

盾构掘进对邻近建筑物影响 及控制技术

DUNGOU JUEJIN DUI LINJIN JIANZHUWU YINGXIANG
JI KONGZHI JISHU

浙江大学城市学院 丁智 魏新江 著
中国电建集团华东勘测设计研究院有限公司 吴勇

中国建筑工业出版社

中国建筑工业出版社

盾构掘进对邻近建筑物 影响及控制技术

浙江大学城市学院 丁智 魏新江
中国电建集团华东勘测设计研究院有限公司 吴勇 著



中国建筑工业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

盾构掘进对邻近建筑物影响及控制技术/丁智等著. —
北京：中国建筑工业出版社，2018.1
ISBN 978-7-112-21532-4

I. ①盾… II. ①丁… III. ①盾构法-影响-建筑物-研究 IV. ①U455.43

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 284621 号

本书采用理论研究、现场测试和工程实践相结合的方法对盾构掘进过程中周边建筑物的变形影响问题进行了系统分析。

本书共分为 8 章，主要内容包括：绪论，邻近不同基础建筑物盾构掘进沉降实测与分析，盾构隧道掘进引起的土体变形计算，盾构纵向掘进对邻近浅基础建筑物影响研究，盾构纵向掘进对邻近短桩基础建筑物影响研究，双线盾构掘进对邻近建筑物影响及控制标准研究，邻近建筑物盾构掘进引起的地表横向沉降预测，邻近建（构）筑物盾构施工控制技术等。

本书结构严谨，内容翔实，通俗易懂，配有大量图表以及理论计算所需公式，旨在帮助读者快速而深入了解盾构掘进过程中周边建筑变形计算、预测及控制等相关问题，培养读者解决盾构掘进对周边环境影响问题的基本能力以及创新能力。

本书可作为土木工程、交通工程、道路工程等高等学校教师与学生的教学及科研参考书，亦可为广大从事地下与隧道工程相关专业领域的技术人员提供参考与借鉴。

责任编辑：张伯熙 杨杰

责任设计：李志立

责任校对：王烨

盾构掘进对邻近建筑物影响及控制技术

浙江大学城市学院 丁智 魏新江 著
中国电建集团华东勘测设计研究院有限公司 吴勇

*

中国建筑工业出版社出版、发行（北京海淀三里河路 9 号）

各地新华书店、建筑书店经销

北京科地亚盟排版公司制版

大厂回族自治县正兴印务有限公司印刷

*

开本：787×960 毫米 1/16 印张：13 字数：260 千字

2018 年 2 月第一版 2018 年 2 月第一次印刷

定价：59.00 元

ISBN 978-7-112-21532-4
(31184)

版权所有 翻印必究

如有印装质量问题，可寄本社退换

（邮政编码 100037）



丁智，1983年8月生，安徽铜陵人，浙江大学工学博士，副教授，国家注册土木（岩土）工程师，现任浙江大学城市学院土木工程系副主任。主要从事地下工程特别是隧道施工及运营对周边环境影响等的教学与科研工作。目前已主持国家自然科学基金项目1项、浙江省自然基金项目1项及杭州市重大科技项目1项，参与国家自然科学基金面上项目和省重点项目4项。已在《Journal of Vibration Engineering & Vibration》、《Journal of Central South University》、《Geomechanics and Engineering》、《岩土工程学报》、《岩石力学与工程学报》和《岩土力学》等期刊上发表学术论文40余篇，其中被SCI、EI检索论文30余篇。专版专著1本，授权发明专利6项，曾获浙江省科技进步二等奖（2016）、浙江省科技进步三等奖（2012）各1项。入选浙江省科协育才工程资助人选、杭州市“131”中青年人才资助人选、杭州市教育局系统优秀教师、杭州市成绩突出科技工作者。2014年受“杭州市优秀中青年教师海外研修资助人选项目”资助下师从欧章煜教授在外访学三个月。现兼任浙江省岩土力学与工程学会隧道及非开挖工程专委会委员，及《Tunnelling and Underground Space Technology》、《Journal of Zhejiang University-SCIENCE A》、《岩土工程学报》等国内外权威期刊审稿人。

