学前教育专业统编教材
公共基础课系列教材

总主编 戚 鹏

XUEQIAN JICHU SHUXUE 上册

学前基础数学

主审 王明亭
主编 李红军 卢明存 王跃进

郑州大学出版社

学前教育专业统编教材

公共基础课系列教材

总主编 戚 鹏

XUEQIAN
JICHU SHUXUE 上册

学前基础数学

主审 王明亭

主编 李红军 卢明存 王跃进

郑州大学出版社

郑州

图书在版编目(CIP)数据

学前基础数学. 上册/李红军,卢明存,王跃进主编. —郑州:郑州大学出版社,2015.6

学前教育专业统编教材

ISBN 978-7-5645-2240-7

Ⅰ.①学…　Ⅱ.①李…②卢…③王…　Ⅲ.①数学-幼儿师范学校-教材　Ⅳ.①01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 062097 号

郑州大学出版社出版发行

郑州市大学路 40 号　　邮政编码:450052

出版人:张功员　　发行部电话:0371-66966070

全国新华书店经销

河南省诚和印制有限公司印制

开本:787 mm×1 092 mm　1/16

印张:14.5

字数:355 千字

版次:2015 年 6 月第 1 版　　印次:2015 年 6 月第 1 次印刷

书号:ISBN 978-7-5645-2240-7　　定价:26.00 元

学前教育专业数学教材

编审委员会

上册

主　审

王明亭

主　编

李红军　卢明存　王跃进

副主编

李富旺　范钦桃　霍光林

编　委

范钦桃　徐永峰　霍光林

李富旺　陈利艳　史瑞霞

李红军　卢明存　王跃进

内容提要

NEIRONG TIYAO

本教材共分上、下两册. 上册共6章：集合与简易逻辑；不等式；函数；三角函数；直线与方程；圆锥曲线与方程. 下册共5章：数列与数学归纳法；排列、组合与概率；复数；空间点、直线、平面之间的位置关系；多面体与旋转体. 全书均按自然课时分节，配备练习（附有参考答案），方便教师备课及学生自学. 每章最后都有该章的知识结构图、要点及方法总结、练习题，便于读者学习、提高.

本教材适合作为五年一贯制大专、中专（或3+2大专）学前教育专业教材，也可以供职业高中选用.

前言

QIANYAN

《学前基础数学》教材是根据当前学前教育专业的发展需要，尤其是幼儿园教师资格考试的要求，并结合该学科的课程标准，在充分调查研究的基础上进行编写的，分上、下两册。

本教材的编写目的是使学生通过学习满足对数学基础知识和基本能力的需要，使学生获得一定的数学素养，为以后从事幼儿教育工作奠定基础，同时为一部分学生继续深造奠定基础。

为适应学前教育专业特定的教学对象、专业目标、学制、学时要求，本教材在内容的深度、广度上考虑到学生的入学水平和接受能力，删除了难、繁、偏、旧的内容，淡化了对解题技巧的训练，强调、突出专业特色，注重基础和应用，注重启发性、探究性、适用性，重视数学思想、方法的渗透，重视知识的产生和形成过程，重视数学知识在现实生活中的应用，重视数学与其他学科间的联系，使学生在获得知识的同时，得到严谨的态度、科学的思维方法等方面的训练，培养学生的逻辑推理和信息处理能力，提升学生的数学素养，为学生成为合格的幼儿教师做好准备。

本教材按照自然课时分节，并结合具体的教学内容，插入了有关的数学发展史、著名数学家的故事及成就、数学名题、数学知识的实际应用、数学与其他学科的联系等与幼儿园教师资格考试相关的内容；本教材还配备了练习及探究与思考的参考答案，以方便教师备课和学生自学；每章最后都有本章的知识结构图、知识要点、方法总结及“练一练”，便于学生抓住重点、突破难点，也为教师的教学留有一定余地，为学生的提高提供一定的空间。本书加 * 的内容为选学内容。

由于编者水平有限，书中难免还有不当、疏漏甚至错误之处，恳请各位专家、同行和读者赐教，给予批评指正，不胜感激。

编　者

2015 年 6 月

目 录

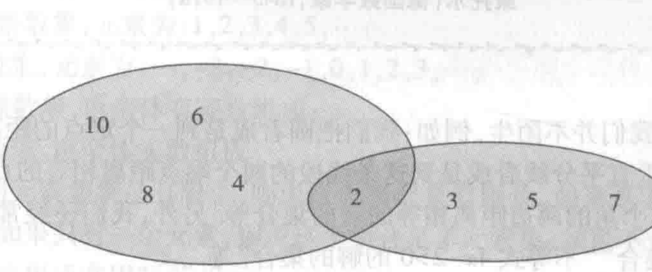
MULU

注:加“ * ”者为选学内容.

