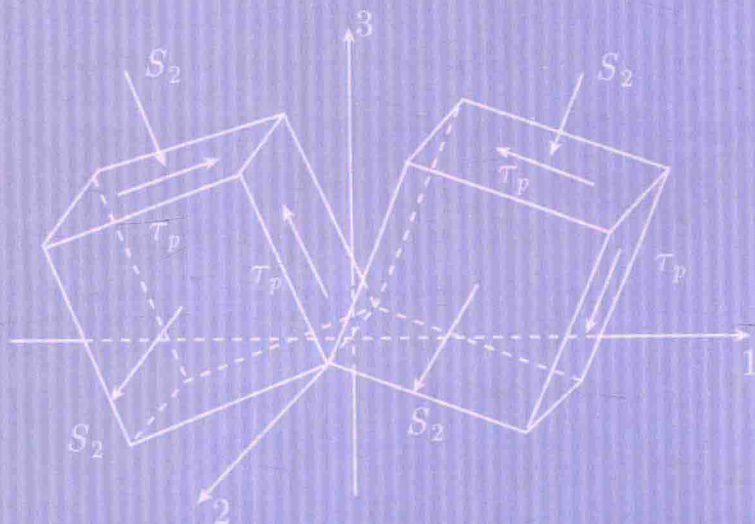


高万章 著

强度和塑性理论新探



科学出版社

强度和塑性理论新探

高万章 著



科学出版社

北京

内 容 简 介

原有的强度理论和塑性理论,是在未搞清材料的破坏和塑性变形机理的情况下,以假设为前提建立的.本书导出了应力、应变张量的三维正交分量,建立了应力、应变空间的三维正交坐标系和正交胡克定律,搞清了材料产生塑性变形和破坏的机理.在此基础上建立了强度理论和塑性理论的全新理论体系,并为建立固体力学的新的理论体系奠定了坚实的基础.

本书可供高等院校力学及相关专业的高年级本科生、研究生、教师以及科研人员和工程技术人员参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

强度和塑性理论新探/高万章著. —北京:科学出版社,2018.7

ISBN 978-7-03-058167-9

I. ①强… II. ①高… III. ①强度理论②塑性理论 IV. ①O34

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 139235 号

责任编辑:刘信力/责任校对:樊雅琼

责任印制:张 伟/封面设计:王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京建宏印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018年7月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2018年7月第一次印刷 印张: 8 3/4

字数: 120 000

定价: **68.00 元**

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

在土木工程、机械工程、化工机械、海洋工程、原子能工程,以及空间技术等领域中,都必须使用各种相同或不同的工程材料.既保证安全又尽可能地节省工程材料,合理地进行设计,有效地发挥工程材料的作用,是工程技术人员和科学技术工作者不可推卸的责任.为此,我们必须对各种工程材料的受力、变形和强度规律进行深入细致的分析和研究.

工程材料的强度问题是由 Galileo 在 1638 年提出的,380 年来,对这一问题的研究已经取得了很大的进展,形成了材料力学、结构力学、弹性力学、强度理论、塑性理论、断裂力学……以及以光测、电测等各种实验手段为基础的实验力学等固体力学的多个分支学科;解决了细长受力杆件及杆系在拉、压、剪、扭、弯受力情况下在弹性变形阶段的应力和变形计算;提出了较规则形状物体应力和变形计算的弹性力学方法;对一点处的应力和应变状态进行了分析,从而找到了随截面方向变化而变化的各应力和应变分量的变化规律,并求出了应力和应变的主分量(即主应力和主应变),提出了应力和应变张量的球张量和偏张量的概念;建立了在弹性变形阶段描述应力和应变间关系的广义胡克定律.

