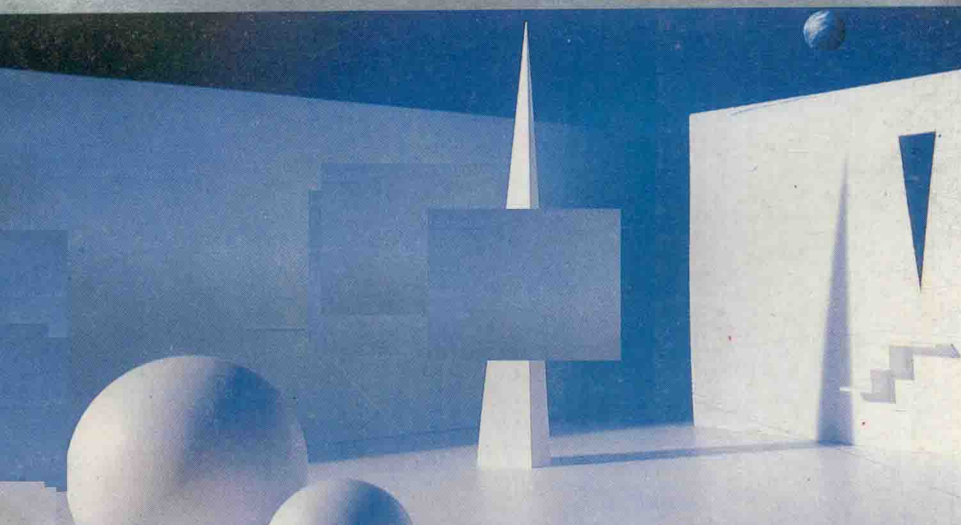
数学心理素质的形成与培养

——解题心理过程概论

李星云　编著



四川教育出版社

数学心理素质的形成与培养
——解题心理过程概论

李星云　编著

四川教育出版社
1994年·成都

(川)新登字 005 号

责任编辑　李岷聪
封面设计　何一兵

数学心理素质的形成与培养
——解题心理过程概论　　李星云　编著

四川教育出版社出版　　(成都盐道街三号)
四川教育出版社发行　　四川省印刷技术协会印刷厂印刷

开本 850×1168 毫米　1/32　印张 6.25　插页 2　字数 156 千
1994 年 5 月第一版　　1994 年 5 月第一次印刷
印数:1—2000 册

ISBN7－5408－2348－8/G・2267　　定价:5.20 元

前　言

在中小学生学习数学过程中，解答数学问题，对巩固他们所学的知识，培养和提高他们分析问题、解决问题的能力以及发挥创造性，均有着极其重要的意义。

近十年来，中国数学教育界出现了“波利亚热”。乔治·波利亚(George Polya)是美籍匈牙利数学家和教育家。他的一生与数学解题结下了不解之缘，他亲自解决的各种数学难题可谓成千上万。由于数十年的积累，他从中研究出数学解题的规律，并出版了饮誉全球的《怎样解题》(How to Solve it)一书。在数学解题思维这一极其艰难而复杂的课题上，取得了巨大的成就，也给我们建立中国式的数学解题理论提供了借鉴。

然而，还应该看到的是：数学解题，是以思考为内涵，以问题目标为定向的心理活动过程。解题方法的寻求，是一个思维策略过程，其内容是寻找对策，其特点在于突出怎样思维。尽管思维策略本身并不一定就是解题，但它可以促进探索，促进发现解题途径。所以，研究数学解题，既要强调数学模型的陶冶，也要注意吸取现代心理学、教育心理学、思维科学等学科的有关原理方法，将数学

解题的技能技巧与解题者的心理过程有机地结合起来，才能揭示出数学思维品质、数学能力的培养途径和发展方向。这就是本书编写的基本观点。

本书编著是以《中小学数学教材教法》课的实践和有关数学解题的课题实验研究为基础，密切联系中小学数学教学，尤其是解题教学的理论与实践，旨在为中小学生提供一部内容新颖的数学学习辅导读物，为数学教师提供一部有益的参考用书。

