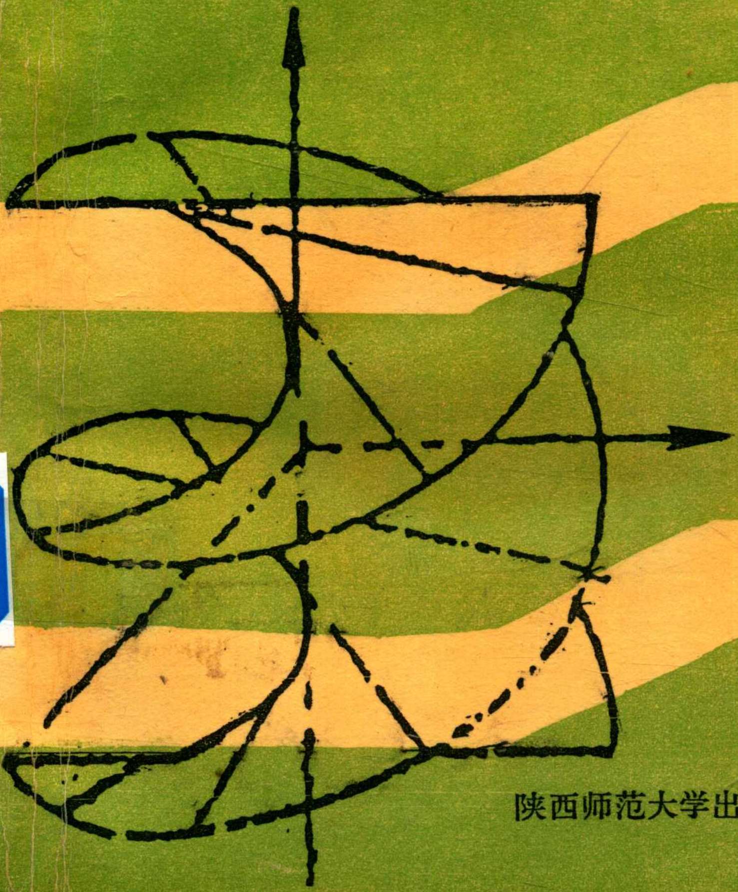
微分流形与黎曼几何

DIFFERENTIABLE MANIFOLDS AND RIEMANNIAN GEOMETRY

纪永强　许志才　著



陕西师范大学出版社

微分流形与黎曼几何

Differetiable Manifolds and Riemannian Geometry

纪永强 许志才 著

陕西师范大学出版社

(陕)新登字 008 号

微分流形与黎曼几何

纪永强　许志才　著

陕西师范大学出版社出版发行
(西安市陕西师大 120 信箱　邮政编码 710062)
新华书店经销　　西安市周至县印刷厂印刷
开本 850×1168　1/32　印张 10.875　字数 272 千
1994 年 7 月第 1 版　1994 年 7 月第 1 次印刷
印数 1—1000
ISBN7－5613－1031－5/G・774
定　价：6.50 元

前　言

在王新民教授的亲切关怀下，我们编写了这本书。其指导思想是：着重体现现代微分几何的特点，尽量将内容写得通俗易懂。书中，一方面系统地介绍了微分几何中的向量场、外形式和活动标架法，另一方面，对微分几何中的某些专题，如极小子流形和等参超曲面作了详细的阐述。希望此书对那些想了解微分几何方法的人或想进一步研究微分几何中更加深刻结果的人能有所帮助。

本书共分九章。第一章，介绍高等微积分及拓扑空间的一些知识，它们是学习以后各章所必须具备的。第二章，讨论微分流形、切空间、余切空间以及相应的映射等概念，并广泛研究了有关性质，给出了大量的例子。第三章，介绍张量场和外微分，它们是研究当代微分几何的两大基本工具。第四章，介绍了流形上的积分和Stokes 公式，这是研究流形整体性质的常用方法。第五章，引进联络和共变导数的概念，讨论了测地线以及平行移动。第六章，讨论黎曼流形的基本性质，它是进一步学习黎曼几何的必不可少的基础。第七、八两章，研究黎曼子流形，包括 Gauss 方程、Cadazzi 方程、Ricci 方程和极小子流形等。第九章，详细讨论了等参超面曲，介绍了作者们的研究成果。