1773 年 Coulomb 以最大剪应力为判据,提出了适用于岩土材料的最大剪应力屈服条件,并建立了最大剪应力强度准则(即第三强度理论).后来 Tresca 又推广到金属材料.因此,人们又把最大剪应力屈服条件称为 Tresca 屈服条件.1913 年 Mises 又以八面体剪应力或形状改变比能为判据提出了 Mises 屈服条件,并在此基础上建立了形状改变比能强度准则(即第四强度理论).从 1773 年开始,在近 250 年

的时间中, 以最大剪应力强度准则 (第三强度理论) 和形状改变比能强度准则 (第四强度理论) 为核心内容, 以 Tresca 屈服条件和 Mises 屈服条件为基础, 分别建立了强度理论和塑性理论这两个固体力学的分支学科. 事实上, 这里所说的强度理论和塑性理论这两个分支学科, 是在未搞清材料的塑性变形和破坏机理的情况下, 以假设的判据为前提建立的. 它们是无源之水、无本之木. 不但其理论结果和实验数据存在差距, 而且这些理论本身也形不成逻辑推理的理论链条.

本书从应力、应变状态分析入手, 在已经把应力、应变张量分解为球张量和偏张量的基础上, 又用不同的方法把应力和应变偏张量进行变换, 不仅得到了一对孪生纯剪切单元体, 而且得到了应力偏张量和应变偏张量的两个正交分量, 从而得到了应力和应变张量的三个正交分量 σ_m, τ_p, S_2 和 $\varepsilon_m, \gamma_p, \gamma_2$. 其中 τ_p, S_2 和 γ_p, γ_2 位于偏平面上, 成相互垂直关系. 这样, 从几何意义上讲, σ_m, τ_p, S_2 和 $\varepsilon_m, \gamma_p, \gamma_2$ 就分别构成了应力空间和应变空间的三维正交坐标系. 应力、应变张量的简化和三维正交系的建立给我们处理应力和应变问题带来了极大的便利. 从数学角度讲, 我们找到了对称二阶张量的三维正交分量也是一个重大的突破. 三个正交应力分量 σ_m, τ_p, S_2 和三个正交应变分量 $\varepsilon_m, \gamma_p, \gamma_2$ 之间成一一对应的线性关系, 我们把这种应力应变关系称为正交胡克定律. 有了正交胡克定律, 就使得在应力和应变之间相互转换的计算变得更加简便. 借助正交胡克定律, 预计在求解应力的计算中将可以同时使用应力边界条件和应变边界条件, 它将使求解应力的问题变得更准确和更简便. 在主轴空间 (也就是介质空间), τ_p 和 S_2 分别是两组平面纯剪切应力, 它们所在的平面相互垂直. 除相互间的间接影响外, 它们对材料的作用是相互独立的. 因为它们之间的数值关系为 $\tau_p \geq \sqrt{2}|S_2|$, 当应力随载荷增大而增大, 达到某一定值时, 材料首先在沿 τ_p 作用线方向开始产生滑移, 这就是第一屈服极限 (在旧理论中, 与之对应的点称为屈服极限), 此时开始的塑性变形阶段称之

为第一塑性变形阶段. 根据 τ_p 的方向建立的滑移线方程在各种应力状态下都和实验结果是完全一致的, 使材料两部分间相对滑移产生的机理这个历史难题得到了解决. 对于塑性性能比较好的材料 (例如低碳钢), 当随着塑性变形强化使应力继续增大到某一定值时, 沿 S_2 的作用线方向也开始产生滑移, 这时材料开始进入第二塑性变形阶段, 我们把它称为第二屈服极限. 对于塑性性能较好的材料, 在某些应力状态下, 进入第二塑性变形阶段导致了材料的失稳. 这时, 第二屈服极限也就是这种材料在这种应力状态下的强度极限. 在这里, 我们彻底搞清了材料在外力作用下产生塑性变形和破坏的机理. 由于搞清了材料在外力作用下产生塑性变形和破坏的机理, 从而建立了与实验结果完全一致的、按形式逻辑推理形成完整的理论链条的、自洽的全新的强度理论和塑性理论的理论体系. 改写了自 1773 年以来在近 250 年中形成的强度理论和塑性理论的历史.

应力、应变和应力应变关系分析是固体力学的基础. 应力、应变的三个正交分量, 应力、应变空间的三维正交坐标系、正交胡克定律, 以及由此衍生出来的其他新概念, 对固体力学中以此为基础的相关内容, 也必将产生深远影响、使固体力学的相关内容得到新的发展.