本书的编写，始终得到南京师范大学冯家鸿先生的精心指教，深以为谢。南京师范大学施宜生先生、南京军区空军刘俊先生、宋柏伟先生、黄春华先生为本书的成稿也都给予了很大的帮助，也谨致谢意。另外，还要衷心感谢四川教育出版社李岷聪先生对本书的编写建议和热情支持。

限于水平，书中错误和疏漏在所难免，敬请同行及广大读者不吝指正。

作　者

1993年8月

于南京师范大学西山

目　录

第一章　数学解题的教育心理学依据

数学解题是一个复杂的认识过程。如果把科学数学和学科数学之间的相互关系作为分析这个过程的基础，那么叫做教学论的分析。如果从引导解题者怎样解题的角度来研究这一过程，那么称为数学教学法研究。然而，解题过程的主角是解题者，其表现出来的感知、操作、表象、变式、比较、判断、推理、抽象、概括等，都是他们由感性向理性飞跃这一认识渠道中的心理学问题。所以通过解题者在这一过程中的各种活动，来研究和分析解题者如何从旧知中生发新知，从已知中探求未知的认识途径，这就是所谓的教育心理学问题。当然，数学解题过程中的各种分析和研究都是相互联系和相互作用的，每一种分析和研究都要以其他各类的结果作为基础。但是作为主导和基本的，还应是教育心理学规律的分析，因为它为数学解题的理论和方法提供了心理学方面的依据。在本章中，将结合数学问题的组成成分，以及智力活动方式、数学思维品质等，着重介绍一下数学解题的基本教育心理分析。

一　数学问题及其组成

所谓问题，一般认为是“人没有认识而应该认识的东西”；或是“人认识的已知部分与被认识的未知部分的距离”；或是“认识主体与认识对象之间的距离”。教育心理学则认为是“疑难和矛盾，是一种没有直接明确的方法和途径可遵循的情境”。问题最显著的特征是相对性，也即因人因时而异，对某人是问题，对另一个人可能就不是问题；对同一人而言，过去是问题，现在可能就不成为问题。

如果对某人来说，一个关于数学的系统的全部元素、元素的性质和元素的关系，都是他所知道的，那么这个系统对于他就是稳定系统。如果这个数学系统中至少有一个元素、性质或关系是这个人所不知道的，那么这个数学系统对于他就是一个数学问题。

因此，一个数学系统能否算得上是数学问题，与接触它的人有关。比如，众所周知的“哥德巴赫猜想”、“费尔马猜想”等，对试图解决它的所有人而言都是数学问题。“用圆规和直尺三等分一个给定的任意角”、“求五次方程的求根公式”、“四色猜想”等，对于某些人它们是数学问题，而对于另一些人，它们则不是数学问题。

数学问题作为一种情境，自然是多种多样的。美国原子论的代表人物布鲁姆(Bloom)根据心理学的研究成果，将数学问题进行了这样的分类：知识性问题、领会性问题、运用性问题、分析性问题、综合性问题、评价性问题。各类问题之间，又具有内在的逻辑一

致性。而美国另一位心理学家富勒(Fuller)则按照情境的相似,将数学问题作出以下分类:确定性问题、探索性问题、论断性问题、分析性问题、组合性问题、评价性问题、证明性问题、创造性问题。很显然,上述两种数学问题的分类,是以数学情境的共同点及有别于其他情境的差异点,或者说情境的共性与特殊性为根据的。

但是,不论怎样分类,所划分出来的这些数学问题虽然名称不一,叙述的内容各有所异,它们却有一个共同的特点,都是在一定的知识背景中提出的。知识背景主要包括已有的概念、理论和方法。因此,我们认为,依照数学问题的解答与知识背景的关系,可以把数学问题大致分为这样两类:常规问题和非常规问题。对此,我们将在第三章中作详细地论述。

另外,依照数学问题提法的意义是否正确,数学问题的条件是否充分,我们还可以把数学问题划分成可能问题和不可能问题。可能问题,即问题的条件充分,在提法上意义正确,能够按原有的预设求得答案。不可能问题,即问题的条件不充分,在提法上意义不正确,不能按原有预设求得答案。可能问题是读者们都很熟悉的,它们在数学发展中的作用是巨大的。不可能问题,尽管在数学研究中不常出现,但它们在数学发展中却具有某种特殊的作用。

不可能问题有两个显著的特征,一是某些可能问题的自然延伸,能够在较长时期内给人以成功的希望。二是以可能问题的面目出现,其不可能性的本质隐藏得较深,以致经过长时间的反复尝试,才能将其本质揭示和确认出来。

例 1-1 某轮船以全速顺水从 A 地驶过 B 地,然后逆水从 B 地返回 A 地。已知从 A 地到 B 地的速度为每小时 20 千米,从 B 地到 A 地的速度为每小时 30 千米,轮船行驶全程的平均速度是多少?

仔细分析一下这道题目，立即可以发现，尽管题目的类型属于常见的可能问题——平均数问题，但由于所给出的具体数据不现实，所以这是一个不可能的问题。

例 1-2　通过已知直线外一点，在这直线和点的平面仅能引一条直线，使它与已知直线不相交。

这是古希腊大数学家欧几里德(Euclid，约公元前 330 年—公元前 275 年)在其名著《几何原本》中叙述的一个初始命题——第五公设。由于这个命题无论从语句上还是从内容上看，都像一个可证明的定理，所以《几何原本》一问世，人们便普遍产生一个疑问：这个命题大概是一个可证的定理，只是由于欧几里德本人没能给出它的证明，才不得不把它放在公设之列。于是也就产生了"欧氏第五公设证明问题"。自欧几里德时代起，历代很多数学家都致力于这个命题的证明，然而，均告失败。但他们坚信迟早有一天，有人能给出它的证明。直到公元 1862 年，俄国伟大的数学家罗巴切夫斯基(Lobatschewsky，公元 1792—1856 年)才指出这个命题是根本不能证明的。所以他索性抛弃了这个公设，用另外公理取而代之。这样，由第五公设这个不可能问题，也就导致了几何学的一个重要分支——非欧几何(又称双曲几何或罗巴切夫斯基几何)的诞生，从而把人们引进了一个新的数学领域，数学也由此得以开拓和发展。

总之，无论是常规问题还是非常规问题，可能问题还是不可能问题，它们的提出和解决，是推动数学前进的重要力量。当代著名科学方法论教授源普尔(Popper)就曾经说过："正是数学问题激发我们去学习，去发展知识，去实践。"现代数学巨人希尔伯特(Hilbert，公元 1862—1943 年)也这样认为："正如人类的每项事业都追求着确定的目标一样，数学研究也需要自己的问题。正是通

过这些问题的解决，研究者锻炼其钢铁意志，发现新方法和新观点，达到更为广阔和自由的境界。”

那么，数学问题的组成成分是什么呢？一般来说，是条件、目标和运算。

所谓条件，是指问题已知的和给定的论断，它们可以是数据，可以是关系，也可以是问题的状态。

数据，不言自明。关系，是指对条件的限制。这些关系可以是已知条件之间的关系，也可以是已知条件与未知条件之间的关系；可以是数量关系，也可是位置关系。问题的状态，是指在问题所涉及的范围内，解决问题过程中的某一时刻的表达形式。问题的原始状态或初始状态，就是问题在最初时刻的表达形式。

例 1-3 一直角三角形的三边分别为 3、4、5 厘米，求其内切圆的面积。

在这个问题里，长度分别 3、4、5 厘米的三条线段就是已知的数据；内切就是给定的位置关系；圆和三角形就是问题的状态。

在有些情况下，问题的条件不是明确给出的，很多都是隐蔽的，或由已知和给定的关系和状态有机地导出的。

所谓目标，是指在一个问题系统变成稳定系统以后，这个稳定系统的状态，也即通常所说的问题的所求。问题一旦达到目标状态，那么也就不再是一个问题系统，而是一个稳定系统。在此之前的各个状态，都是问题的中间状态。

例 1-4 有十箱茶叶，每箱 10 千克，分成 10 包装，每包 1 千克。现在这十箱茶叶中，有一箱每包都少了 100 克，一共少了 1 千克。怎样称出少的那箱来？

