

小学数学教育系列教材

丛书主编：曾小平 吕传汉

小学数学 核心概念教学研究

(第二版)

郁军 张佩玲 主编

运算能力
推理能力
模型思想
应用意识
创新意识

数感
符号意识
空间观念
几何直观
数据分析观念

「十大核心概念」

根据《义务教育数学课程标准（2011年版）》要求的数学课程中应当
注重发展学生的“十大核心概念”编写
增强小学数学教师对数学课程核心概念内涵的理解与把握能力
启迪小学数学教师培育学生的数学素养

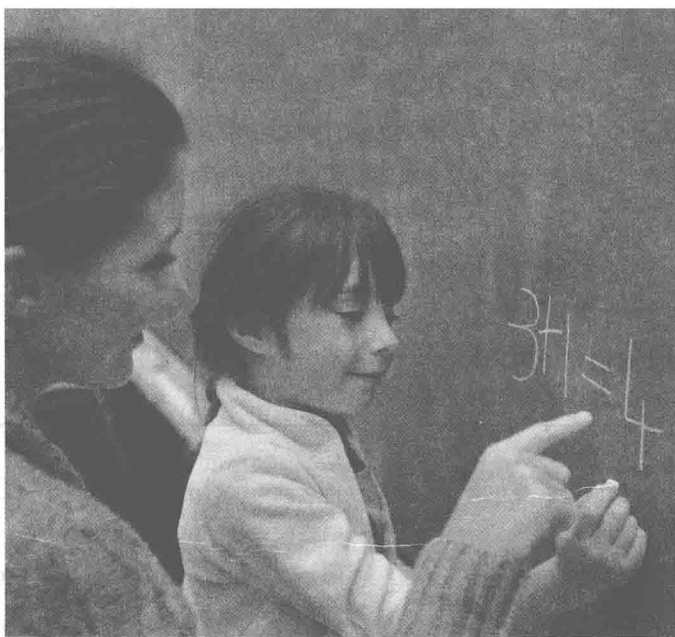
小学数学教育系列教材

丛书主编：曾小平 吕传汉

小学数学 核心概念教学研究

(第二版)

郁军 张佩玲 主编
杨孝斌 韩龙淑 副主编



教育科学出版社
·北京·

出版人 李 东
责任编辑 韩敬波
版式设计 沈晓萌
责任校对 贾静芳
责任印制 叶小峰

图书在版编目 (CIP) 数据

小学数学核心概念教学研究 / 郁军, 张佩玲主编

—2 版. —北京: 教育科学出版社, 2017. 6

小学数学教育系列教材 / 曾小平, 吕传汉主编

ISBN 978 - 7 - 5191 - 1089 - 5

I. ①小… II. ①郁… ②张… III. ①小学数学课—
教学研究 IV. ①G623.502

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 117150 号

小学数学教育系列教材

小学数学核心概念教学研究 (第二版)

XIAOXUE SHUXUE HEXIN GAINIAN JIAOXUE YANJIU

出版发行 教育科学出版社

社 址 北京·朝阳区安慧北里安园甲 9 号 市场部电话 010 - 64989009

邮 编 100101 编辑部电话 010 - 64989374

传 真 010 - 64891796 网 址 <http://www.esph.com.cn>

经 销 各地新华书店

制 作 北京博祥图文设计中心

印 刷 保定市中华美凯印刷有限公司

开 本 169 毫米 × 239 毫米 16 开 版 次 2017 年 6 月第 1 版

印 张 14.5 印 次 2017 年 6 月第 1 次印刷

字 数 243 千 定 价 28.00 元

如有印装质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

编委会

丛书主编 曾小平 吕传汉

主 编 郁 军 张佩玲

副 主 编 杨孝斌 韩龙淑

编 委 (按姓氏笔画排序)

尹 侠 (余庆县实验小学, 小学数学特级教师)

吕传汉 (贵州师范大学, 教授, 原副校长)