本书是在作者于 2013 年 3 月出版的《强度和塑性分析》一书的基础上修订而成的. 一是对原书中的强度和塑性分析部分进行修订, 使之更加合理和完善. 二是对第五章的新旧理论的比较部分进行了重新编写, 使两者的差别更加突出和分明.

在本书内容的研究、编写及本书的出版过程中, 得到了王泽荣女士的大力协助, 在此谨致谢意.

作 者

2018 年 4 月

目 录

前言

第一章 应力分析	1
1.1 对可变形固体的基本假设	1
1.2 力、内力和应力的概念	2
1.3 一点处应力状态的描述	7
1.4 主应力与主方向	11
1.5 应力圆	15
1.6 应力张量的正交分解 —— 应力球张量与应力偏张量	19
1.7 应力偏张量的正交分解 —— 孪生纯剪切单元体	23
1.8 应力偏张量的正交分解 —— 应力圆法	29
1.9 应力偏张量的形式参数	34
1.10 应力偏张量的纯剪切面分析	36
第二章 应变分析	41
2.1 位移、变形与应变的概念	41
2.2 平面状态下一点处应变状态的描述	49
2.3 主应变与主应变方向	53
2.4 应变圆	55
2.5 应变张量的正交分解	57
第三章 应力应变关系	62
3.1 广义胡克定律	62
3.2 弹性常数	63
3.3 工程上常用的广义胡克定律	67

3.4	正交胡克定律	69
第四章	塑性变形分析	75
4.1	滑移线系	75
4.2	变形曲线及其简化	79
4.3	塑性变形强化	83
4.4	第一屈服面表达式	87
4.5	强度条件	97
4.6	比例强化模型和相似曲线假设	100
4.7	等加载面和等塑性变形面	104
4.8	第一塑性变形阶段的本构关系	108
4.9	第二塑性变形阶段 —— 拉伸失稳	113
4.10	关于屈服面的形状	119
第五章	新旧理论的比较	121
5.1	最大剪应力判据存在的问题	121
5.2	八面体剪应力判据存在的问题	123
5.3	新理论是完美的理论	126
5.4	新理论中的新概念 —— 对新理论的展望	127
	参考文献	131

第一章 应力分析

1.1 对可变形固体的基本假设

在对可变形固体的力学研究中, 作为介质, 我们假设它是由连续分布的物质所构成的一个整体, 并假设固体中任何一个小的微粒都具有相同的力学性质, 也就是说介质的材料是均匀的. 因此, 在外力作用下, 物体内部各点的应力、应变和位移都可以看作是物体各点的坐标的连续函数, 而且这些函数是光滑可微的. 严格来说, 这种对物体性质和结构的假设, 与真实情况是不一致的. 因为自然界中所有真实物体从微观意义上来看都是各不相同的. 有些材料由结晶的晶粒聚合而成 (如各种金属材料), 有些材料则是由各种颗粒聚合而成 (如某些岩土材料), 有些材料可能有非同类的杂质存在其中. 这些微观的缺欠和不均匀性, 都可能导致应力场、应变场和位移场在物体内部局部的扰动. 然而, 根据统计学的定律, 可以认为真实物体中各点的应力、应变和位移与连续、均匀化模型内对应点的实际情况是一致的. 缺欠的相对尺寸越小, 这种一致性就越好. 我们把受力物体看作连续均匀体对其力学性能进行研究, 这种方法是可取的.

按照各向同性的假设, 我们所研究的物体在任何方向都具有相同的性质. 实际上只有非晶形结构的物体才可能是各向同性的, 很多结晶形结构材料, 从微观上看, 都具有显著的结构性. 但从宏观上看, 把它视为各向同性的材料, 因为晶粒的相对尺寸很小, 所引起的误差是有限的. 但对于宏观上具有明显结构性的材料, 例如木材、铸造钢材和某些薄钢板等材料, 则因其在不同方向上机械性能的明显差异而进行专门研究.