第1章

集合与简易逻辑

集合知识和逻辑知识在我们的生活和学习中经常会接触到,在幼儿园的教学中也会经常用到. 本章主要介绍集合的初步知识和简易的逻辑知识. 集合部分主要包括集合的有关概念、集合的表示、集合间的包含关系及集合与集合之间的基本运算. 简易逻辑知识部分主要介绍简单命题和复合命题、命题的四种形式、充要条件等内容.



1.1 集合及其表示方法

1.1.1 集合的概念

知识链接

集合论的由来

集合论是德国数学家格奥尔格·康托尔在19世纪70年代开创的，人们把康托尔于1873年12月7日给戴德金的信中最早提出集合论思想的那一天定为集合论诞生日，并且把现代数学比喻成一株茂密的大树，它包含着而且正在继续生长出越来越多的分枝，而树根就是现代数学各分支的共同基础——集合论.

康托尔(德国数学家,1845—1918)

"集合"一词，我们并不陌生，例如：我们把圆看成是到一个定点的距离等于定长的点的集合，把线段的垂直平分线看成是到这条线段的两个端点距离相等的点的集合，把角的平分线看成是到这个角的两边距离相等的点的集合等. 另外，我们还经常会说"自然数的集合""有理数的集合""不等式 $4x-2>0$ 的解的集合"等.

那么，集合的含义是什么呢？我们再来看下面一些例子：

(1)大于1小于20的所有质数；

(2)所有的正方形；

(3)星星幼儿园2014年9月入园的所有小朋友；

(4)所有的自然数；

(5)方程$(x-1)(x+2)=0$的实数根；

(6)到直线AB的距离等于定长的点；

(7)满足$3x-2>x+3$的全体实数；

(8)2014年10月1日前，所有和中华人民共和国建立外交关系的国家.

它们分别是由一些数、一些图形、一些人、一些点、一些国家组成的，这些数、点、图形、人、国家，可以说是我们研究某个问题的对象.我们把一组对象的全体称为一个集合，集合里的每一个对象叫作这个集合的元素.

例(1)就是一个集合，这个集合由质数2，3，5，7，11，13，17，19组成，2是这个集合的元素，13也是这个集合的元素，这个集合共有8个元素.

集合一般用大写拉丁字母$A,B,C,\cdots$表示，集合的元素一般用小写拉丁字母$a,b,c,\cdots$表示.如果a是集合A的元素，就说a属于集合A，记作$a\in A$，读作"a属于A".如果a不是集合A的元素，就说a不属于集合A，记作$a\notin A$，读作"a不属于A".

若把例(1)中的集合表示为A，则$2\in A,5\in A,17\in A$，而$6\notin A,23\notin A$.

集合的元素有确定性、互异性和无序性等特点.

元素的确定性：给定一个集合，它的元素必须是确定的.也就是说，任何一个元素在不在这个集合中是能够确定的.要么在这个集合中，要么不在这个集合中，二者必居其一.例如"中国的直辖市"构成一个集合，北京、上海、天津、重庆在这个集合中，杭州、郑州就不在这个集合中."身材较高的人"不能构成集合，因为组成它的元素无法确定.

元素的互异性：集合中任何两个元素是互不相同的，当把两个相同的对象并入一个集合时，只能算是一个元素，不能重复写两次.

元素的无序性：集合里元素的排列是没有先后顺序之分的，在集合里交换任何两个元素的顺序，集合并不改变，还是原来的集合.因此判定两个集合是否一样，仅需比较它们的元素是否一样，不需考查排列顺序是否一样.

集合可以简称为集，例如点的集合简称点集、数的集合简称数集.

常用的数集及其表示符号如下：

$\mathbf{N}$表示自然数集，元素为：$0,1,2,3,4,\cdots$；

$\mathbf{N}^*$表示正整数集，元素为：$1,2,3,4,5,\cdots$；

$\mathbf{Z}$表示整数集，元素为：$\cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots$；

$\mathbf{Q}$表示有理数集，由全体有理数组成；

$\mathbf{R}$表示实数集，由全体实数组成.

一个集合的元素如果是有限个，则说这个集合是有限集；如果是无限多个，则说这个集合是无限集；如果只有一个元素，则说这个集合是单元素集；如果不含任何元素，则说这个集合是空集，空集通常用"$\varnothing$"表示.

名题赏析

罗素悖论

一天，萨维尔村理发师挂出一块招牌：村里所有不自己理发的男人都由我给他们理发，我也只给这些人理发. 于是，有人问他："您的头发由谁理呢？"理发师顿时哑口无言.

因为，如果他给自己理发，那么，他就属于自己给自己理发的那类人. 但是，招牌上说他不给这类人理发，因此，他不能给自己理发. 如果由另外一个人给他理发，他就是不给自己理发的人，而招牌上明明说他要给所有不自己理发的男人理发，因此，他应该自己理发. 由此可见，不管怎样的推论，理发师所说的话总是自相矛盾的. 这就是著名的罗素悖论，即"理发师悖论".

这一仅涉及"集合与属于"两个最基本概念的悖论如此简单明了，却使绝对严密的数学陷入了自相矛盾之中. 这就是数学史上的第三次数学危机. 危机产生后，众多数学家投入到解决危机的工作中去. 1908 年，策梅罗提出公理化集合论，后经改进形成无矛盾的集合论公理系统，简称 ZF 公理系统. 这就是集合论发展的第二个阶段.

练习 1.1

1. 下列对象能构成集合的是________.

①某校个子较高的同学；

②倒数等于本身的实数；

③所有的无理数；

④我校一(1)班讲台上的白粉笔；

⑤中国的直辖市；

⑥中国的大城市.

2. 用 $\in$ 或 $\notin$ 填空.

1 ________ $\mathbf{N}$， -3 ________ $\mathbf{N}$， 0 ________ $\mathbf{N}^*$

π ________ $\mathbf{R}$， $\dfrac{22}{7}$ ________ $\mathbf{Q}$， $\cos 30°$ ________ $\mathbf{Z}$

3. 方程 $x^2+2x+1=0$ 的所有实数根组成的集合含（　　）.

A. 0 个元素；　　B. 1 个元素；

C. 2 个元素；　　D. 无数个元素.

1.1.2 集合的表示方法

除了用自然语言描述一个集合之外，常用的表示集合的方法还有列举法、描述法、文氏图法.

1.1.2.1 列举法

我们可以把地球上的四大洋组成的集合表示为{太平洋，大西洋，印度洋，北冰洋}，把方程$(x-1)(x+2)=0$的所有实数根组成的集合表示为$\{1,-2\}$.

像这样把集合的元素一一列举出来，并用花括号“{}”括起来表示集合的方法叫作列举法. 列举法表示集合时，元素与元素之间要用逗号隔开.

例1.1 用列举法表示下列集合：

(1)小于10的所有正偶数组成的集合；

(2)自然数集；

(3)方程$x^2+2x-3=0$的所有实数根组成的集合.

解：(1)设小于10的所有正偶数组成的集合为A，那么，$A=\{2,4,6,8\}$.

由于集合中的元素不分前后顺序，因此，集合A可以有不同的列举方法. 例如$A=\{8,6,4,2\}$，$A=\{4,2,8,6\}$等. 但是为了不遗漏、不重复元素，或是为了表示某种规律，列举元素时，通常是按大小顺序排列的.

(2)$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$

(3)$\because\quad x^2+2x-3=(x+3)(x-1)=0$

$\therefore$ 1和-3是方程的两个根.

设方程$x^2+2x-3=0$的所有实数根组成的集合为B，那么

$$B=\{-3,1\}.$$

1.1.2.2 描述法

我们不能用列举法表示不等式$x-7<3$的解集，因为这个集合中的元素是列举不完的. 但是，我们可以用这个集合中元素所具有的共同特征来描述. 不等式$x-7<3$的解集中所含元素的共同特征是：$x\in\mathbf{R}$且$x-7<3$，所以，我们可以把这个集合表示为

$$D=\{x\in\mathbf{R}\mid x-7<3\}=\{x\in\mathbf{R}\mid x<10\}，也可以简记为D=\{x\mid x<10\}.$$

用集合所含元素的共同特征表示集合的方法称为描述法. 具体方法是：在花括号内先写上表示这个集合元素的一般符号(即代表元)及取值(或变化)范围，再画一条竖线分隔开，在竖线后写出这个集合中元素所具有的共同特征.

代表元如果是实数，通常用x,y,m,n,k等表示，如果是数轴上的点，用$A(x)$，$M(y)$等表示，如果是平面坐标系中的点，用$A(x,y)$，$M(x,y)$等表示.

