ．①O141-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2018)第208656号

总 策 划：石　铁

策划编辑：孔胜楠　　　　责任终审：张乃柬

责任编辑：孔胜楠　　　　责任监印：刘志颖

出版发行：中国轻工业出版社（北京东长安街6号，邮编：100740）

印　　刷：三河市鑫金马印装有限公司

经　　销：各地新华书店

版　　次：2018年12月第1版第1次印刷

开　　本：880 × 1230　1/32　印张：5.375

字　　数：65千字

书　　号：ISBN 978-7-5184-2095-7　定价：32.00元

读者服务部邮购热线电话：010-65125990，65262933　传真：010-65181109

发行电话：010-85119832　传真：010-85113293

网　　址：http://www.wqedu.com

电子信箱：1012305542@qq.com

如发现图书残缺请直接与我社读者服务部（邮购）联系调换

180636Y1X101ZYW

译 者 序

这是一本“小书”，章节不多，篇幅很短。正如本书前言中提到的，几位作者希望能通过这本“小书”向读者介绍数理逻辑中最为重要的那些部分，展示数理逻辑的精彩和活力。这看似简单，实际上很不容易做到，既要考虑内容的选择，又要完善讲解的方式。

本书主体部分共六章，分别介绍了逻辑学发展史概况、谓词演算的完全性、模型论、图灵机与递归函数、哥德尔不完全性定理以及集合论。第一章“历史概览”展示了逻辑学学科的发展史，并将全书选取的几个重点关联在一起，给读者一个整体认知。第二章介绍“谓词演算的完全性”。谓词逻辑是数理逻辑的基本组成部分，完全性是形式系统研究中一个不可或缺

的性质，我们希望可以在谓词逻辑系统中得到所有的普遍有效式。实际上，完全性定理带给我们的比期望的还要多。第三章“模型论”从句法研究转入语义研究，讨论了三个独立的主题：带等词的谓词演算、紧致性定理和洛温海姆-斯科伦定理。第四章“图灵机与递归函数”的主线是，在尝试定义可计算性的过程中却导致了计算不可解问题。由于谓词演算的普遍表达力，这个问题就被转化到逻辑中，也因此导致了逻辑有效性问题的广义不可解性。第五章“哥德尔不完全性定理”从希尔伯特纲领引入，指出简单的形式算术就已经把“寻找含且仅含真算术命题的形式系统”的希望打碎了。而后给出了哥德尔不完全性定理的证明思路，这个定理就是要找到那个“真但不可证的公式”。第六章“集合论”采用了尽量非形式的方式给出公理化集合论中的基本概念、公理以及遇到的问题。

数理逻辑是一门充满活力的基础学科，各个领域的人们都越来越认识到其重要性。但不可否认，很多人仍然认为数理逻辑太难懂，并且不知如何运用。本书选择的几个主题都是数理逻辑研究中极为重要的部分，这几部分串在一起便回答了“数理逻辑是什么”的问题。对于关注数理逻辑但并不具备数理基础的读者来说，能够起到点拨和指引作用。同样不可否认的是，在这样简短的篇幅内，想要真正达到作者们的既定目标相

当困难，特别是对于没有数学训练基础的读者，要真正把握书中的方方面面仍然是有难度的。所以，作者也说，要想深入了解数理逻辑的细节，还需学习一门专业的课程以补充本书所省略的部分。希望这本“小书”能激发更多的人去寻求对数理逻辑的更深了解。

本书原版出版于1972年，问世之初，得到了当时许多逻辑学家的肯定和好评。主要作者约翰·N. 克罗斯利（John N. Crossley）是一位声望很高的逻辑学家。全书基于几位作者不同时期在莫纳什大学和墨尔本大学报告过的讲稿逐渐演化而来，曾经得到听众的广泛欢迎。但也正是因为由讲稿汇集和整理而成，本书不可避免地尚存一些问题。实际上，对于原著也存在一些批评之声，认为作者们并未达成最初的目标，或者说写得并没有那么“通俗易懂”。同时也指出，这些批评与本书整体计划的性质无关。作为逻辑学者，向更多的读者讲清楚“数理逻辑是什么”不仅是必要的工作，而且是艰巨的任务。

本书的翻译由夏素敏和闫佳亮共同完成，前者负责前言、第一章、第四章和第五章，后者负责第二章、第三章和第六章以及推荐读物和索引部分。闫佳亮进行了全书的整理和统稿，夏素敏对全书进行了校对。对于本书的翻译完成，还要特别感谢中国社会科学院刘新文研究员提供的原始资料和具体指导，

