应用型本科（中职本科）数学规划教材

线性代数

Linear Algebra Synchronous Training

同步训练

主　编　刘连福

东北大学出版社
Northeastern University Press

应用型本科（中职本科）数:

线性代数同步训练

主 编 刘连福
副主编 杨俊平 冯 丽

东北大学出版社
·沈 阳·

图书在版编目(CIP)数据

线性代数同步训练 / 刘连福主编．—沈阳：东北大学出版社，2014．8
ISBN 978－7－5517－0790－9

Ⅰ．①线…　Ⅱ．①刘…　Ⅲ．①线性代数—高等学校—习题集　Ⅳ．①O151．2－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 204208 号

出 版 者：东北大学出版社
　　地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
　　邮编：110819
　　电话：024—83680267(社务室)　83687331(市场部)
　　传真：024—83680265(办公室)　83680178(出版部)
　　网址：http://www.neupress.com
　　E-mail：neuph@neupress.com
印 刷 者：抚顺光辉彩色广告印刷有限公司
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：185mm × 260mm
印　　张：6.75
字　　数：160 千字
出版时间：2014 年 8 月第 1 版
印刷时间：2014 年 8 月第 1 次印刷
组稿编辑：刘宗玉
责任编辑：潘佳宁
责任校对：叶　子
封面设计：刘江旸
责任出版：唐敏志

ISBN 978－7－5517－0790－9　　　　定　　价：18.00 元

前　言

进入21世纪以来,高等教育迅猛发展、科学技术日新月异,加之计算机的广泛应用及数学软件的普及,对基础课特别是数学课教材提出了更新、更严格的要求。特别是最近几年,国家对应用型人才的培养尤其重视,提出发展应用型本科教育的新理念。正是在这样一种形势下,我们在总结多年本科数学教学经验、探索应用型本科数学教学发展动向、分析国内外同类教材发展趋势的基础上,编写出这套适于应用型本科理工、经管各专业使用的数学教材。

这套"应用型本科(中职本科)数学规划教材"是根据国家中长期教育改革和发展规划纲要要求,专门针对应用型本科(中职本科)学生,并兼顾专升本学生而编写的一套数学教材。教材内容充分考虑了学生的数学基础和实际水平,并结合数学课程教学内容体系改革,以"掌握概念、强化应用、培养技能"为重点,充分体现了以应用为目的人才培养目标,兼顾了不同专业后续课程教学对数学知识的要求,是对后续教学和学生可持续发展(继续教育)的一个恰到好处的基础支撑。

本书为《线性代数同步训练》,是这套教材中的一个分册。本书章节安排与《线性代数》完全一致,具体有矩阵、行列式、向量组的线性相关性、线性方程组、相似矩阵及二次型,主要内容是与《线性代数》相配套的同步训练习题。

本书是按教学大纲的要求配备习题,重点突出基础模块部分,目的是让学生迅速而全面地掌握基本概念和基本理论。每章按每节课配有基础训练习题,章后配备两套综合训练题,可用于单元练习及测试,书后配有期末全程测试二套,供学生期末综合复习时使用。同时,这本书的形式为学生的作业本,比较规范,既便于学生书写、保留,又便于教师批改。书后没有附上相应的习题解答,目的在于培养学生独立思考意识、提高其解决问题的能力。

本套教材由刘连福担任主编,杨俊平、冯丽担任副主编。

本书适合应用技术本科学生使用。由于编者水平所限,书中难免有不妥之处,恳请专家、同仁不吝赐教。

编　者

2014年3月

目　录

第一章 矩　　阵

第一部分　基础模块

习题 1－1

一、填空题

1. 写出三阶单位矩阵：____________；

2. 四阶对角矩阵的具体形式为____________________.

二、简答题

1. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 4 & -1 & 2\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & x+y & 3\\ x-y & -1 & -z\end{bmatrix},$$

已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，求 x,y,z；

2. 线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-x_4=1,\\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4=2,\\ 3x_1+x_2+x_3-4x_4=-3,\\ x_1-x_2+2x_3+2x_4=5. \end{cases}$$

试写出该方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$（方程组的系数按原来的次序排成的矩阵）和增广矩阵 $\boldsymbol{B}$（方程组的系数、常数项按原来的次序排成的矩阵）.

习题 1－2

一、填空题

1. 若 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{7\times 8}$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{8\times 10}$，则 $\boldsymbol{AB}=[c_{ij}]$ _____ × _____；$c_{45}=$ ________；

2. 两个矩阵既可以相加又可以相乘的充要条件是 ______________；

3. $[1,2]\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=$ ______________，$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}[1,2]=$ ________；

4. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i$ 的矩阵表示为______________，$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ 的矩阵表示为 ______________；

5. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=$ ________；

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，当 $\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{A}$ 时，$\boldsymbol{E}$ 是________阶单位矩阵；

7. 若矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times l}$ 与 $\boldsymbol{B}_{p\times n}$ 可作乘法运算，则 l ________ p.