联系地址：浙江省杭州市拱墅区湖州街51号浙江大学城市学院土木工程系，邮编：310015；Email：dingz@zucc.edu.cn

前　　言

自 1956 年北京地铁筹建处成立后，中国地铁已经走过 60 余年的发展历程。据统计，截止到 2016 年底，国内已开通运营轨道交通线路 128 条，总里程达到 3832km。其中，盾构法已成为国内外轨道交通建设的主要施工方法之一，特别是在杭州湾软土区域建造地铁隧道，其应用非常广泛。盾构掘进是一个典型的荷载变化力学过程，在其施工影响范围内不可避免会产生扰动从而造成土体位移，若变形过大将导致邻近建（构）筑物开裂、倒塌等一系列问题。如上海地区轨道交通 4 号线施工导致了一幢 8 层楼房的裙房坍塌，英国每年由于隧道掘进引起的房屋损坏保险额就达到 4 亿英镑（约合 40 亿元人民币）。地铁盾构的掘进过程实际上是一个动态开挖过程，这意味着在隧道开挖面还未达到建筑物地基处，盾构掘进引起的周围土体移动已经对建筑物产生影响，这在以往设计、施工和研究中易被忽视。

基于此，围绕盾构隧道动态掘进影响问题，在国家自然基金项目：“饱和土隧道掘进区浅基础建筑物地基、基础和结构协同作用机理研究”（编号：51508506）、浙江省自然基金项目：“地铁列车荷载下软土越江盾构隧道长期沉降研究”（编号：LQ16E080008）、杭州市重大科技计划项目：“软土地铁运营振动及长期变形减灾控制关键技术与应用”（编号：20172016A06）、浙江省科协“育才工程”资助（编号：2017YCCG018）等的资助下，结合盾构施工实例，将盾构掘进引起的土体损失视为由开挖面出土平衡引起的土体损失和盾尾间隙及注浆产生的土体损失组成，给出了修正的 Sagaseta 地面变形计算公式。并引入协同作用理论模型深入分析盾构隧道纵向掘进对邻近浅基础和短桩基础建筑物的影响，得到了盾构掘进区建筑物变形规律以及内力分布规律。并针对邻近建筑物盾构施工引起的土体横向位移规律，创新性地提出了隧道在建筑物正下方、扰动范围内以及范围外三种工况下施工时，地表横向沉降槽分别呈“塞形分布曲线”、“偏态分布曲线”和“正态分布曲线”特征，给出了塞形分布和偏态分布曲线计算公式及相关参数。

可见，本书是作者围绕盾构施工引起的建筑物变形问题的科研与工程实践的一个深度总结，旨在帮助相关从业者了解盾构隧道掘进过程中对周边建筑变形影响的机理、预测分析方法及相应控制技术。本书共 8 章，主要包括：绪论，邻近不同基础建筑物盾构掘进沉降实测与分析，盾构隧道掘进引起的土体变形计算，盾构纵向掘进对邻近浅基础建筑物影响研究，盾构纵向掘进对邻近短桩基础建筑物影响研究，双线盾构掘进对邻近建筑物影响及控制标准研究，邻近建筑物盾构

掘进引起的地表横向沉降预测，邻近建（构）筑物盾构施工控制技术。

在本书的撰写过程中，得到了欧章煜教授、夏唐代教授、朱少杰教授级高工、魏纲教授、张世民教授、虞兴福高工和秦建设高工等的指导、建议和帮助，在此表示衷心的感谢！并特别感谢浙江大学城市学院张霄、浙江大学博士生孔勃文、Texas A&M University（美国德州农工大学）博士生史晟邑、宏润建设集团股份有限公司范俊聪、中国电建集团华东勘测设计研究院有限公司王烨晟、黄江华、郭建峰等在资料收集、图表绘制及理论计算等方面的辛勤劳动。同时对配合本研究的相关工程技术人员和合作单位，在此一并表示衷心的感谢。

本书的分工如下：第1章由丁智、魏新江撰写；第2章～第7章由丁智撰写；第8章由吴勇撰写。本书引用了大量的参考文献，包括各类学术期刊和专著，但难免会有疏漏之处，在此敬请谅解和表示感谢！由于作者水平、能力及可获得的资料有限，书中难免存在不妥之处，敬请各位专家、同行和读者批评指正。