这个问题的目标就是找出少茶叶的那箱。它的初始状态是：十箱外表完全相同的茶叶有一箱不足分量。所以从这一初始状态出

发，用秤称一次后，排除一部分；再称一次，又排除一部分，就这样逐步接近目标，最终达到目标状态。

数学问题的目标状态有时完全给定，比如证明题；有时不完全给定，比如一般求解题。另外，目标状态有时唯一；有时不唯一。比如我国古代著名的“百鸡问题”：今有鸡翁一，值钱五；鸡母一，值钱三；鸡雏三，值钱一。凡百钱，买鸡百只。问鸡翁、母、雏各几何？（载《张邱建算经》）。它的目标状态就不唯一，有三种。

所谓运算，是指允许对条件采取的行动。可以是逻辑运算、数学推导，也可以是具体的步骤。在证明题和求解题中允许运用的定义、定理、公式、法则，在作图题中允许运用的作图工具和使用规定等等，都属于运算。

通过运算，就可以改变问题的状态，不断使用运算，就能使问题由初始状态向目标状态转化，最终过渡到目标状态。如果使用的运算不同，那么达到目标状态的各个状态的形式和过程也不同。比如，上述称茶叶问题，要想达到这个目标状态——找出少茶叶的那个箱子，可以使用以下不同的运算：

其一　逐个将每箱茶叶称一下，这样从初始状态（十箱外表完全相同的茶叶）开始，最多九次运算；经过八种不同的状态（九箱、八箱、七箱、六箱、五箱、四箱、三箱、二箱外表完全相同的茶叶中有一箱不足分量），就可以达到目标状态。

其二　将十箱茶叶分为两堆，任取一堆称一下，正好 50 千克，就是另外那五箱中有少的；不足 50 千克，那么少的那箱在称的这堆中。这样使用一次运算，就可将初始状态转化“五箱外表完全相同的茶叶中有一箱不足分量”的状态。再两箱两箱称一下，即再使用两次运算，要么直接达到目标状态。（两次运算结果一致，都是 20 千克，那么剩下的那箱就是要找的），要么再运算一下，即经过

“两箱外表完全相同的茶叶中有一箱不足分量”这一状态,就能达到目标状态。所以,最多使用四次运算,经过了三种不同的状态。

其三　将十箱茶叶依次编上号,从第一箱中拿出一包(1 千克),从第二箱中拿出二包(2 千克),从第三箱中拿出三包(3 千克),……,一直拿到第九箱,九包(9 千克)。再把拿出的这些茶叶放在一起,称一下,如果正好是 45 千克(1 千克+2 千克+……+9 千克)的话,就是第十箱少了。不到 45 千克的话,少 100 克,就是第一箱少了;少 200 克,就是第二箱少了,……少 900 克,就是第九箱少了。这样,使用一次运算,也就可以由初始状态直接达到目标状态。

条件、目标、运算,既是数学问题的三大组成部分,又可谓数学问题构成的三要素。只有全面认识数学问题的组成,才能顺利地完成数学问题的解决。

二 智力结构与活动方式

智力,心理学的意义和日常使用时的含义基本相一致,有这样两方面:一是天赋的潜力和特性、发展的容量,即健全的大脑和健全的神经代谢的总和。二是发展得以进行下去的大脑的功能,即能够决定操作或理解的功能。

著名发展心理学家皮亚杰(Paiget)曾把少年儿童从出生起到智力成熟所经历的过程划分为四个阶段:

(1)感知运动阶段(0—2 岁)。本阶段具有感觉、运动日益协调的特征。

(2)前运算阶段(2—7 岁)。本阶段具有直接知觉和判断的特征,明显地受知觉过程的支配,头脑中有事物的表象,而且能用词代替这些表象。

(3)具体运算阶段(7—11 岁)。本阶段具有以同一性、补偿性、可逆性等方面为基础的数的守恒、量的守恒形成的特征。智力水平有了质的变化,能借助逻辑推理进行转换。

(4)形式运算阶段(11 岁以上)。本阶段具有对抽象的假设或命题内部的、有组织的和可逆的进行转换的特征。能在心理上控制若干变量,同时考虑其他几个变量。

皮亚杰通过大量的实验认为,上述四个阶段是彼此衔接和不能超越的,对应于不同的年龄阶段,又存在着相当大的个体差异。

因此，少年儿童所能解决的智慧问题的数量和他们的实际年龄的比值(通称为智商)，和他们的认知功能水平在一定条件下的相互作用，也就显得相当的关键。这就是说，智力有其先天性和稳定性，也有其波动性，外界的训练、引导，环境的反馈等，都能促进其平衡和发展。

例 1-5 有两个大小一样的正方形，如图 1-1。左边长方形中有一个黑点，要求用直尺在右边长方形中同一位置画一个黑点。

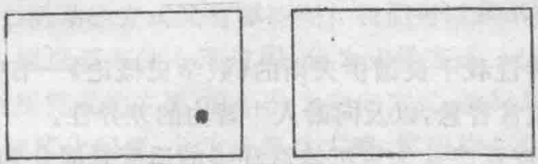
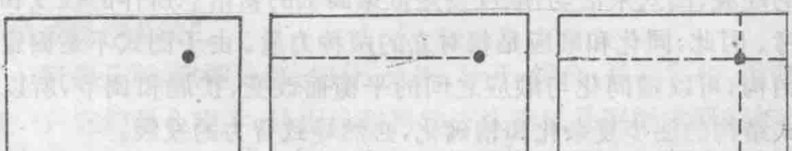


图 1-1

对这个问题，不同年龄阶段的少年儿童有着不同的解决方法：(1)只能用眼睛估计，不会采用其他的方法(如图 1-2 甲)；(2)量了高度又忘了宽度，或量了宽度又忘了高度(如图 1-2 乙)；(3)高度和宽度能兼顾，确切地得出点的位置(如图 1-2 丙)；(4)按照想象中的平行线和垂直线，以及在空白的长方形中实际上并不存在的坐标方格图来确定。



甲　　乙　　丙

图 1-2

由这个例子也可以看出，智力随着年龄增长日益成熟。这也是心理学中发生认识论的核心，年龄的不断增长，不仅能增加更多的新知识，还会发展新的、更为复杂的认知结构。

例 1-6　用圆规和直尺作直角。

德国 16 世纪初叶著名数学家里泽(Riese,公元 1489—1559 年)上中学时曾参加过一次数学比赛,其中一个项目就是看谁在规定的时间内能用圆规和直尺作出更多的直角。

大多数人都是先画一条直线,然后采用课本上教的标准方法,在该直线上作垂线。而里泽却与众不同,他在一条直线上作一半圆,然后便很快作出大量的内接直角,轻而易举地在此项目中获胜。

这个传说载于美国伊夫斯的《数学史概论》一书中,充分说明了里泽的超常智慧,以及同龄人中智力的差异性。

另外,皮亚杰认为有机体对环境的适应是同化和顺应之间的平衡,它们决定了人们一生的智力发展。所谓同化,是把环境中信息结合并组织到已有的智力结构或图式中。其过程在一定程度上与已有的认识过程紧密地联系在一起。如果仅仅是同化,那么智力结构的发展会停留在很低的水平上,为了达到心理发展,必须使原有图式改造和重新结合,形成新图式,这种过程就是顺应。上述比赛作直角的例子的两种不同方面就表明:同化是一个人按照过去的经验、图式来活动;顺应则是依据面临的新信息所作的改变和思考。因此,同化和顺应是相对立的两种力量。由于图式不是固定的结构,可以随同化与顺应之间的平衡而改变、扩展和调节,所以图式结构的逐步复杂化和精确化,必然导致智力的发展。

前苏联心理学家加里培林在 50 年代曾经提出了这样的假说:心理活动是由外部物质动作向反映转化,然后由知觉通过表象向概念转化的结果。转化是经过一系列阶段完成的,在每一阶段中都产生了新的反映和动作的再生以及系统的改造。这一观点经过几十年的实验研究并证实,现在已为广大心理学家们所共识,并上升