本书前五章由纪永强编写，后四章由许志才编写，其中§7.5中大部分内容是纪永强的研究成果。王新民教授仔细阅读过手稿，提出了许多指导性建议，并最后通审了全稿。本书大部分内容曾在宁夏大学数学系开设的“微分几何选修课”中讲授过两次。实践表明，按本书的处理方法，既便于教，也便于学，教学效果较好。

在本书的写作过程中，始终得到我们的导师王新民教授的热情支持、亲切关怀和指导。宁夏大学科研处对本书的出版给予了资

助，陕西师范大学出版社的同志对本书的出版给予了很大的帮助，作者在此一并向他们表示衷心感谢。

限于我们的水平，书中谬误在所难免，敬请同行、读者批评指教。

作　者

1994 年 6 月

内 容 简 介

本书系统地介绍了现代微分几何的基础知识，并着重讨论了黎曼子流形的几何。内容包括：微分流形、张量、外微分、流形上的积分、联络、黎曼子形流和等参超曲面。

此书适用于高等院校数学专业和理论物理专业的高年级学生、研究生阅读，也可供一般的数学工作者、物理工作者参考。

目　录

第一章　预备知识

本章讨论模与代数、多重线性映射、多元函数及映射的微分、欧氏空间中的秩定理和点集拓扑学的有关知识，它们在以后各章都要用到.

§ 1.1　模与代数的概念

1. 交换群 V

定义 1.1.1　如果集合 V 中有一种加法，即对任意 $\alpha,\beta\in V$，有 $\alpha+\beta\in V$，并且满足

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$；

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$；

(3) 存在零元 $0\in V$，使对任意 $\alpha\in V$，有 $0+\alpha=\alpha$；

(4) 对任意 $\alpha\in V$，存在 α 的逆元 $-\alpha\in V$，使 $\alpha+(-\alpha)=0$.

则称 $(V,+)$ 是交换加群.

2. 环 F

定义 1.1.2　如果集合 F 中有两种运算加法和乘法，即对任意 $a,b\in F$，有 $a+b\in F$，$a\cdot b\in F$，且满足

(1) $(F,+)$ 是加法交换群；

(2) $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$；

(3) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$；$(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$. 则称 $(F,+,\cdot)$ 是一个环.

3. 域 F

定义 1.1.3 设$(F,+,\cdot)$是一个环,并且满足

(1) 至少存在$a\neq 0$, $a\in F$;

(2) 存在单位元$1\in F$,使对任意$a\in F$,有$1\cdot a=a$;

(3) 对任意$a\in F$,存在a的(乘法)逆元$a^{-1}\in F$,使$a\cdot a^{-1}=1$;

(4) $a\cdot b=b\cdot a$.

则称$(F,+,\cdot)$是一个域,只满足(1) (2) (3) 的环F叫除环.故域是交换除环.当F中的元素是数时,F叫数域.例如,有理数域,实数域,复数域等.

4. 数域F上的向量空间V

定义 1.1.4 如果集合V中有一种加法和数乘,即对任意$\alpha,\beta\in V$, $a\in F$(数域),有$\alpha+\beta\in V$, $a\cdot\alpha\in V$,且满足

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) 存在$0\in V$,使$\forall\alpha\in V$,有$0+\alpha=\alpha$;

(4) $\forall\alpha\in V$,存在$-\alpha\in V$,使$\alpha+(-\alpha)=0$;

(5) $a(\alpha+\beta)=a\alpha+a\beta$;

(6) $(a+b)\alpha=a\alpha+b\alpha$;

(7) $(ab)\alpha=a(b\alpha)$;

(8) $1\cdot\alpha=\alpha$.

其中$a,b,1\in F$, $\alpha,\beta,\gamma\in V$,则称V是数域F上的向量空间.

5. 环F上的模V

定义 1.1.5 (1) 设V是环F上的向量空间,则称V是环F上的(左)幺模.(2) 设F是环V只满足向量空间的(1)—(7),则称V是F上的(左)模.

注 数域F上的向量空间V是一个交换加群,也是数域F上的(左)幺模.