丁 智

2017年10月于浙江大学求是村

目 录

第1章 绪论	1
1.1 引言	1
1.2 土压平衡盾构施工原理	2
1.3 盾构掘进引起的土体变形研究现状	6
1.3.1 经验公式法	7
1.3.2 理论分析法	9
1.3.3 数值仿真法	10
1.3.4 模型试验法	11
1.3.5 现场实测法	11
1.4 盾构掘进对邻近建筑物影响研究现状	12
1.4.1 理论分析法	12
1.4.2 数值仿真法	13
1.4.3 现场实测法	14
1.5 现有研究的不足之处	15
1.6 本书的主要研究内容	15
第2章 邻近不同基础建筑物盾构掘进沉降实测与分析	17
2.1 引言	17
2.2 工程概况	17
2.2.1 工程介绍	17
2.2.2 水文地质条件	18
2.3 现场测试方案	19
2.3.1 测试方法	20
2.3.2 测点布置	23
2.4 实测结果分析	29
2.4.1 实测地面沉降曲线分析	29
2.4.2 实测不同基础建筑物沉降曲线分析	36
2.5 本章小结	44

第3章 盾构隧道掘进引起的土体变形计算	45
3.1 引言	45
3.2 汇源法（镜像法）原理	46
3.3 考虑施工影响因素的汇源法	49
3.3.1 开挖面失衡引起的土体变形计算	49
3.3.2 盾尾空隙引起的土体变形计算	51
3.3.3 盾尾注浆引起的土体变形计算	53
3.4 改进的 Sagasetra 计算公式	55
3.4.1 对 Sagasetra 公式的改进	55
3.4.2 算例验证	56
3.5 本章小结	58
第4章 盾构纵向掘进对邻近浅基础建筑物影响研究	60
4.1 引言	60
4.2 基于弹性地基梁协同作用模型理论研究	61
4.2.1 计算模型的建立	61
4.2.2 理论结果分析	63
4.2.3 各种因素对建筑物附加应力的影响	66
4.3 基于弹性地基剪弯梁协同作用模型理论研究	70
4.3.1 计算模型的建立	70
4.3.2 建筑物的附加应力	73
4.3.3 算例计算及分析	74
4.4 本章小结	78
第5章 盾构纵向掘进对邻近短桩基础建筑物影响研究	79
5.1 引言	79
5.2 基于弹性地基梁协同作用模型理论研究	80
5.2.1 计算模型的建立	80
5.2.2 理论分析	85
5.2.3 不同因素对建筑物附加应力的影响	89
5.3 基于弹性地基剪弯梁协同作用模型理论研究	93
5.3.1 计算模型的建立	93
5.3.2 算例计算及分析	93

5.4 本章小结	97
第6章 双线盾构掘进对邻近建筑物影响及控制标准研究 99	
6.1 引言	99
6.2 双线盾构掘进对邻近浅基础建筑物影响研究	99
6.2.1 共同作用力学模型的建立	100
6.2.2 计算条件	102
6.2.3 实例计算分析.....	102
6.3 双线盾构掘进对邻近浅基础框架建筑物影响研究	111
6.3.1 共同作用力学模型的建立	111
6.3.2 计算条件	113
6.3.3 实例计算分析.....	114
6.4 双圆盾构掘进对邻近浅基础框架建筑物影响研究	119
6.4.1 共同作用力学模型的建立	119
6.4.2 计算条件	121
6.4.3 实例计算分析.....	121
6.5 建筑物变形控制标准研究	126
6.5.1 建筑物损坏风险评估	126
6.5.2 建筑物沉降控制标准	128
6.6 本章小结	134
第7章 邻近建筑物盾构掘进引起的地表横向沉降预测 136	
7.1 引言	136
7.2 前期数值研究成果	138
7.2.1 模型建立	138
7.2.2 地面沉降分析.....	139
7.3 邻近浅基础建筑物工况下地表横向沉降预测	140
7.3.1 塞型分布曲线.....	141
7.3.2 偏态分布曲线.....	143
7.4 邻近建筑物盾构掘进安全评估可视化软件开发	146
7.4.1 沉降槽宽度参数法评价标准	146
7.4.2 可视化影响系统的实现	148
7.5 本章小结	151

第8章 邻近建(构)筑物盾构施工控制技术	152
8.1 引言	152
8.2 案例1：杭州地铁某盾构区间隧道下穿桥桩	153
8.2.1 工程概况	153
8.2.2 相关技术措施	156
8.2.3 磨桩过河施工控制技术分析	163
8.3 案例2：南昌某盾构区间隧道下穿凤凰花园西区	166
8.3.1 工程概况	166
8.3.2 注浆加固及应急预案	172
8.3.3 施工控制技术分析	174
8.4 案例3：宁波某盾构区间隧道下穿重要文物	179
8.4.1 工程概况	179
8.4.2 监测点布置	182
8.4.3 下穿文物监测数据分析	183
8.4.4 区间监测数据反分析	185
8.5 本章小结	188
参考文献	190

第1章 绪论

1.1 引言

随着我国经济的高速发展，对城市交通服务功能提出了更高的要求。轨道交通以其占地省和速度快等优势，成为城市可持续发展的最佳交通方式。据统计，截止到 2016 年，中国大陆地区包括北京、天津、上海、广州、南京、深圳、杭州在内的 42 座城市已建或即将开建地铁。

在软土地区地铁隧道建设中，盾构法以明显的经济技术优势和对周边环境影响甚小的特点，成为最主要的施工方法之一^[1]。但无论采用哪种形式的盾构建造地下隧道，都将会产生不同程度的土体位移，如深圳地区部分地段隧道掘进引起的地表沉降量达到 500mm^[2]。当土体位移达到一定程度时，就会引起地表建筑物的变形、开裂，特别是对于浅基础建筑物和古建筑物，更容易破坏、倒塌，从而造成重大损失^[3~5]。上海地区轨道交通 4# 线施工导致了一幢 8 层楼房的裙房坍塌，且邻近的临江花园大楼出现了较为明显的沉降（1 小时内最大沉降超过了约 7mm，最大的累计沉降甚至达到了 15.6mm）^[6]。英国每年由于隧道掘进引起的房屋损坏保险额就达到 4 亿英镑（约合 40 亿元人民币），并且逐年不断增加。如英国地铁 JLE 工程，用于建筑物保护的花费就达 1 亿英镑，占到整个土建工程费用的 1/6^[7]。

地铁盾构的掘进过程实际上是一个动态开挖过程，由于土体损失等因素影响其掘进引起的变形槽应是三维沉降槽（Attewell^[8] 等 1986 年）。这意味着在隧道开挖面还未达到建筑物地基处，盾构掘进引起的地表变形已经对建筑物产生影响，这在以往研究中易被忽视。由此可见，如果在设计和施工中不考虑隧道动态掘进对邻近建筑物的影响，在所难免的将是建筑物高额的维护费用，甚至对人民生命财产的直接威胁，损失不可估量。

就杭州而言，地处京杭大运河的南端、长江三角洲的南翼，钱塘江下游、杭州湾西端，是长三角地区较为重要的中心城市和中国东南部的交通枢纽。杭州全市的面积约 16596km²，是长江三角洲的一个重要的政治和经济活动中心，对网状轨道交通的需求甚为强烈。杭州地铁（Hangzhou Metro）首条线路杭州地铁 1 号线于 2012 年 11 月 24 日正式开通，成为浙江省首条地铁线路，也使杭州成为华东地区第四个开通地铁的城市。截至 2017 年 8 月，杭州地铁运营线路共有 3 条，分别为 1、2、4 号线，共设车站 68 座，运营里程共计 93.7km。截至 2017

年8月，杭州地铁在建线路有10段，包括1号线机场延伸线、2号线二期和三期、4号线南段、5号线、6号线以及城际轨道交通临安线、富阳线、绍兴线、海宁线等，在建总里程约235.7km，如图1-1所示。到2022年前杭州将建成10条总长375.6km的城区线路和2条城际线路。其区间盾构管片多坐落在第四纪软土地层中，该土层具有天然含水量大、压缩性高、承载力低的特点，在外荷载作用下容易产生较大变形。

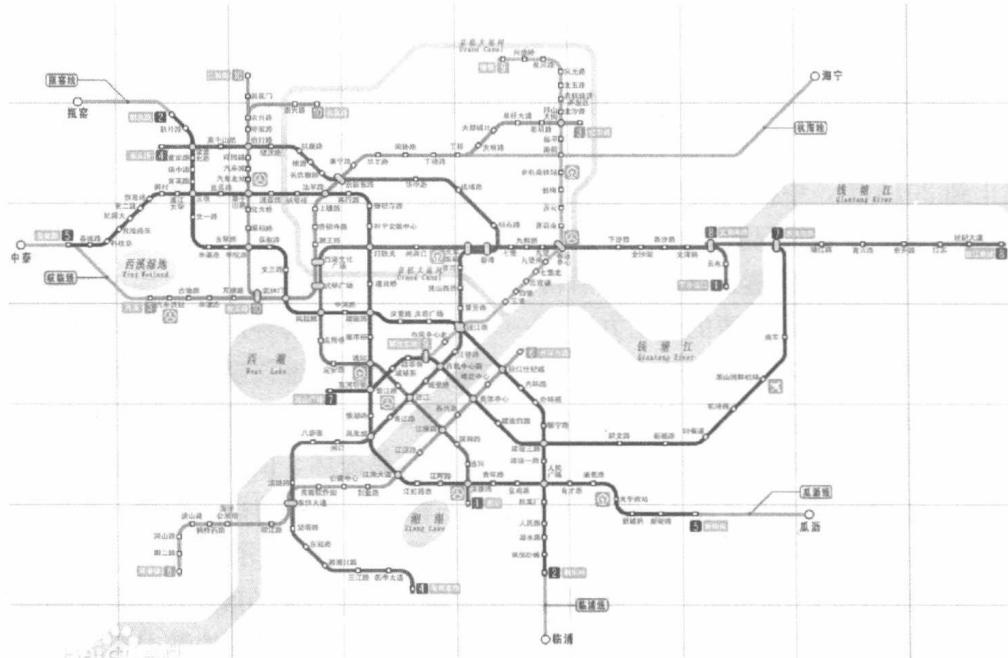


图 1-1 杭州地铁 1 号线线路

本书基于上述工程背景,以软土地区土压平衡盾构掘进为研究对象,重点介绍盾构隧道掘进引起的土体变形机理,提出盾构掘进引起的土体损失主要包括开挖面出土引起的土体损失和盾尾间隙产生的土体损失。将建筑物简化为弹性地基梁,基于土体损失理论,建立盾构隧道轴线上方建筑物地基、基础与结构协同作用的力学模型。

1.2 土压平衡盾构施工原理

盾构法隧道施工是指盾构机一边控制开挖面及其周边土体不坍塌，一边进行掘进并在盾构机内部进行管片衬砌拼装、同步实施盾尾注浆以防止土体变形过大的一种隧道施工方法。盾构法于 1818 年由法国工程师布鲁诺尔（Brunel）发明并注册了专利，机型为敞口式手掘盾构机，如图 1-2 所示。

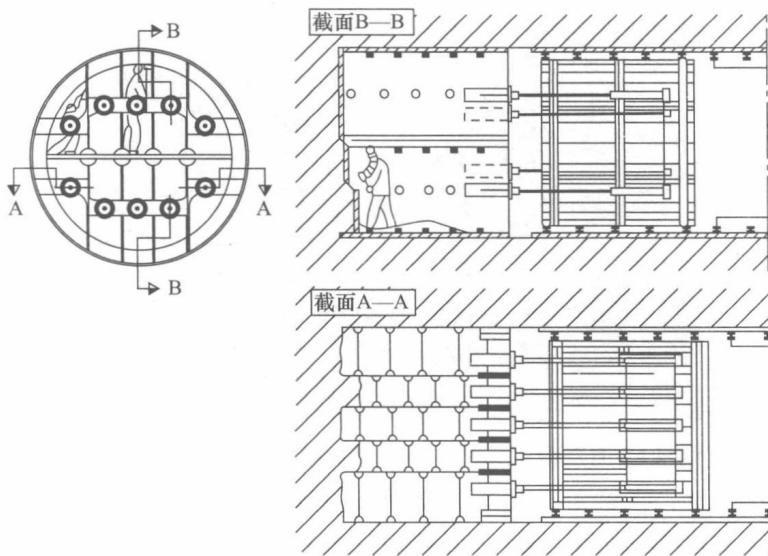


图 1-2 布鲁诺尔盾构机原型

20世纪60年代以来，盾构法得到了极大发展，形成了完善的圆形断面平衡式盾构工法，包括压气盾构、挤压盾构、土压盾构及泥水盾构等各种工法，其中以土压盾构和泥水盾构工法最为常用。

土压平衡盾构于1963年由日本Sato Kogyo公司生产出来，并在1974年在东京被正式用于1.9km长地下管线的掘进。土压平衡盾构机是利用盾构机最前方的全断面滚动切削刀盘，如图1-3、图1-4所示，对前方土体进行切削后，将其放入后面的密封舱内，并使得舱内压力与开挖面水土压力保持平衡，以避免盾构机掘进对周边土体的扰动，从而减少地表沉降。出土时，由密封舱下部的螺旋运输机进行排土，并设置排土口将土渣连续排出。螺旋运输机通过转速控制出土量，其出土量的大小与刀盘切削速度密切相关，切削时尽量使得密封舱内充满泥土且又不过于饱满。

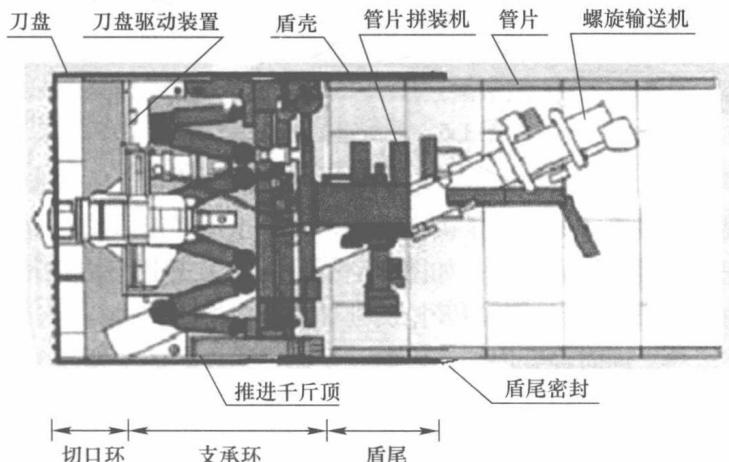


图 1-3 土压平衡盾构机组成图



图 1-4 土压平衡盾构机出厂图

土压平衡盾构法隧道施工工序为：掘进、出土、支护及注浆。其施工过程如下：如图 1-5 所示，在隧道一端建造始发竖井或基坑，并将盾构机吊装安放就位。盾构机从竖井内墙开孔始发，沿着设计轴线向另一竖井进行推进。盾构掘进过程中受到的地层摩擦阻力，会通过千斤顶传至盾构机尾部已拼装完毕的衬砌管片上，再传到其竖井后靠壁上。盾构每掘进一环的距离，盾尾处则完成一环衬砌的拼装，并及时向盾构尾部空隙处注入惰性浆液，以防止地面变形过大。盾构机掘进到接受竖井或基坑时，掘进过程结束。

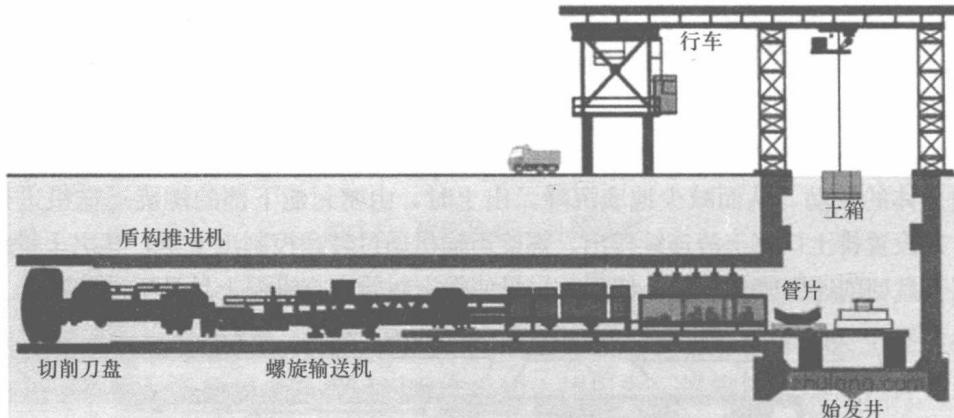


图 1-5 盾构施工示意图

近 30 多年来，现代盾构机已在自动控制、液压传动、壁后同步注浆、管片拼装、计算机数据采集等方面得到了极大发展，传统土压平衡盾构机也已发展成加泥式及复合加泥式土压平衡盾构机，如图 1-6 所示。加泥式土压平衡盾构机工作原理是向密封仓内注入塑性材料，并对开挖面处切削下来的土体进行充分搅拌，形成透水性较低的塑流体。同时经仓内塑流体向开挖面传递设定的平衡压力，伺服控制盾构机推进速度和螺旋输送机排土速度相匹配，实现动态平衡条件下连续向前掘进。

日本土木学会于 1997 年对《隧道标准规范（盾构篇）及解释》进行修订时，专门对盾构机机型及工程应用数量进行调查统计，在总长 811km 施工里程中，

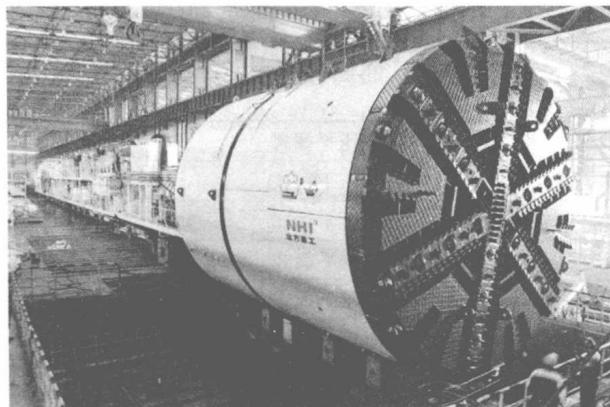


图 1-6 加泥式土压平衡盾构机图

土压平衡盾构（含加泥式及复合加泥式）施工里程达 510km，占总里程的 63%。本书对国内地铁工程应用盾构机型进行了统计归纳，如表 1-1 所示，土压平衡盾构在国内应用地域范围非常广泛，可适用不同的地质条件，已成为国内地铁施工的主流盾构机型。

国内城市地铁盾构机型一览表

表 1-1

地点	地层	盾构机类型	管片外径 (mm)	管片外径 (mm)
北京	黏土、粉土，砂土，砂卵	土压平衡式（含加泥式）	6000	5400
上海	淤泥质黏土	土压平衡式、泥水平衡式	6200	5500
南京	黏土、粉土、砂土、强风化岩、风化岩	土压平衡式（含加泥式）、泥水平衡式	6200	5500
深圳	黏土、粉土、砂土、花岗岩、漂石、上软下硬	土压平衡式（含复合加泥式）	6700/6000	6000/5400
东莞	软土、片麻岩、漂石、上软下硬	土压平衡式	6700	6000
大连	漂石、板岩、辉绿岩	土压平衡式	6000	5400
成都	软土、砂卵、漂石、泥岩	土压平衡式（也曾用过一台泥水平衡式）	6000	5400
福州	软土、中风化花岗岩	土压平衡式	6200	5500
广州	软土、砂土、砂卵、风化岩石、漂石、上软下硬	土压平衡式（含复合加泥式）、泥水平衡式	6000	5400
杭州	黏土、砂土	土压平衡式	6200	5500
昆明	软土、砂卵、泥岩、砂岩	土压平衡式	6200	5500
武汉	软土、风化岩石	土压平衡式、泥水平衡式	6200/6000	5500/5400
无锡	黏土、粉土	土压平衡式	6200	5500
郑州	粉质黏土、砂土、砂卵	土压平衡式	6000	5400
天津	黏土、粉土、砂土	土压平衡式	6200	5500
沈阳	黏土、砂土、砂卵	土压平衡式	6000	5400
苏州	粉质黏土、砂土	土压平衡式	6200	5500

续表

地点	地层	盾构机类型	管片外径 (mm)	管片外径 (mm)
西安	黄土、粉土、砂土	土压平衡式	6000	5400
长沙	粉质黏土、砂卵、泥岩、砂岩	土压平衡式	6000	5400
南昌	粉质黏土、砂土、砂岩和砾岩	土压平衡式	6000	5400
南宁	黏土、粉土	土压平衡式、泥水平衡式	6000	5400
青岛	黏土、砂土、花岗岩	土压平衡式、硬岩掘进机	6000	5400
合肥	黏土、粉土	土压平衡式	6000	5400
长春	黏土、砂土、泥岩	土压平衡式	6000	5400
重庆	泥岩、花岗岩	土压平衡式、硬岩掘进机	6000	5400
宁波	黏土、粉土、砂土	土压平衡式	6200	5500

但无论是采用传统型还是加泥型土压盾构建设地铁隧道，都将会引起不同程度的土体位移。早在 1969 年 Peck 就指出盾构法施工引起的土体损失及对相邻结构物的影响是与具体施工细节分不开的^[9]。如果施工控制不当，会引起隧道周边土体产生较大变形，造成地面房屋的倾斜或开裂，影响周边建筑物的安全和正常使用。因此，理论分析时需准确把握盾构施工的主要影响因素才能得出符合实际工况的研究结果。

1.3 盾构掘进引起的土体变形研究现状

盾构掘进引起的地面变形曲线一般称为“沉降槽”，如图 1-7 所示。根据盾

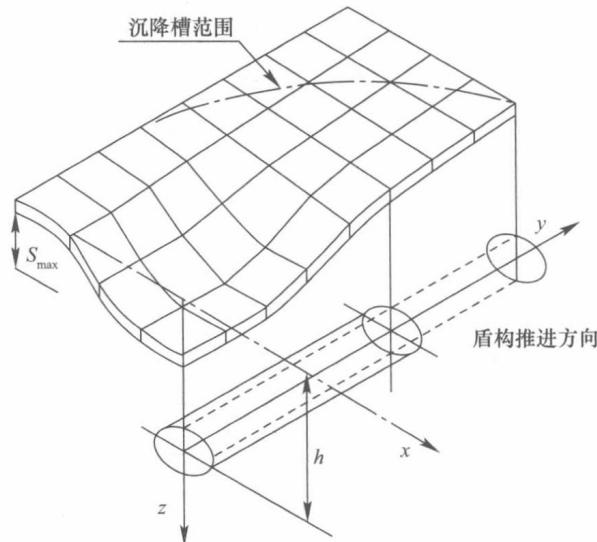


图 1-7 隧道开挖引起的三维沉降槽

构掘进过程中实际施工工况，如图 1-8 所示，其引起的地面变形一般可分为 6 个阶段：(1) 盾构掘进中开挖面水土压力不平衡而导致土体下沉或隆起；(2) 盾构机外壳与土体之间摩擦而导致土体隆起；(3) 盾构姿态变化引起的土体损失而导致地面下沉；(4) 盾构通过时盾尾空隙引起土体损失而导致地面下沉；(5) 盾尾壁后注浆引起的地面隆起；(6) 盾构掘进后周围土体超孔隙水压力消散及土体固结导致地面下沉^[10]。

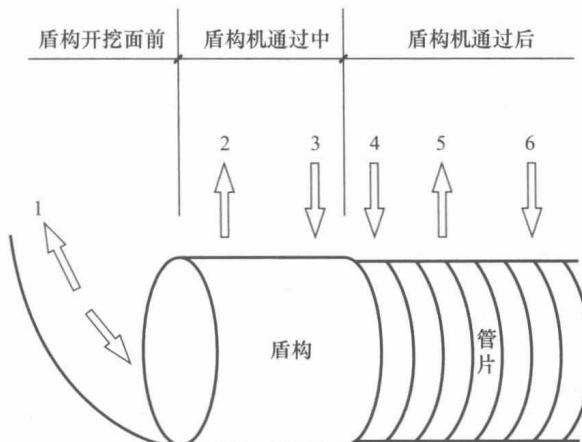


图 1-8 盾构掘进实际工况

目前，国内外学者对盾构掘进过程引起的土体变形研究暂不考虑第 6 阶段固结沉降，其研究方法可概括为：经验方法、理论方法、数值方法、实测方法和模型方法等。

1.3.1 经验公式法

(1) 地表横向沉降研究

地表横向沉降经验预测应用最多的仍是 Peck 公式^[9]，它是 Peck 通过对隧道施工之后的地表沉降槽的长期观察，并分析了大量的实测数据，提出了在隧道施工时间段地表横向沉降槽呈正态的分布规律，并认为这是由土体损失引起，土体损失的体积与地表沉降槽的体积相等。

其横向地表沉降分布经验公式为：

$$S(x) = S_{\max} \exp\left(-\frac{x^2}{2i^2}\right) \quad (1-1)$$

$$S_{\max} = \frac{V_{\text{loss}}}{\sqrt{2\pi}i} \quad (1-2)$$

$$V_{\text{loss}} = \eta\pi R^2 \quad (1-3)$$