我们假定外荷载引起的变形与物体的尺寸相比是比较小的, 所以较高数量级的位移可以略去不计.

1.2 力、内力和应力的概念

作用在物体上的力可分为表面力和体积力两种, 分别简称为面力和体力.

面力指的是作用在物体表面上的力, 如固体间的接触力、风力、液体压力等. 物体上各点受的面力一般是不同的. 为表明物体表面一点 P 所受的面力大小和方向, 在 P 点的邻域取一包含 P 点在内的微小面积元素 ΔA (图 1-1), 设 ΔA 上的面力为 $\Delta \mathbf{T}$, 则面力的平均集度为 $\Delta \mathbf{T}/\Delta A$, 如将 ΔA 不断缩小, 则 $\Delta \mathbf{T}$ 和 $\Delta \mathbf{T}/\Delta A$ 都将不断地改变其大小、方向和作用点. 如令 ΔA 无限缩小而趋于 P 点, 则 $\Delta \mathbf{T}/\Delta A$ 将趋于一定的极限值 $\mathbf{T}$, 即

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{T}}{\Delta A} = \mathbf{T} \quad (1-1)$$

这个极限矢量 $\mathbf{T}$ 就是 P 点面力的集度. 由于 ΔA 是标量, 因而矢量 $\mathbf{T}$ 的方向应与 ΔA 趋于 0 时 $\Delta \mathbf{T}$ 的方向相同. $\mathbf{T}$ 在坐标轴 x, y, z 方

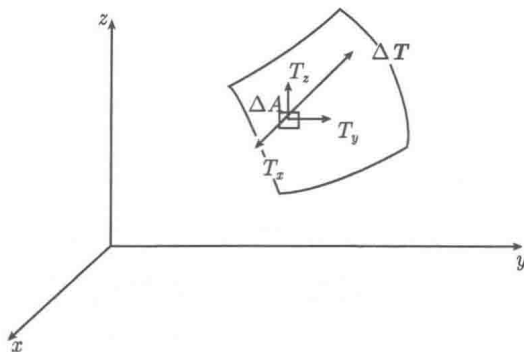


图 1-1 面力的概念

向的投影 T_x, T_y, T_z 称为 P 点面力的分量, 规定与坐标轴指向相同时的分量为正, 相反为负. 面力的量纲为 $[\text{力}][\text{长度}]^{-2}$, 采用国际单位制 (SI) 时, 它的单位为牛顿/平方米 (N/m^2), 称之为 Pascal, 简称帕 (Pa).

作用在物体表面上的力都占有一定的面积, 但对于作用的面积很小的面力, 一般则将其理想化为作用在一点的集中力. 集中力的单位为牛顿 (N).

体力是分布在物体各质点上的力, 如重力、惯性力、电磁力等. 物体各点所受的体力一般也是不同的. 仿照对面力的讨论, 可得出物体一点 C 处所受的体力为体力按体积计算的平均集度 $\Delta \mathbf{F} / \Delta V$ 在微小体积元素 ΔV 无限缩小而趋于 C 点时的极限矢量 $\mathbf{F}$, 即

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta V} = \mathbf{F} \quad (1-2)$$

体力矢量 $\mathbf{F}$ 的方向就是 $\Delta \mathbf{F}$ 在体积 ΔV 的极限方向. 体力的量纲为 $[\text{力}][\text{长度}]^{-3}$, 单位为牛顿/立方米 (N/m^3). 体力 $\mathbf{F}$ 在坐标轴上的投影用 F_x, F_y, F_z 表示, 称为体力分量.

在外力作用下, 物体内部两部分间产生的相互作用力称为内力. 固体在外力作用下产生内力的同时也要产生变形. 用来描述物体内部某一点处内力和变形特征的力学量是应力和应变. 尽管我们对应力和应变概念并不生疏, 但由于这两个概念是本书做进一步分析的重要基础, 在这里再一次强调应力和应变概念的确切含义.