有时，为了简便起见，也常常直接在花括号内写上元素的公共属性来表示一个集合. 如：

$$\mathbf{N}=\{自然数\}\qquad \mathbf{Z}=\{整数\}$$
$$\mathbf{Q}=\{有理数\}\qquad \mathbf{R}=\{实数\}$$

此时，花括号里不再出现“所有”“全体”等字样了. 花括号表示集合，集合就含有“所有”“全体”的意思了.

例1.2 用描述法表示下列集合：

(1)全体偶数组成的集合,全体奇数组成的集合;

(2)由大于10小于20的所有整数组成的集合.

解:(1)我们用 m 作为偶数的代表元,设偶数的集合为 A,则

$$A=\{m \mid m=2k, k\in \mathbf{Z}\},$$

我们用 n 作为奇数的代表元,设奇数集合为 B,则

$$B=\{n \mid n=2k+1, k\in \mathbf{Z}\}.$$

(2)设大于10小于20的整数为 z,由大于10小于20的所有整数组成的集合为 M,则

$$M=\{z\in \mathbf{Z} \mid 10<z<20\}.$$

想一想 上述集合中的“$k\in \mathbf{Z}$”,“$z\in \mathbf{Z}$”能省略不写吗?为什么?

1.1.2.3 文氏图法

把集合中的全部元素用一条封闭的曲线圈起来表示集合的方法,叫作文氏图法.

图1.1表示由数字1,2,3,4,5组成的集合.由于它直观性强,所以在幼儿教材里常常采用.

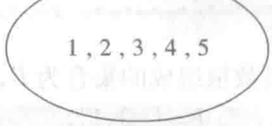


图1.1

知识链接

文氏图的由来

John Venn(约翰·韦恩)是19世纪英国的哲学家和数学家,他在1881年发明了文氏图(也称韦恩图).在剑桥大学的Caius学院的彩色玻璃窗上有对他的这个发明的纪念.

练习1.2

1.用列举法表示下列集合:

(1)$\{x\in \mathbf{N} \mid x$ 是15的正约数$\}$;

(2)$\{(x,y) \mid x\in\{1,2\}, y\in\{1,2\}\}$;

(3) $\left\{(x,y) \mid \begin{cases} x-y=2 \\ x+y=4 \end{cases}\right\}$;

(4) $\{x \mid x=(-1)^n, n \in \mathbf{N}\}$;

(5) $\{x \mid x^2-3x+2=0\}$.

2. 用描述法表示下列集合：

(1) 奇数的集合；

(2) 正偶数的集合；

(3) 不等式 $2x-3>5$ 的解集；

(4) 直角坐标平面内属于第四象限的点的集合；

(5) $\{1,2,3,4,5\}$.

3. 分别用列举法和描述法表示方程 $x^2-1=0$ 的所有实数解构成的集合.

4. 已知集合 $A=\{x \mid ax^2+4x+4=0\}$ 只有一个元素，则 a 的值________.

1.2 子集

观察下面几个例子，你能发现每组中两个集合间的关系吗？

(1) $A=\{1,2\}$, $B=\{1,2,3,4\}$;

(2) $A=\{$星星幼儿园一班的女同学$\}$, $B=\{$星星幼儿园一班的同学$\}$;

(3) $C=\{z \mid z$ 是两条边相等的三角形$\}$, $D=\{z \mid z$ 是等腰三角形$\}$.

可以发现：

(1) 中集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素. 这时我们说集合 A 与集合 B 有包含关系.

(2) 中的集合 A 与集合 B 也有这种关系. 这时我们也说集合 A 与集合 B 有包含关系.

一般地，如果集合 A 中任意一个元素都是集合 B 中的元素，我们就说集合 B 包含集合 A，或说集合 A 包含于集合 B. 称集合 A 为集合 B 的子集(subset)，记作

$$A \subseteq B, \text{或 } B \supseteq A$$

读作"A 包含于 B"，或"B 包含 A".

上述集合 A 和集合 B 的包含关系，可以用图 1.2 表示.

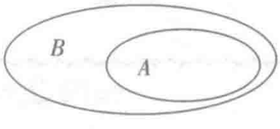


图 1.2

在(3)中，由于"两条边相等的三角形"是等腰三角形，因此，集合 C,D 都是由所有等腰三角形组成的集合. 即集合 C 中任何一个元素都是集合 D 中的元素，同时，集合 D 中任何一个元素也都是集合 C 中的元素. 这样，集合 D 的元素与集合 C 的元素是一样的. 这时我们说两集合相等.