二、判断题（对的画√，错的画×）

设有 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，则

1. $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$； (　　)

2. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$； (　　)

3. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$； (　　)

4. $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$； (　　)

5. 若 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是反对称矩阵，即 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}^2$ 是对称矩阵，$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}$ 是反对称矩阵； (　　)

6. 若 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$，则未必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$； (　　)

7. 一般来说 $(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$. (　　)

三、计算题

1. 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & -2 & 4\\ 0 & 5 & 1\end{bmatrix},$$

求 $3\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$；

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$,又 $f(x)=x^2-3x+2$,求 $f(\boldsymbol{A})$;

3. 已知 $\boldsymbol{\alpha}=[1,2,3]$,$\boldsymbol{\beta}=[1,-1,2]$,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$, 求 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{A}^4$;

4. 已知两个线性变换

$$\begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_3, \\ x_2 = -2y_1 + 3y_2 + 2y_3, \\ x_3 = 4y_1 + y_2 + 5y_3, \end{cases} \begin{cases} y_1 = -3z_1 + z_2, \\ y_2 = 2z_1 + z_3, \\ y_3 = -z_2 + 3z_3, \end{cases}$$

求从 z_1,z_2,z_3 到 x_1,x_2,x_3 的线性变换.

习题 1－3

一、填空题

1. $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$,$a,b,c$ 均不为零,则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$________;

2. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,数 $\lambda \neq 0$,则 $\lambda\boldsymbol{A}$ 可逆,且$(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=$________;

3. 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$亦可逆,且$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=$________.

二、证明与计算题

1. 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是同阶矩阵,且 $\boldsymbol{A}$ 可逆,证明:若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$;

2. 化简$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{BA})[\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})^{-1}\boldsymbol{A}]$,其中$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{AB})$为可逆矩阵.

习题 1－4

一、填空题

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为两个 n 阶分块对角矩阵，

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{B}_s\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{B}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 为同阶子块矩阵，则 $\boldsymbol{AB}=$ ____________________；

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为分块对角矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{bmatrix},$$

若 $\boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,s)$ 都可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$ ________.

二、计算题

1. 用分块法求 $\boldsymbol{AB}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{bmatrix};$$

2. 设

$$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{bmatrix},$$

求 A^{-1},其中

$$\begin{bmatrix}3&1\\2&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&-1\\-2&3\end{bmatrix};$$

3. 设

$$A\begin{bmatrix}3&4&0&0\\4&-3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&2&0\end{bmatrix},$$

求 A^4.

习题 1－5

一、填空题

1. 矩阵的初等行变换是指下列三种变换：(1)________，(2)________，(3)________；
2. 若 $\boldsymbol{A}$ 是________矩阵，则 $\boldsymbol{A} \leftrightarrow \boldsymbol{E}$；
3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，则存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使 $\boldsymbol{PAQ}=$________，其中 r 随矩阵 $\boldsymbol{A}$ 而定；
4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是可逆方阵，则存在有限个初等方阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_i$，使得 $\boldsymbol{A}=$________；
5. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 求逆的一个简便有效的方法——初等行变换求逆法：________________.

二、计算题

1. 用初等行变换把矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 & 3 & 7 \\ 2 & -3 & 0 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 5 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

化为行阶梯形矩阵；

2. 用初等行变换把矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & 8 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

化为行最简形矩阵；

3. 用初等行变换法求矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

的逆矩阵;

4. 已知矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix},$$

且满足 $AX=A+2X$,试求矩阵 X.

第二部分 综合训练

综合训练(一)

一、填空题

1. 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & -1\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}=$________;

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵,则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=$________;

3. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=[1,-2,3]$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 0\\0 & -2\end{bmatrix}$,则 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=$________;

4. $\begin{bmatrix}3 & 2\\4 & -1\end{bmatrix}^{-1}=$________;

5. 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆,$\boldsymbol{ABX}=\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{X}=$________;

6. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{A}^4=$________;

7. $(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=$________;

8. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{C})=\boldsymbol{O}$,$A(B+C)=\boldsymbol{O}$,$A$ 可逆,则 $B=$________,$C=$________.

二、选择题

1. $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆,$\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$的逆为(　　)

   A. $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1}\end{bmatrix}$

   C. $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{-1}\\\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $s\times n$ 矩阵,则运算有意义的是(　　).

   A. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}B$　　B. $\boldsymbol{AB}$

   C. $\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}$　　D. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$

3. 线性方程组$\begin{cases}2x_1+x_2=2,\\x_2-x_3=0\end{cases}$的系数矩阵是(　　).

   A. 2×3 矩阵　　B. 3×2 矩阵

   C. 3 阶矩阵　　D. 2 阶矩阵

4. 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆,$\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{X}=$(　　).

   A. $\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$　　B. $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}$

   C. $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}$　　D. $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{CA}^{-1}$

5. 以下结论正确的是(　　).

   A. 若 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵,则 $\boldsymbol{A}^2$ 也为对称矩阵

   B. 对于任意的同阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均有 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$

C. 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为反对称矩阵,则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵

D. 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵,则 $\boldsymbol{AB}$ 也为对称矩阵

三、计算题

1. 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix},$$

求 $\boldsymbol{AB}-3\boldsymbol{B}$;

2. 用初等行变换法求矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -3 & 4\\ 2 & -3 & 4\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

的逆矩阵;