6. 环F上的代数V

定义1.1.6 设F是一个有单位元的交换环，F上的代数V是一个环，使得

(1) (V，+，数乘) 是F上的(左) 幺模；

(2) $a(\alpha\cdot\beta)=(a\alpha)\cdot\beta=\alpha\cdot(a\beta)$，$\forall\ a\in F$，$\alpha,\beta\in V$成立。

注 当F是域时，V叫域F上的代数。

例1 设$V=M_{nn}(R)$是实数域R上的全体$n\times n$矩阵的集合，$\forall\ A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})\in V$。定义加法、数乘及乘法如下：

$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$，$aA=(a\cdot a_{ij})$，$AB\triangleq(c_{ij})$，其中$c_{ij}=\sum\limits_{K=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$，则($V$，+，数乘) 是$R$上的向量空间，因为$AB\in V$，$A(BC)=(AB)C$，$A(B+C)=AB+AC$，$(B+C)A=BA+CA$，所以($V$，+，·) 是环，又因为$a(AB)=(aA)B=A(aB)$，其中$a\in R$，所以$V$是实数域$R$上的一个代数，称为矩阵代数。

注 $M_{nm}(R)$是向量空间，但乘法无意义。

例2 设V是n维向量空间，$L(V;V)=\{f\mid f:V\to V,f(av_1+bv_2)=af(v_1)+bf(v_2),a,b\in R,v_1,v_2\in V\}$是$V$上的全体线性变换构成的集合，在$L(V;V)$中定义加法、数乘和乘法：

$(f+g)(v)=f(v)+g(v)$，$(af)(v)=af(v)$，$(f\cdot g)(v)=f(g(v))$ 其中$f,g\in L(V;V)$，$a\in R$，$v\in V$，易证$f+g$，af，$f\cdot g\in L(V;V)$，并且($L(V;V)$，+，·) 是R上的代数。

例3 设$R[x]$是实数域R上的全体一元多项式之集，则$R[x]$按多项式的加法、数乘及多项式的乘法是R上的一个代数。

注 线性代数研究的内容是：代数$M_{nn}(R)$及代数$L(V;V)$，而行列式是代数$M_{nn}(R)$上的实值函数：$\det\triangleq f:M_{nn}(R)\to R$，

$$f((r_{ij}))=\begin{vmatrix}r_{11}\cdots r_{1n}\\ \cdots\cdots\cdots\\ r_{n1}\cdots r_{nn}\end{vmatrix}\in R$$

有了行列式可得n个n元一次方程组(线性方程组) 的求解问题，

而矩阵A与线性变换f是一一对应，在向量空间V上定义内积后，则V是欧氏空间，所以线性代数包括：$M_m(R)$；$L(V;V)$；行列式；方程组；欧氏空间．若再加上多项式代数就是高等代数的内容．

注： 初等代数研究的是实数域和复数域上的代数R及C．

§1.2 多重线性映射

1．线性映射

定义1.2.1 设$F:E\to V$是向量空间之间的映射，若

$$F(ax+by)=aF(x)+bF(y) \qquad (1.2.1)$$

对任意$x,y\in E$，$a,b\in R$成立，则称F是线性映射．

特别 (1) 当$V=E$时，满足(1.2.1)的$F:E\to E$称为线性变换．

(2) 当$V=R$时，满足(1.2.1)的$F:E\to R$称为E上的函数．

(3) 当$E=R$时，满足(1.2.1)的$F:R\to V$称为V中的线性曲线(直线)．

令$L(E;V)=\{F|F:E\to V$是线性映射$\}$，在其中定义加法和数乘：

$$(aF+bG)(x)\triangleq aF(x)+bG(x) \qquad (1.2.2)$$

其中$a,b\in R$，$F,G\in L(E;V)$，$x\in E$，则对任意$a_1,a_2\in R$，$x_1,x_2\in E$我们有

$$\begin{aligned}&(aF+bG)(a_1x_1+a_2x_2)\\&=aF(a_1x_1+a_2x_2)+bG(a_1x_1+a_2x_2)\\&=aa_1F(x_1)+aa_2F(x_2)+ba_1G(x_1)+ba_2G(x_2)\\&=a_1[(aF+bG)(x_1)]+a_2[(aF+bG)(x_2)]\end{aligned}$$

所以$aF+bG\in L(E;V)$，故定义合理．易证$L(E;V)$是实数域R上的向量空间．

例1 设$F:R^1\to R^2$，$F(x)\triangleq(x,kx)$，$F(R^1)$是R^2上的直线．易证$F\in L(R^1;R^2)$．

例 2 设 $F: R^2 \to R^2$, $F(x) \triangleq (x_1\cos\theta + x_2\sin\theta, -x_1\sin\theta + x_2\cos\theta)$，其中 $x = (x_1, x_2) \in R^2$，θ 是固定的旋转角，易证 $F \in L(R^2; R^2)$.