我们也可以用子集概念对两个集合的相等作进一步的数学描述：

一般地，如果集合 A 是集合 B 的子集（$A\subseteq B$），且集合 B 是集合 A 的子集（$B\subseteq A$），那么集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$. 即

$$若\ A\subseteq B\ 且\ B\subseteq A，则\ A=B.$$

一般地，如果集合 A 是集合 B 的子集，存在元素 $z\in B$ 但 $z\notin A$（即 $A\subseteq B$ 但是 $A\neq B$），那么，我们称集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subset B$，读作"集合 A 真包含于集合 B"，或读作"集合 B 真包含集合 A".

例如在(1)中，$A\subseteq B$，但 $4\in B$ 且 $4\notin A$，所以集合 A 是集合 B 的真子集.

由上述集合之间的基本关系，可以得到下列结论：

(1)任何一个集合是它本身的子集，即 $A\subseteq A$；

(2)对于集合 A,B,C，如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$；

(3)空集可以认为是任何集合的子集，即 $\varnothing\subseteq A$；

(4)空集是任何非空集合的真子集，即若 $A\neq\varnothing$，则 $\varnothing\subset A$.

例 1.3 (1)写出集合 $\{a,b\}$ 的所有子集，并指出真子集有哪些；

(2)下列写法是否正确？

①$\varnothing\subseteq A$ ②$\varnothing\subset A$ ③$A\subseteq A$ ④$A\subset A$

解： (1)集合 $\{a,b\}$ 的子集有：$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{a,b\}$.

其中真子集是：$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$.

(2)①正确；②错误，因为 A 可能是空集；③正确；④错误

例 1.4 (1)用适当的符号填空：

$$\mathbf{N}\ \_\_\ \mathbf{Z},\quad \mathbf{N}\ \_\_\ \mathbf{Q},\quad \mathbf{R}\ \_\_\ \mathbf{Z},\quad \mathbf{R}\ \_\_\ \mathbf{Q},\quad \varnothing\ \_\_\ \{0\}$$

(2)若 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-3x-4=0\}$，$B=\{x\in\mathbf{Z}\mid |x|<10\}$，则 $A\subseteq B$ 正确吗？

(3)星星幼儿园中班所有同学组成集合 A，星星幼儿园所有同学组成集合 B，写出 A，B 之间的关系.

解：(1)$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}$，$\mathbf{N}\subset\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}\supset\mathbf{Z}$，$\mathbf{R}\supset\mathbf{Q}$，$\varnothing\subset\{0\}$

(2)$\because A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-3x-4=0\}=\{-1,4\}$，

$B=\{-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，

$\therefore A\subseteq B$ 正确.

(3)A，B 的关系为 $A\subseteq B$.

思考与探究

集合可能和它的真子集元素一样多吗？

对有限集合来讲，这显然是不可能.

对无限集合来讲，则会出现奇妙的现象. 如下图所示，正整数集合和正偶数集合之间可以建立如下一一对应关系，那么，是否能说正整数和正偶数一样多呢？

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \cdots & 2n & \cdots \end{array}$$

（答案见本章最后）

练习 1.3

1. 判定以下表示方法是否正确：

(1) $\{a\} \subseteq \{a\}$；

(2) $\{1,2,3\} = \{3,2,1\}$；

(3) $\varnothing \subset \{0\}$；

(4) $0 \in \{0\}$.

2. 写出集合 $\{1,2,3\}$ 的所有子集，并指出哪些是真子集.

1.3 集合的基本运算

1.3.1 全集和补集

如果集合 S 含有我们所要研究的各个集合的全部元素，这个集合就可以看作是全集，设 A 是 S 的一个子集（如图 1.3），由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫作 S 中子集 A 的补集（或余集），记作 $\complement_S A$，即

$$\complement_S A = \{x \mid x \in S, 且\ x \notin A\}$$

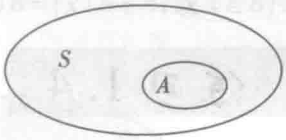


图 1.3

想一想 $\complement_S(\complement_S A) = ?$，$\complement_S S = ?$，$\complement_S \varnothing = ?$

例 1.5 若 $S = \{1,2,3,4,5,6\}$，$A = \{1,3,5\}$，求 $\complement_S A$.

解：由补集的定义得 $\complement_S A = \{2,4,6\}$

例 1.6 求证：

(1) 若 $A = \{0\}$，则 $\complement_{\mathbf{N}} A = \mathbf{N}^*$.

(2) $\complement_{\mathbf{R}} \mathbf{Q}$ 是无理数集.