为了说明应力的概念, 我们假想把受一组平衡力系作用的物体用任一平面 C 分成 A, B 两部分 (图 1-2). 如将 B 部分移去, 则 B 对 A 部分的作用应该用 B 部分对 A 部分的作用力代替. 这种力在 B 移去以前是物体内部 A, B 两部分之间 C 截面上的内力, 是分布在整个截面上的分布力. 如果从 C 截面上 P 点的邻域取出一包含 P 点在内的微小面积元素 ΔA_c , 而 ΔA_c 上的内力矢量为 $\Delta \mathbf{T}$, 则内力的平均集度为 $\Delta \mathbf{T} / \Delta A_c$. 如令 ΔA_c 无限缩小而趋近于 P 点, 则在内力连续分布

的条件下 $\Delta T / \Delta A_c$ 趋于一定的极限值 σ , 即

$$\lim_{\Delta A_c \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta A_c} = \sigma \quad (1-3)$$

这个矢量 σ 就是物体在 C 截面上 P 点处的应力. 因 ΔA_c 为标量, 所以 σ 的方向与 ΔT 的极限方向一致.

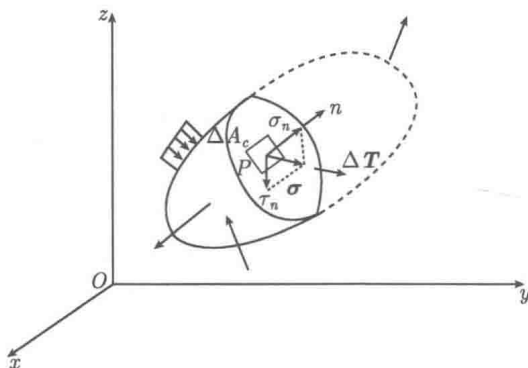


图 1-2 内力和应力概念

应力 σ 可以分解为沿其所在截面外法线方向和切线方向的两个分量. 沿外法线方向的应力分量叫做正应力, 记作 σ_n . 沿切线方向的应力分量叫做剪应力, 记作 τ_n . 此处下标 n 标明其所在截面的外法线方向. 由此, 截面上 P 点处的正应力和剪应力分别为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \lim_{\Delta A_c \rightarrow 0} \frac{\Delta T_n}{\Delta A_c} \\ \tau_n &= \lim_{\Delta A_c \rightarrow 0} \frac{\Delta T_s}{\Delta A_c} \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

其中, ΔT_n , ΔT_s 分别为 ΔA_c 上的内力矢量 ΔT 在 n 平面的沿法线和切线方向分量.

如果图 1-3 中的外法线 n 的方向与 y 坐标轴的方向一致, 则此时有 $\sigma_n = \sigma_y$, $\tau_n = \tau_y$. 其中 σ_y 和 τ_y 分别是作用在 C 截面的正应力和剪应力分量, 如果将 τ_y 分解为沿 x 轴和 y 轴的两个分量, 并记为 τ_{yx} , τ_{yz} , 则过 C 截面 P 点的应力分量为 σ_y , τ_{yx} , τ_{yz} . 以后我们对正应力只用

一个字母的下标标记, 对剪应力则用两个字母标记, 其中第一个字母表示应力所在截面的外法线方向; 第二个字母表示应力分量的指向. 应力的正负号规定为: 正应力以拉应力为正, 压应力为负; 剪应力分两种情况, 当其所在截面的外法线与坐标的方向一致时, 则以沿坐标轴的正向的剪应力为正, 反之为负; 当所在截面的外法线与坐标轴方向相反时, 则以沿坐标轴的负方向的剪应力为正, 反之为负. 图 1-3 及图 1-4 中的各应力分量均为正. 应力及其分量的量纲为 $[\text{力}][\text{长度}]^{-2}$, 单位为帕, 即 N/m^2 .

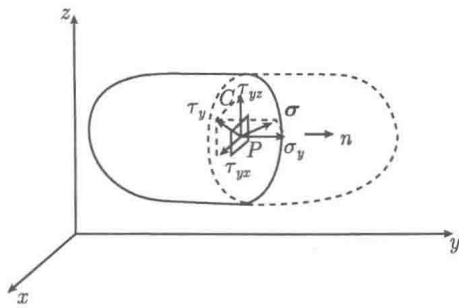


图 1-3 应力的正负号

在以上的讨论中, 过 P 点的 C 截面是任意选的. 显然, 过 P 点可以做无穷多个这样的截面 C . 也就是说过 P 点有无穷多个连续变化的外法线 n . 不同截面上的应力是不同的. 这样, 就产生了一个到底如何描述一点处应力状态的问题. 下面我们就讨论这个问题.

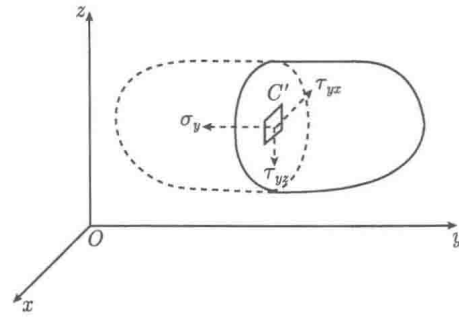


图 1-4 应力的正负号

为了研究 P 点的应力状态, 我们在 P 点处沿坐标轴 x, y, z 的方向取一微小的平行六面体, 如图 1-5 所示, 其六个面的外法线方向分别与三个坐标轴的正负方向平行, 各边长分别为 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. 假定应力在各面上均匀分布, 于是各面上的应力便可用作用在各面中心点的一个应力矢量来表示. 每个面上的应力矢量又可分解为一个正应力和两个剪应力分量. 按前面约定的表示方法, 图 1-5 中给出的各应力分量均为正方向.

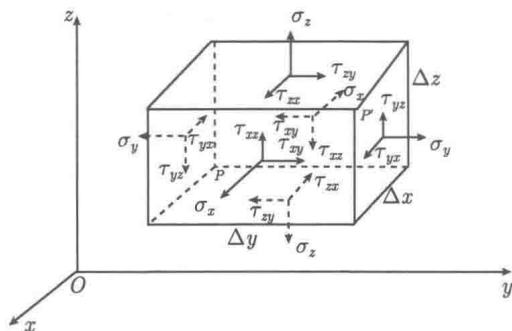


图 1-5 微小六面体上的应力

由图 1-5 可知, 当微小的平行六面体趋于无穷小时, 六面体上的应力就代表 P 点处的应力. 因此, P 点处的应力分量共有九个, 其中有三个正应力分量, 六个剪应力分量. 实际上根据材料力学的剪应力互等定理, 独立的剪应力分量只有三个. 我们把这九个应力分量按一定规则排列, 令其中每一行为过 P 点的一个截面上的三个应力分量, 即

$$\begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{array}$$

以上这九个应力分量定义了一个新的量 Σ , 它描述了一种物理现象, 即 P 点处的应力状态. Σ 是对坐标系 $Oxyz$ 而言的, 当坐标系变换时, 它们按一定的变换式变换成另一坐标系 $Ox'y'z'$ 中的九个分量:

$$\begin{array}{ccc} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'} \end{array}$$

这九个分量描述同一点 P 的同一物理现象, 所以它们定义的仍为 Σ . 而且 $\sigma_x, \sigma_y, \dots$, 这九个量就称为 Σ 的元素. 数学上, 在坐标变换时, 服从一定坐标变换式的九个数所定义的量叫作二阶张量. 根据这一定义, Σ 是一个二阶张量, 称为应力张量, 以后将证明, 应力张量为一对称二阶张量. 各应力分量即为应力张量的元素. 在下一节中, 我们将给出应力分量在坐标变换时所服从的变换公式.

应力张量表示为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

其中, $i, j = x, y, z$. 当 i, j 任取 x, y, z 时就得到相应的应力分量.

在上式中, 应力张量的表示方法与 3×3 阶矩阵的表示方法相同. 如果令 i 代表行, j 代表列, 行列数 1, 2, 3 对应于 x, y, z , 则这个矩阵就是应力张量.

应当指出, 物体内各点的应力状态, 一般来说是不一样的, 即非均匀分布的. 也就是说, 物体内各点的应力分量应为 x, y, z 坐标的函数. 所以应力张量 σ_{ij} 与给定点空间位置有关, 说到应力张量, 总是针对物体内某一确定点而言的. 以后我们将知道, 应力张量 σ_{ij} 完全确定了一点处的应力状态.

1.3 一点处应力状态的描述

首先以平面问题来说明一点处应力状态的描述. 在受力物体内取出一个微小三角形单元体, 如图 1-6 所示, 其中 AB, AC 边与坐标

轴 y, x 重合, 而 BC 边的外法线与 x 轴成 θ 角. 取 $x'y'$ 坐标, 使 x' 与 BC 的外法线方向重合, 如图 1-6 所示. 在这种情况下, 如果 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 已给定, 则 BC 面上的正应力 σ_θ 与剪应力 τ_θ , 可用 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 表示. 由于 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 为已知量以及 θ 角的任意性, 则当 BC 面趋近于 A 点时, 便可以说求得了描述过 A 点处的应力状态表达式. 实际上, 此处所讨论的问题, 是一点处不同方向的截面上的应力变换问题, 即 BC 面无限趋近于 A 点时, 该面上的应力如何用与原坐标相平行的面上的应力来表示. 在这种问题的分析中, 应力增量和体力均属高阶微量, 可以略去不计.

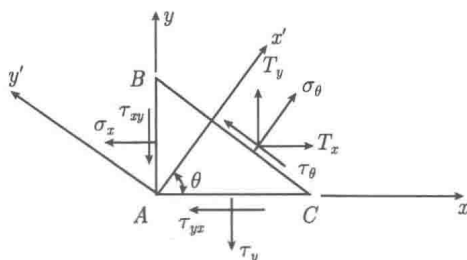


图 1-6 三角形微元体

假定 BC 的面积为 1, 则 AB 和 AC 的面积分别为 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$. 于是由平衡条件 $\Sigma X = 0$ 和 $\Sigma Y = 0$ 可得

$$\left. \begin{aligned} T_x &= \sigma_x \cos\theta + \tau_{yx} \sin\theta \\ T_y &= \tau_{xy} \cos\theta + \sigma_y \sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

其中, T_x, T_y 为 BC 面上单位面积的力 T 在 x, y 方向的投影 (图 1-6). 把 T_x, T_y 投影到 x', y' 坐标方向得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= T_x \cos\theta + T_y \sin\theta \\ \tau_\theta &= T_x \sin\theta - T_y \cos\theta \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

将 (1-6) 式代入 (1-7) 式得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_\theta &= \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

或改写为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_\theta &= \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

把 (1-9) 式中的 θ 换成 $\theta + \frac{\pi}{2}$ 则得到

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_\theta &= \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (1-10)$$

于是, 当 BC 面趋近于 A 点时, 若已知 A 点的应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, 则由 (1-9) 式即可求得该点处任意方向截面上的应力分量. 也就是说, 对于平面问题, (1-9) 式充分描述了一点处的应力状态.

在三维情况下, 我们在受力物体内部任意一点 O 附近取出一微小四面体单元 $OABC$, 斜面 ABC 的外法线为 n , 如图 1-7 所示. 如令斜面 ABC 的面积为 1, 则三角形 OBC 、 OAC 、 OAB 的面积分别为

$$1 \times \cos(n, x) = l_1$$

$$1 \times \cos(n, y) = l_2$$

$$1 \times \cos(n, z) = l_3$$

如果 ABC 面上单位面积的面力为 T , 而且我们将沿坐标轴方向的分量分别用 T_x, T_y, T_z 来表示. 这样, 就不难用微小四面体单元的平衡条件求出

$$\left. \begin{aligned} T_x &= \sigma_x l_1 + \tau_{xy} l_2 + \tau_{xz} l_3 \\ T_y &= \tau_{yx} l_1 + \sigma_y l_2 + \tau_{yz} l_3 \\ T_z &= \tau_{zx} l_1 + \tau_{zy} l_2 + \sigma_z l_3 \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$