感谢南京大学张建军教授的有益建议，感谢中国人民大学余俊伟教授提出的重要意见。

虽是“小书”，但翻译起来也并非易事，其中肯定还存在一些问题和失误，期待各位读者给予批评指正。

译者
2018 年 8 月

前　　言

本书是以克里斯·布里克希尔（Chris Brickhill）和约翰·N.克罗斯利构想出来的讲稿为基础形成的。我们的目的在于介绍现代数理逻辑中非常重要的思想，而略去那些具体的数学细节，后者是进行逻辑专业研究时才需要的。这些讲稿于1971年秋、冬分别在莫纳什（Monash）大学和墨尔本（Melbourne）大学的讲座中报告过，它们得到了听众的广泛欢迎，这也促使我们写成了这本书，我们希望本书能够让没有受过数学训练的人们也能了解到数理逻辑中精彩的方方面面。

值得多说两句的是，我们自己在讲授过程中获益良多，听众的反馈也超出了我们的想象。十分感谢莫纳什大学的约翰·麦吉里（John McGechie）副教授和墨尔本大学的道格拉斯·加斯金（Douglas Gasking）教授在这一过程中所给予我们

的大力支持，也非常感谢丹尼斯·鲁宾逊（Dennis Robinson）和特里·贝姆（Terry Boehm）对克里斯·布里克希尔在准备这些讲稿时所提供的帮助。最后，我们感谢安妮-玛丽·范登堡（Anne-Marie Vandenberg），她专业的打字工作使本书顺利面世。

约翰·N. 克罗斯利

于澳大利亚艾尔斯岩

1971 年 8 月

目　录

引　论

数理逻辑是一门充满活力的学科，我们希望这本有点与众不同的书可以向读者传达这一点。原初的讲稿是由四位作者分别写成的，但经过多次修改之后，现已融为一体。

我们希望并相信，任何一个读者将来只要再修一门系统的逻辑课程，就能把书中所给的证明纲要的细节补充完整。

尽管第二章、第三章的一些术语在第五章、第六章也会用到，但本书各章在诸多方面都是相互独立的，因此，我们建议，如果你对某一章感到很难理解，那么请暂时跳过这一章，直接看下一章，然后在需要的时候再返回查看。这样一来，你或许会发现原来遇到的困难已经很自然地被化解了。

第一章

历史概览

在错综复杂的逻辑发展史中，既出现过大量难题，也出现过许多新突破，从而使逻辑发展出不同的领域。因此，在第一章中，我们先来描绘一个流程图。简便起见，我们暂不区分各种领域，当你发现一些奇怪的术语时，不用着急——本书后面将给出它的解释。

在我们看来，逻辑史有两条历史悠久的源流：一条是形式推演的发展，毋庸置疑，这可以追溯到亚里士多德、欧几里得以及那个时代的其他一些人。另一条是数学分析的演变，也可以追溯到与上述人物同一时代的阿基米德。这两条源流各自独立地发展了很长时间——直到大约 1600—1700 年间，也就是说，直到牛顿（Newton）和莱布尼茨（Leibnitz）发明了微积分，才终于将数学和逻辑引到了一起。

这两条源流从 19 世纪开始趋于汇合，我们就说大致是在 1850 年前后吧。当此之时，逻辑学家布尔（Boole）和弗雷格（Frege）等尝试为“形式推演实际上是什么”给出一个最终的、明确的答案。虽然亚里士多德曾给出过相当细致的推演规则，但只是用自然语言表述的。而布尔希望推进这项工作，进

而建立了一个纯粹的符号系统；弗雷格则更进一步，建立了谓词演算，这对于所有今日之所谓的数学来说已经是足够的逻辑基础了。对此，或许我们还可以再细说几句，毕竟自此之后，符号的使用变得极其重要。为了更好地理解，我们先简单描述一下符号的使用是怎么一回事。

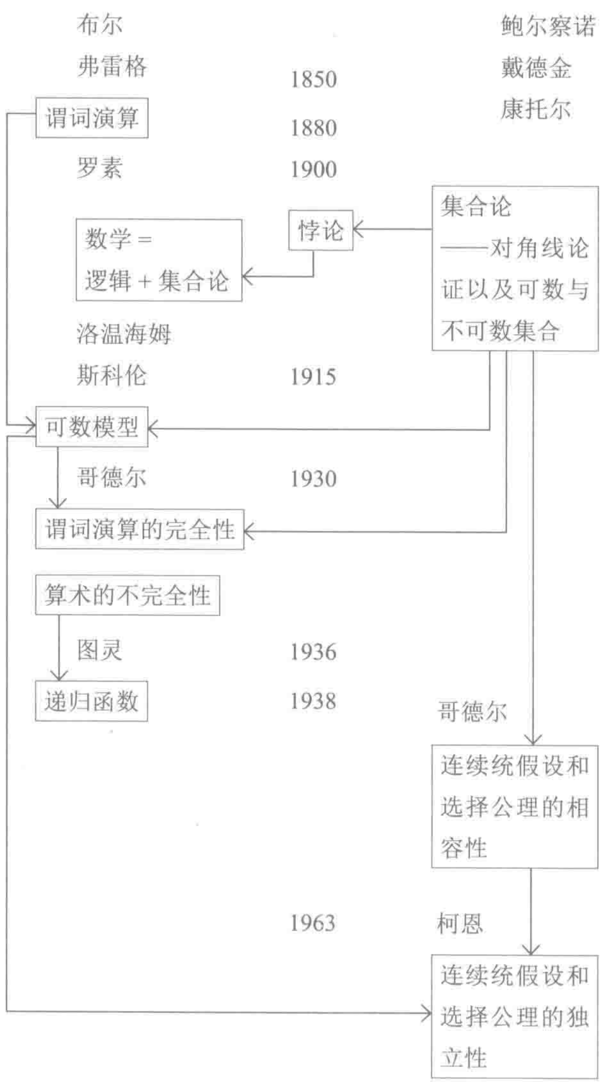
纯逻辑联结词（connectives），如“并且”“或者”“并非”分别记为：&、$\vee$、$\neg$；另外，我们需要用一些符号（symbol，如 x、y、z 等）来表示变项，用符号 P、Q、R 等表示谓词（或者说性质、关系）。用这些符号可以构造出公式，如 $P(x) \vee Q(x)$，这个公式是说 x 具有性质 P 或者 x 具有性质 Q，而这一公式又可以用 $\forall x$ 以及 $\exists x$ 来进行量化，前者表示“对于所有 x”，后者表示“存在一个 x”。这样，$\forall x\, P(x)$ 说的就是每一个 x 都具有性质 P。

现在，只要选择恰当的谓词符号，任何数学领域都可以翻译到这一语言中来，如算术（arithmetic）。我们可以表达作为变项所指对象的数字，还可以表达数字间各种各样的性质，比如，两个数之间的相等、第三个数是前两个数的和等关系。如此一来，很快你就能说服自己相信数论中我们耳熟能详的那些命题都可以用这些谓词写出来，比如整除、素数或者一个数是否另外两数之和等。弗雷格给出了在这一语言中进行推演的规则，将上述所有要素结合在一起，得到的便是谓词演算

(predicate calculus)。

与此同时，牛顿在研究中引入了两个概念——导数 (derivative) 和积分 (integral)，而后，人们对这两个概念的意义进行了长达两个世纪之久的争论，原因就在于他谈到了无穷小 (infinitesimals)。许许多多的人并不相信牛顿的这些理论，认为它们是矛盾的。诚然，它们之间确实存有相悖的地方。但即便如此，牛顿还是得到了正确的结论，并且为了找寻得出正确结论的原因，他廓清了这些概念。这要归功于鲍尔察诺 (Bolzano)、戴德金 (Dedekind) 以及康托尔 (Cantor)。(这就把我们引到了 1880 年左右。) 他们认识到，为了恰当地处理导数和积分，必须考虑、而且必须精确地考虑无穷集合。想回避无穷集合是不可能的。这就是集合论的起源。

值得指出的是，康托尔是为了解决某个分析 (analysis) 中的问题而进入集合论的，而不是为了定义自然数 (natural number) 或者当时人们使用集合论来做的任何其他事情。他最初的动机是分析无穷的实数集合，我们认为，这才是集合论的真正领域：解决无穷集合这一类的问题而非几个初始概念的定义问题。这个问题是可以解决的，并且已经被弗雷格解决了 (但事实上是以一种不相容的方式做到的，只不过其中的不相容是后来由罗素指出的)。罗素那时候专注于“数学不过就是逻辑学”这一命题。逻辑之于罗素意味着很多，比我们今天能


布尔
弗雷格
1850
鲍尔察诺
戴德金
康托尔
谓词演算
1880
罗素
1900
集合论
——对角线论证以及可数与不可数集合
悖论
数学＝逻辑＋集合论
洛温海姆
斯科伦
1915
可数模型
哥德尔
1930
谓词演算的完全性
算术的不完全性
图灵
1936
递归函数
1938
哥德尔
连续统假设和选择公理的相容性
1963
柯恩
连续统假设和选择公理的独立性