定理 1.2.2 $f: R^n \to R$ 是 R^n 上的线性函数 $\Leftrightarrow$ 对任意 $x = (x_1, \cdots, x_n) \in R^n$，有

$$f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \tag{1.2.3}$$

证明 "$\Rightarrow$" 设 $e_1, \cdots, e_n$ 是 R^n 的标准正交基，则 $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$，因 f 线性，所以

$$f(x) = x_1f(e_1) + \cdots + x_nf(e_n) \triangleq a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$

其中 $a_i = f(e_i)$，$i = 1, \cdots, n$.

"$\Leftarrow$" 设 $x = (x_1, \cdots, x_n)$，$y = (y_1, \cdots, y_n) \in R^n$，则对任意 $a, b \in R$，有 $ax + by = (ax_1 + by_1, \cdots, ax_n + by_n)$，从而

$$\begin{aligned} f(ax + by) &= \sum_{i=1}^{n} a_i(ax_i + by_i) \\ &= af(x) + bf(y) \qquad \square \end{aligned}$$

2. 双线性映射

定义 1.2.3 设 E_1, E_2, V 是向量空间，映射 $F: E_1 \times E_2 \to V$ 称为双线性映射，若

$$\begin{cases} F(ax + b\tilde{x}, y) = aF(x, y) + bF(\tilde{x}, y) \\ F(x, ay + b\tilde{y}) = aF(x, y) + bF(x, \tilde{y}) \end{cases} \tag{1.2.4}$$

其中 $x, \tilde{x} \in E_1$，$y, \tilde{y} \in E_2$，$a, b \in R$.

全体双线性映射 $F: E_1 \times E_2 \to V$ 构成的集合 $L(E_1, E_2; V)$ 也是 R 上的向量空间.

类似可定义 r 重线性映射 $F, E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_r \to V$.

例 3 设 $F: R^n \times R^n \to R$, $F(x, y) \triangleq \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$，其中 $x = (x_1, \cdots, x_n)$，$y = (y_1, \cdots, y_n) \in R^n$，易证 $F \in L(R^n, R^n; R)$.

例 4 设 $C_{[a,b]}$ 是 $[a, b]$ 上连续函数所成的向量空间，对任意

$f, g \in C_{[a,b]}$，定义 $F: C_{[a,b]} \times C_{[a,b]} \to R$ 为

$$F(f, g) \triangleq \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

易证 $F \in L(C_{[a,b]}, C_{[a,b]}; R)$.

3. 对偶空间

设 V 是 n 维向量空间，令 $V^* = L(V; R)$，即 V^* 是 V 上的全体实值线性函数构成的向量空间，我们称 V^* 是 V 的对偶空间.

定理 1.2.4 $\dim V^* = \dim V = n$.

证明 设 $e_1, \cdots, e_n$ 是 V 的一组基，定义映射 $\varphi: V^* \to R^n$ 为

$\varphi(f) \triangleq (f(e_1), \cdots, f(e_n))$

其中 $f \in V^*$，下面证明 $V^* \cong R^n$.

(i) φ 是线性映射

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha f + \beta g) &= ((\alpha f + \beta g)(e_1), \cdots, (\alpha f + \beta g)(e_n)) \\ &= (\alpha f(e_1) + \beta g(e_1), \cdots, \alpha f(e_n) + \beta g(e_n)) \\ &= \alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g)\end{aligned}$$

(ii) φ 是单射

设 $\varphi(f) = \varphi(g)$，即 $(f(e_1), \cdots, f(e_n)) = (g(e_1), \cdots, g(e_n))$，从而得 $f(e_i) = g(e_i)$ 即 $(f - g)(e_i) = 0, i = 1, \cdots, n$，因为 $e_1, \cdots e_n$ 是 V 的基，所以 $f = g$.