李明振 (重庆师范大学, 教授)

李贵萍 (贵阳市南明区教师学习与资源中心, 小学数学特级教师)

杨孝斌 (凯里学院, 教授)

何一鸾 (南京市钟英中学, 中学一级教师)

张佩玲 (贵州教师教育学校, 正高级讲师, 校长)

张学杰 (贵州省教育科学院, 中学数学特级教师)

郁 军 (贵阳市南明区教师学习与资源中心, 中学数学高级教师)

夏小刚 (贵州师范大学, 教授)

韩龙淑 (太原师范学院, 教授)

曾小平 (首都师范大学, 副教授)

序 一

党的十七大报告指出，在新的历史发展阶段，国家发展战略的核心和提高综合国力的关键是提高自主创新能力。自主创新靠人才，人才培养靠教育。教育要培养出国家急需的创新人才，就要明显提高全民的受教育程度和创新能力水平。

教育的实施靠教师。教师的文化水平、思维水平和价值观念直接影响教学的方式和教学的效果，进而影响到人才的培养。要培养自主创新人才，就必须有自主创新的教师。只有高素质的教师，才能将科学的思想 and 创造的观念结合具体学科知识与方法的教学，潜移默化地传递给学生。

为此，务必加强教师教育。因为，教学质量的提高，关键是教师。教师素质不高，投入再多，校舍再好，教学设备再好，教师不会用，不去用，也没有效果。在课程改革中，尽管编写了很好的课程标准和教材，如果教师教学不得法，不能落实新的教育理念，同样培养不出创新人才。因为，课堂上还是由教师个人说了算。我曾经说过：“世上有四种老师。第一种是讲课能深入浅出，第二种是深入深出，第三种是浅入浅出，最糟糕的是第四种老师，浅入深出。”因此，从育人的角度来讲，教师的专业素养和教育水平决定着人才的成长和国家的发展。

当前，中小学课程改革正在全国城乡深入推进。我认为课程改革的精神、理念是很好的。我们要培养学生的创新精神和实践能力，课程标准的思想符合世界的潮流，勾画出了教育的美好前景。但课程的实施要靠教师，如果教师不能理解课程标准，如果教师没有吃透理想课程的标准，课程和教学改革就无法有效实施。有些教师，尤其是乡村教师，专业素养和教育水平较低，难以领会和落实课程标准的理念。

为此，就必须采取多种方式、通过多种渠道来努力培训教师，提高教师的专业素养和教学水平。我认为教育的发展在于改革，教育的改革在于创新，教

育的创新在于学习。一名合格的小学数学教师，只有在工作中不断地努力学习，才能跟上改革创新的时代步伐；才能在数学教学中既让学生获得扎实的知识与技能，又让学生获得数学思想与方法的训练，以及积极的学习体验；才能引导学生在不断地发现问题、提出问题、分析问题和解决问题的过程中培养创新意识与创新能力。

贵州教师教育学校为帮助小学数学教师特别是农村小学数学教师提高数学素养和教学水平，组织了一批经验丰富的大学教授、教育科研人员、中小学骨干教师编写了《小学数学核心概念教学研究》一书。该书不仅较为深刻地阐述了《义务教育数学课程标准（2011年版）》中十大核心概念的内涵，提供了与之相关的教学研究，还介绍了贵州师范大学吕传汉、汪秉彝两位教授提出的数学情境与提出问题教学模式，以改进小学数学教学行为，提高课堂教学效益。该教学模式还可迁移到数学以外的其他学科的课堂教学中，同样可以获得良好的课堂教学效果。该书的出版将为提高小学数学教师的数学素养和教学水平，促进小学数学课程改革的深入发展和创新人才的培养发挥作用。

吕传汉

序 二

提高基础教育质量，通俗地说即“上好学”，是当前我国基础教育面临的首要任务。这不仅是广大家长的希望和心声，也是国家提高自主创新能力、培养创新人才的客观要求。我在主持修订义务教育数学课程标准的过程中逐渐认识到，培养创新人才从根本上讲不是在大学阶段，而是在基础教育阶段。很难想象一个在基础教育阶段没有独立思考过问题的人，将来会成为创新人才。

培养创新人才的突破口在于从根本上转变现行的基础教育方式。这主要体现在四个方面：第一，在信息传递方式上，要由单纯的知识教育转变为知识与智慧并重的教育；第二，在信息的总体构成上，要由“双基”要求发展为“四基”要求，即在“基础知识”“基本技能”的基础上，加上“基本思想”和“基本活动经验”的培养；第三，在基本能力培养上，要由长期保持的“双能”要求发展为“四能”要求，即在“分析问题与解决问题能力”的基础上，加上“发现问题与提出问题能力”的培养；第四，在思维方式训练上，要进行“演绎”与“归纳”的双向思维的培养。从学理上说，人的创新能力的形成依赖于知识的掌握，更依赖于思维的训练和经验的积累。

我认为，教育的任务就是要把科学形态的知识转变为教育形态的知识。这里面有两个重要的转化过程：一是科学知识向学科课程知识的转化，这主要依靠学科专家和课程开发专家的努力，新课程标准的制定就属于这个转化过程；二是学科课程知识向学生认知知识的转化，即向学生能够理解的知识转化，这需要依靠广大基础教育战线的教师。所以，从这个意义上讲，提高教师队伍素质是实现教育目标不可缺失的重要一环。

由贵州教师教育学校组织编写的这本《小学数学核心概念教学研究》，旨在帮助小学数学教师特别是农村小学数学教师提高数学素养和数学水平。该书对从《义务教育数学课程标准（2011年版）》中遴选出的数感、符号意识、空间观念、几何直观、数据分析观念、运算能力、推理能力、模型思想、应用意识



和创新意识十个核心概念做了较为详细的阐述，既对每个核心概念从纵向讲清数学知识的脉络，又对每个核心概念作为教材内容在每个学段的具体含义与教学要求以及如何进行教学提供了相应的教学建议和可供借鉴的教学案例。该书还介绍了贵州师范大学吕传汉、汪秉彝两位教授十余年来在国内实验的数学情境与提出问题教学模式。我相信，这些对提高小学数学教师的专业素养和教学水平以及适应课程改革的能力，都会起到积极的促进作用。

我真诚地企盼能够有更多高质量的中小学教学研究类著作问世，为我国逐渐深入的基础教育改革和发展做出贡献。

史宇中

前言

教育的发展在于改革，教育的改革在于创新，教育的创新在于学习。一名合格的小学数学教师，只有在工作中不断地努力学习，才能跟上改革创新的时代步伐，才能做好教书育人工作。

2012年年初，我国《义务教育数学课程标准（2011年版）》颁布，指出“在数学课程中，应当注重发展学生的数感、符号意识、空间观念、几何直观、数据分析观念、运算能力、推理能力和模型思想。为了适应时代发展对人才培养的需要，数学课程还要特别注重发展学生的应用意识和创新意识”。这就形成了数学课程的十大核心概念。

然而，很多小学数学一线教师和小学数学教育专业的师范生对这十大核心概念的内涵和教育价值存在困惑，不能准确地把握其教学要求，导致小学数学课堂教学实践活动中偏离数学课程精神的事件频繁发生，影响了数学教学的效果，不利于小学生真正学习数学、感悟数学和理解数学。

鉴于此，为了提高我国小学数学教师的专业素养和教育水平，促进小学数学课程改革的深入开展，我们曾于2008年出版了《小学数学核心概念教学研究》一书（由贵州人民出版社出版），并收到了良好的市场效果。现在，我们根据教育部制定的《义务教育数学课程标准（2011版）》进行修改、扩增，补充了运算能力、推理能力、应用意识和创新意识四个核心概念，连同第一版中的数感、符号意识、空间观念、几何直观、数据分析观念和模型思想共形成十个核心概念。对于每个核心概念，本书既从数学学科的角度厘清了基本含义和知识脉络，又从小学教学的角度阐述了各学段教学要求、教学建议和可供借鉴的教学案例。同时，本书还介绍了数学情境与提出问题教学模式，借以改进小学数学教学行为，提高小学数学课堂教学效益。

本书由吕传汉和曾小平两位老师提出编写倡议，郁军和张佩玲两位老师提出编写框架，经编委会讨论确定内容素材，再分工撰写。各章的具体分工为：



第1章“数感”，由曾小平和吕传汉撰写；第2章“符号意识”，由郁军和张佩玲撰写；第3章“空间观念”，由韩龙淑和张佩玲撰写；第4章“几何直观”，由杨孝斌和吕传汉撰写；第5章“数据分析观念”，由何一鸾和韩龙淑撰写；第6章“运算能力”，由李贵萍和郁军撰写；第7章“推理能力”，由郁军和李贵萍撰写；第8章“模型思想”，由李明振和杨孝斌撰写；第9章“应用意识”，由尹侠和吕传汉撰写；第10章“创新意识”，由曾小平和吕传汉撰写；附录“数学情境与提出问题教学”，由夏小刚和吕传汉撰写。初稿完成后，郁军、张佩玲、杨孝斌、韩龙淑和张学杰进行了修改，最终由郁军、张佩玲统稿和定稿。尽管如此，由于编者水平有限，书中还存在不足之处，敬请广大读者不吝赐教！

本书的出版得到了我国著名教育家顾明远教授和义务教育数学课程标准修订组组长史宁中教授的大力支持，两位专家在百忙之中为本书拨冗撰序，使本书大为增色。本书在编写过程中也得到了贵州教师教育学校原校长曾宁一、原党委书记崔华的大力支持。天津师范大学秦华老师、长沙师范学院肖栋坡老师仔细阅读了书稿，提出了不少修改建议。此外，本书的编辑出版还得到了教育科学出版社的大力支持。在此，向关心本书出版和为本书出版付出辛勤劳动的各界人士一并致以诚挚的感谢！

本书可作为师范院校小学数学教育专业学生学习有关课程的参考用书，也可作为小学数学教师教学参考用书，还可作为小学数学教师继续教育培训教材。此外，对于关心小学数学课程与教学的人士来说，本书也是一本不错的参考资料。

编者

目 录

第1章 数感	1
1.1 数感概述	2
1.2 数学课程中的数感	5
1.3 培养数感的教学建议	10
1.4 培养数感的教学案例分析	14
第2章 符号意识	21
2.1 数学符号概述	22
2.2 数学符号发展的几个阶段	25
2.3 培养符号意识的教学建议	29
2.4 培养符号意识的教学案例分析	34
第3章 空间观念	41
3.1 空间观念概述	42
3.2 数学课程中的空间观念	47
3.3 发展空间观念的教学建议	51
3.4 发展空间观念的教学案例分析	55
第4章 几何直观	59
4.1 几何直观概述	60
4.2 数学课程中的几何直观	64

4.3	发展几何直观的教学建议	67
4.4	发展几何直观的教学案例分析	70
第5章	数据分析观念	79
5.1	数据分析观念概述	80
5.2	数学课程中的数据分析观念	82
5.3	发展数据分析观念的教学建议	86
5.4	发展数据分析观念的教学案例分析	94
第6章	运算能力	101
6.1	运算能力概述	103
6.2	数学课程中的运算能力	105
6.3	培养运算能力的教学建议	108
6.4	培养运算能力的教学案例分析	117
第7章	推理能力	123
7.1	推理能力概述	124
7.2	数学课程中的推理能力	126
7.3	培养推理能力的教学建议	128
7.4	培养推理能力的教学案例分析	136
第8章	模型思想	139
8.1	模型思想概述	140
8.2	运用模型思想的基本步骤	146
8.3	培养模型思想的教学要求	155
8.4	培养模型思想的教学建议	157
第9章	应用意识	163
9.1	应用意识概述	164

9.2	数学课程中的应用意识	166
9.3	发展应用意识的教学建议	171
9.4	发展应用意识的教学案例分析	176
第10章	创新意识	183
10.1	创新意识概述	184
10.2	数学课程中的创新意识	185
10.3	培养创新意识的教学建议	188
10.4	培养创新意识的教学案例分析	194
附录	数学情境与提出问题教学	201

第 1 章 数 感

●情境引入

不同的人面对问题“小明家住在4楼，他家离地面大约多少米？”和“新学期，学校要购置一些新桌椅，每套桌椅118元，6000元够买43套桌椅吗？”，解决方式不同，结果也存在差异。产生差异的原因何在？在于每个人的数感不同。数感的个体差异导致了分析问题与解决问题的差异。数感既关乎从数量的角度认识事物的方式，也关乎从数学的角度解决问题的能力。

1.1 数感概述

1976年，卡本特和他的同事们在分析美国教育进展评价（National Assessment of Educational Progress, NAEP）的“数据在估算中的作用”时得出结论：在学生能很好地进行估算之前，他们一定发展着一种对数量的直觉，即一种用数表现量的感觉。后来这种对数量的感觉（直觉）被称为数感（number sense）。

拓展阅读

“number sense”，可译为“数感”“数觉”和“数意识”等。我国的义务教育数学课程标准取用了“数感”这一概念。不仅人有数感，许多动物也有数感。比如，一只狗面对一根骨头和一群狗面对一根骨头的反应是不一样的。

1989年，全美数学教师理事会（National Council of Teachers of Mathematics, NCTM）在《学校数学的课程与评价标准》^①（*Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*）中将数感阐述为“对各种不同含义抽象出来的数来说，是一种直观的活动”，并在“估算”“数的意义和计数法”“整数运算的概念”“数与数的关系”和“数系与数论”等标准中阐述了数感的表现和培养等问题。2000年，全美数学教师理事会在《学校数学教育的原则和标准》^②（*Principles and Standards for School Mathematics*）中进一步强调“数与运算标准的中心就是发展数感”。

2001年，我国《全日制义务教育数学课程标准（实验稿）》在“总体目标”中指出，数学教育要让学生“经历运用数学符号和图形描述现实世界的过程，建立初步的数感和符号感，发展抽象思维”。2012年，我国《义务教育数学课程标准（2011年版）》在“总目标”中指出，“建立数感、符号意识和空间观念，初步形成几何直观和运算能力，发展形象思维与抽象思维”。两个版本的课程标准在“数的认识”“数的运算”“实践活动”和“综合应用”等方面阐述了培养学生的数感问题，在“数与代数”的各个学段都强调了数感在体验和理解数学中的重要作用。

① 人民教育出版社出版的译本为《美国学校数学课程与评价标准》。——编者注

② 人民教育出版社出版的译本为《美国学校数学教育的原则和标准》。——编者注



1.1.1 数感的含义

数感是对数或量的感悟，感悟的对象是数和量以及它们之间的关系；数感含有直观的感受和合理的猜想，是思维与经验的结合物；数感是一种基本的数学素养，是潜层次的数学思维，其含义很难明确地界定。

1. 数感是对数（量）的直觉、敏感与理解

从直觉感知的角度去认识数感，数感是数概念在人脑中扩展后产生的一种对数学问题的敏感与理解。这种敏感与理解是对数（量）的直觉估计和判断，它帮助人们将对数（量）的直觉迅速地反映为数学问题，使数学问题从感知层面敏捷地链接到数学思维层面。首先，数感是对特定事物的现象或属性在数和量方面的敏感性及相关鉴别（鉴赏）能力，是一种自觉的“感知”。其次，数感是一种可以培养的直觉，它随着人对“数”概念的扩展和延伸而反映为对数感知的灵敏度。随着对数认识的深入，这种直觉水平不断提升。

2. 数感是对数的感悟

从直觉与思维相结合的角度去认识数感，数感是对数的感悟。感是外界刺激经过感觉器官产生的直观原始的经验；悟是在外界刺激之下经由大脑思维得到的认识。因此，数感既含有感知的成分，又含有思维的成分，是在实践中得到的有目的、有意识的反思，也就是一种感悟，是直观经验与理性思考的有机结合。数感主要来源于对数的意义的理解，来源于对许多数之间关系的领悟，来源于对数的重要性的认识，来源于对数的运算结果的预测。

3. 数感是关于数概念的网络结构

从个体认知结构的角度去认识数感，数感是关于数概念的知识网络结构。个体若具备这种组织良好的网络结构，就能够将一个数和它相关的运算特性相关联，并且以灵活的创造性的方式解决问题。也就是说，这个网络结构是随着数概念的不断扩大（自然数—分数—小数—有理数—实数—复数）在人脑中逐步形成的。它帮助人以数为基础逐步建构数学知识系统，并且能够自觉选择灵活而有创造性的方式从数（量）的角度出发思考和解决问题。

4. 数感是对数和数运算的理解

从数运算和运用的角度去认识数感，数感是人对数与数运算的一般性理解，这种理解可以帮助人们用灵活的方法做出数学判断和为解决复杂的问题提出有用的预设策略。数感是一种主动地、自觉地或自动化地理解数和运用数的态度与意识，是建立明确的数概念和有效地进行运算等数学活动的基础，是将数学



与现实问题建立联系的桥梁。



1.1.2 数感的特征

数感是感觉和思维的结合物，用定义的方式揭示它的含义比较困难，故可以从其特征的角度来认识数感。

1. 非精确性

数感是在完成具体任务时从所获得的经验中产生的，是关于数与数量、数量关系、运算结果估计等方面的感悟，是建立在经验与直觉基础上的模糊猜测，不容易加以系统性的表述和批判性的反思，以非精确的形式出现在人脑中。数感的这种非精确性主要体现在：（1）非算法性，数感不同于标准的算法化的程序，它的思维路径预先不易被确定和叙述，要在相应的问题情境中去感知；（2）合成性，数感的总路径不是“可见”的、简单的，而是包括许多细微的判断和解释，同时包括多个标准的运用，有时甚至各标准间会彼此冲突。

2. 文化依附性

研究者发现，中国的孩子比美国的孩子更容易理解“十进制”数的计数规则，这同各国使用的语言有关系。比如数字“12”，中文读作“（一）十二”，意义就是十加二，即1个十与2个一之和；而英文读作“twelve”，儿童不容易将它和“ten”与“two”联系起来。我国的“九九表”更是借助汉语言的特殊功能培养儿童数感的有力工具。可见，一个国家或民族的文化背景、传统思维习惯会影响儿童的认知与思维方式，也必然会影响儿童对数和量的认识与感悟，影响数感的形成与发展。因而有人认为，数感属于一种文化产物，“它的产生应该需要一定的文化背景做支撑”，是一种看不见的文化。

3. 元认知性

对数认识的方式会影响数感的教学。美国学者西尔弗将讨论数感的问题和讨论元认知的问题对照起来，认为：元认知研究者常用“规范”“监控”等词语来解释他们的研究成果，这有助于我们认识数感。数感是一大堆错综复杂的东西，我们无法准确地对其进行操作性定义，在确切把握它们的有机联系之前，只能对其进行零散的理解。数感的意义或许就体现在我们对数（量）的认识与把握过程的监控与调节上，这是一种“说不清，道不明”的无意识或者潜意识的指引。