(iii) φ 是满射

任意 $(a_1, \cdots, a_n) \in R^n$，定义映射 $f: V \to R$ 为

$$f(e_i) \triangleq a_i, \ f(x) \triangleq \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

其中 $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in V$，易证 $f \in V^*$，从而 $\varphi(f) = (f(e_1), \cdots, f(e_n)) = (a_1, \cdots, a_n)$，故 $V^* \cong R^n$，所以 $\dim V^* = \dim R^n = n = \dim V$. □

设 $e_1,\cdots,e_n$ 是 V 的一组基，$\forall\, x \in V$，有 $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$，在 V 上定义一组函数 $e_i^* : V \to R$ 为

$$e_i^*(e_j) \triangleq \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j, \end{cases} \quad e_i^*(x) \triangleq \sum_{j=1}^{n} x_j e_i^*(e_j) = x_i$$

易证 $e_i^* \in V^*$，并且 $e_1^*,\cdots,e_n^*$ 线性无关，$\forall\, f \in V^*$，有

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)e_i^*$$

我们称 V^* 的基 $e_1^*,\cdots,e_n^*$ 为 V 的基 $e_1,\cdots,e_n$ 的对偶基.

§1.3　n 维数空间 R^n

$$R^n = \underbrace{R^1 \times R^1 \times \cdots \times R^1}_{n\text{个}} = \{x = (x_1,\cdots,x_n) \mid x_i \in R\}$$

1. R^n 是向量空间

设 $e_i = (0,\cdots,0,\underset{(i)}{1},0,\cdots,0)$，$i = 1,\cdots,n$，则 $e_1,\cdots,e_n$ 是 R^n 的一组基，对任意 $x,y \in R^n$，则 $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \triangleq (x_1,\cdots,x_n)$，$y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i \triangleq (y_1,\cdots,y_n)$，在 R^n 中定义加法和数乘为

$$x + y \triangleq \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)e_i \triangleq (x_1 + y_1,\cdots,x_n + y_n)$$

$$ax \triangleq \sum_{i=1}^{n} (ax_i)e_i \triangleq (ax_1,\cdots,ax_n) \tag{1.3.1}$$

其中 $a \in R$，则 $(R^n, +, \cdot)$ 是 R 上的 n 维向量空间.

2. R^n 是欧氏(内积)空间

定义 1.3.1　向量空间 V 的内积是映射 $g: V \times V \to R$，满足

(1) 对称性　$g(x,y) = g(y,x)$；

(2) 正定性　$g(x,x) \geqslant 0$，且 $g(x,x) = 0 \iff x = 0$；

(3) 双线性　$g(ax+b\tilde{x},y)=ag(x,y)+bg(\tilde{x},y)$

$$g(x,ay+b\tilde{y})=ag(x,y)+bg(x,\tilde{y}).$$

其中 $x,\tilde{x},y,\tilde{y}\in V,a,b\in R$,$(V,g)$ 称为内积空间.

注　我们也可以用 $x\cdot y$ 或 (x,y) 表示 x 与 y 的内积.

现在我们在 R^n 中定义内积

$$g(x,y)\triangleq\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \tag{1.3.2}$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n),y=(y_1,\cdots,y_n)\in R^n$,显然 (R^n,g) 是内积空间. 我们称由(1.3.2)定义的内积为 R^n 上的通常内积,当然我们也可以在 R^n 上定义其它内积,如 $g(x,y)\triangleq x_1y_1+2x_2y_2+\cdots+nx_ny_n$.

定理 1.3.2　对一般欧氏内积空间 (V,g),Schwarz 不等式成立:

$$g^2(x,y)\leqslant g(x,x)\cdot g(y,y) \tag{1.3.3}$$

证明　因 $0\leqslant g(x-ty,x-ty)=g(y,y)t^2-2g(x,y)t+g(x,x)$,$\forall\ t\in R$ 成立,所以判别式 $\triangle=4g^2(x,y)-4g(x,x)\cdot g(y,y)\leqslant 0$,从而 $g^2(x,y)\leqslant g(x,y)\cdot g(y,y)$　□

注　对于欧氏空间 (R^n,g),由(1.3.2)知,(1.3.3)式为

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2 \tag{1.3.4}$$

3. R^n 是赋范向量空间

定义 1.3.3　向量空间 V 的范数是映射 $\|\ \|:V\to R,x\to\|x\|$,满足

(1) 正定性　$\|x\|\geqslant 0$,且 $\|x\|=0\ \Leftrightarrow\ x=0$;

(2) 齐性　$\|ax\|=|a|\,\|x\|$;

(3) 三角不等式　$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$.

其中 $x,y\in V,a\in R$,称 $(V,\|\ \|)$ 为赋范向量空间.

我们在 R^n 中定义范数如下: