普通高等学校“十三五”规划教材

（下册）

高等数学同步指导

主　编　岳　嵘　王云丽　边平勇

副主编　王鲁新　徐亚鹏　彭　丽　王以忠　邓　薇

主　审　郭秀荣　张　宁

北京交通大学出版社

http://www.bjtup.com.cn

三五”规划教材

高等数学同步指导

（下册）

主　编　岳　嵘　王云丽　边平勇
副主编　王鲁新　徐亚鹏　彭　丽　王以忠　邓　薇
主　审　郭秀荣　张　宁

北京交通大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本套书分上、下两册．下册包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数．每章包含如下几个板块：大纲要求、常考题型、本章重点、本章内容精要、经典例题分析与解答指南、课后习题选解、考研真题荟萃、自测题．

本套书适用于所有理工类、金融经济类的本科学生，也可作为考研学生的辅导用书和各高校老师的教学参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学同步指导．下册／岳嵘，王云丽，边平勇主编．—北京：北京交通大学出版社，2017.8

ISBN 978-7-5121-3307-5

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①岳…　②王…　③边…　Ⅲ．①高等数学-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 192388 号

高等数学同步指导（下册）

GAODENG SHUXUE TONGBU ZHIDAO（XIACE）

策划编辑：刘建明　龙嫚嫚　　责任编辑：谭文芳　　助理编辑：龙嫚嫚

出版发行：北京交通大学出版社　　电话：010-51686414　　http：//www.bjtup.com.cn

地　　址：北京市海淀区高梁桥斜街 44 号　　邮编：100044

印 刷 者：北京鑫海金澳胶印有限公司

经　　销：全国新华书店

开　　本：185 mm×260 mm　　印张：10.25　　字数：256 千字

版　　次：2017 年 8 月第 1 版　　2017 年 8 月第 1 次印刷

书　　号：ISBN 978-7-5121-3307-5/O・165

印　　数：1～2 000 册　　定价：26.00 元

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映。对您的意见和批评，我们表示欢迎和感谢。

投诉电话：010-51686043，51686008；传真：010-62225406；E-mail：press@bjtu.edu.cn。

前　　言

高等数学是理工科各个专业的一门重要基础课，学好高等数学对学生专业课程的学习、能力的培养，都起到十分重要的作用，同时，高等数学也是全国硕士研究生入学考试的统考科目，高等数学知识掌握得如何，在相当程度上也是决定学生是否能进一步深造的关键因素. 初入大学校门的学生，对于如何学好高等数学，应该掌握哪些知识重点，遇到问题如何分析、怎么解决，往往比较茫然，而且通常很久还不能适应大学的学习生活. 正是基于这些层面的考虑，编者经过多年的教学经验积累，仔细研究了大学生的认知规律，编写了这套书. 本套书明确了知识重点和考研大纲要求，厘清了知识脉络，每一道例题都给出了解题分析，对于学生尽快掌握解题方法，提高分析问题和解决问题的能力会有极大的帮助，为学生考研深造提供了一套合适的学习用书.

本套书共有十二章，每一章都由八个知识板块组成：

（1）大纲要求——明确了全国硕士研究生入学考试对本部分内容的要求及应掌握程度.

（2）常考题型——归纳了历年全国硕士研究生入学考试经常出的题目类型，便于学生学习.

（3）本章重点——明确了本章内容的知识重点，便于学生掌握.

（4）本章内容精要——归纳了高等数学在本章的知识脉络、主要知识点，便于学生检索.

（5）经典例题分析与解答指南——选取了具有代表性的题目，而且每一道题目都进行了分析，解决了学生遇到题目不知道“如何下手、用哪方面的知识、为何这样做”的问题，对于学生巩固知识，提高能力，掌握解题方法和技巧会有极大的帮助.

（6）课后习题选解——对于同济《高等数学》（第 6 版）课后的部分较难的题目，给出了详细的解答.

（7）考研真题荟萃——本部分汇集了多年来的考研真题，并在书后附有答案.

（8）自测题——每章附有自测题，并在书后附有答案，有助于学生检测自己对本部分内容的掌握情况.

本套书的编者都是多年从事高等数学教学的教师，具有丰富的教学经验，熟悉大学生的认知规律，而且都是山东省精品课程“高等数学”课题组的成员，在本套书的编写过程中，得到了山东科技大学（泰安校区）有关领导的关心和支持，在此致以衷心的感谢.

囿于水平，加之时间仓促，书中难免有不妥与错误，恳请读者批评指正.

编　者

2017 年 8 月

目　　录

第 8 章

空间解析几何与向量代数

空间解析几何与平面解析几何类似，即用代数方法研究几何问题，其中的重要工具就是向量代数. 众所周知，平面解析几何的基础对学习一元函数微积分是至关重要的，同样空间解析几何的知识对后续的多元函数微积分的学习也是不可缺少的.

大纲要求

（1）理解空间直角坐标系，理解向量的概念及其表示.

（2）掌握向量的运算（线性运算、数量积、向量积、混合积），掌握两个向量垂直和平行的条件.

（3）理解单位向量、方向角与方向余弦、向量的坐标表达式，熟练掌握用坐标表达式进行向量运算的方法.

（4）掌握平面方程和直线方程及其求法.

（5）会求平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角，并会利用平面、直线的相互关系（平行、垂直、相交等）解决有关问题.

（6）会求点到直线及点到平面的距离.

（7）理解曲面方程的概念，了解常用二次曲面的方程及其图形，会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程.

（8）了解空间曲线的参数方程和一般方程.

（9）了解空间曲线在坐标平面上的投影，并会求其方程.

常考题型

（1）向量的运算，判断两个向量垂直、平行.

（2）用坐标表达式进行向量运算.

（3）平面方程和直线方程及其求法.

（4）求平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的夹角，并会利用平面、直线的相互关系解决有关问题.

（5）求点到直线及点到平面的距离.

（6）求简单的柱面和旋转曲面的方程.

（7）求投影曲线的方程.

本章重点

（1）向量的线性运算、数量积、向量积的概念、向量运算及坐标运算.

（2）两个向量垂直和平行的条件.

（3）平面方程和直线方程.

（4）平面与平面、平面与直线、直线与直线之间的相互位置关系的判定条件.

（5）点到直线及点到平面的距离.

（6）常用二次曲面的方程及其图形.

（7）旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程.

（8）空间曲线的参数方程和一般方程.

本章内容精要

1. 向量及其线性运算

1）向量的概念

（1）定义：既有大小又有方向的量称为向量.

（2）表示：用空间有向线段来表示向量.

（3）自由向量：与起点位置无关而只考虑其大小和方向的向量.

（4）相等向量：大小与方向都相同的向量称为相等向量.

（5）向量的模：向量的模指的是向量的大小，即有向线段的长度.

（6）单位向量：模等于 1 的向量称为单位向量.

（7）零向量：模等于 0 的向量称为零向量，零向量的方向是任意的.

（8）平行向量：方向相同或相反的向量，零向量与任意向量平行.

（9）负向量：设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的大小相同、方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量.

2）向量的线性运算

（1）运算性质：

① 交换律　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

② 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$

③ 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$

（2）坐标表示：设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)，\quad \lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$$

3）向量的模、方向角、投影

（1）向量的模与两点间的距离公式：

① 向量的模：设 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=(x,y,z)=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，则 $|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

② 两点间的距离公式：点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 与 $B(x_2,y_2,z_2)$ 之间的距离为

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

（2）方向角与方向余弦

① 向量的方向角：称非零向量 $\boldsymbol{r}$ 与三条坐标轴的夹角 α,β,γ 为向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向角，$\alpha,\beta,\gamma\in[0,\pi]$.

② 向量的方向余弦：方向角的余弦 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 称为方向余弦.

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}，\quad \cos\beta=\frac{y}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}，\quad \cos\gamma=\frac{z}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

值得注意的是：$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$；

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$；

$$\boldsymbol{e}_r=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}(x,y,z)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

4）向量在轴上的投影及其性质

（1）向量在轴上的投影：设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 u 轴正向的夹角为 φ，称 $|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 u 轴上的投影，记作 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$ 或 $(\boldsymbol{a})_u$. 向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 在三个坐标轴上的投影即为对应的坐标，即 $\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}=a_x$，$\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a}=a_y$，$\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}=a_z$.

（2）投影的性质：

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{b}，\quad \mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$$

2. 数量积、向量积、混合积

1）数量积

（1）定义：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$

（2）坐标表示：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

（3）性质：

① 交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

② 分配律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$

③ 结合律　$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$

④ $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$

2）向量积

（1）定义：称$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的向量积，其大小为$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，规定$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的方向构成右手系.

（2）坐标表示：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\left(\begin{vmatrix}a_y&a_z\\b_y&b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_z&a_x\\b_z&b_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x&a_y\\b_x&b_y\end{vmatrix}\right)$$
$$=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$$

（3）性质：

① $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$

② 分配律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$

③ 结合律　$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$

④ $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$

3）混合积

（1）定义：$[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$

（2）坐标表示：$[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$

3. 曲面及其方程

1）空间曲面的方程

（1）曲面方程的形式：

① 一般方程为$F(x,y,z)=0$；

② 参数方程为$\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}$.

（2）柱面方程：

① 母线平行于z轴的柱面方程为$F(x,y)=0$；

② 母线平行于y轴的柱面方程为$F(x,z)=0$；

③ 母线平行于x轴的柱面方程为$F(y,z)=0$.

（3）旋转曲面：

设C：$f(y,z)=0$为yOz面上的曲线，则

① C绕z轴旋转所得的曲面为$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$；

② C绕y轴旋转所得的曲面为$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$.

（4）投影柱面：

设空间曲线C：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$消去$z$所得的方程为$H(x,y)=0$，此方程称为$C$关于$xOy$面的投影柱面，$\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}$为$C$在$xOy$面的上的投影曲线.

2）二次曲面及其标准方程

（1）球面方程：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=1$

（2）椭球面：$\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}+\dfrac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$

（3）椭圆抛物面：

$$z=\pm\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\text{或 }y=\pm\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\text{或 }x=\pm\left(\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)$$

（4）双曲抛物面：

$$z=\pm\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\text{或 }y=\pm\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)\text{或 }x=\pm\left(\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)$$

（5）单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\text{ 或 }\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\text{ 或 }-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

（6）双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\text{ 或 }\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1\text{ 或 }-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

4. 空间曲线及其方程

1）空间曲线的方程

（1）一般方程：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$.

（2）参数方程：$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$，其中点$M(x,y,z)$随着参数$t$的变化遍历曲线$C$.

2）空间曲线在坐标面上的投影

（1）投影柱面：称以空间曲线C为准线，母线平行于z轴的柱面为曲线C关于xOy面的投影柱面.

（2）空间曲线的投影：称空间曲线 C 关于 xOy 面的投影柱面与 xOy 面的交线为空间曲线 C 在 xOy 面上的投影曲线，也称为投影.

（3）空间曲线的投影方程：空间曲线 C：$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 在 xOy 面上的投影方程为 $\begin{cases}H(x,y)=0\\z=0\end{cases}$，其中 $H(x,y)=0$ 为方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 消去 z 所得的投影柱面方程.

5. 平面及其方程

1）平面方程的形式

（1）点法式：设平面过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，则平面方程为 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

（2）一般式：$Ax+By+Cz+D=0$，其中 A,B,C 不同时为零.

（3）截距式：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$，其中 a,b,c 分别为平面在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距.

（4）三点式：若平面过不共线的三点 $M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2),M_3(x_3,y_3,z_3)$，则平面方程为

$$\begin{vmatrix}x-x_1 & y-y_1 & z-z_1\\x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}=0$$

（5）平面束方程：设直线 L：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$，则通过直线 L 的平面束方程为 $\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0\quad(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$.

2）两平面位置关系

设 π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$，π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$，则有

（1）π_1 与 π_2 的夹角 θ 的余弦 $\cos\theta=\dfrac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^{\ 2}+B_1^{\ 2}+C_1^{\ 2}}\sqrt{A_2^{\ 2}+B_2^{\ 2}+C_2^{\ 2}}}$.

（2）两平面垂直：$\pi_1\perp\pi_2\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$.

（3）两平面平行：$\pi_1/\!/\pi_2\Leftrightarrow\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\Leftrightarrow\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\boldsymbol{0}$，特别当 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$ 时，两平面重合.

6. 直线及其方程

1）直线方程的形式

（1）对称式（点向式）：直线 L 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，直线 L 的方程为 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$，其中 m,n,p 不全为零.

（2）一般式：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$，即两平面的交线.

（3）参数式：$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt \end{cases}$ 其中t为参数.

（4）两点式：直线L过不重合的两点$M_1(x_1,y_1,z_1),M_2(x_2,y_2,z_2)$，则直线方程为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

2）两直线的位置关系

设两直线L_1,L_2的方向向量分别为$\boldsymbol{s}_1=(m_1,n_1,p_1),\boldsymbol{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$且$M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$分别为$L_1,L_2$上的点，则

（1）L_1,L_2异面$\Leftrightarrow\left[\boldsymbol{s}_1\ \ \boldsymbol{s}_2\ \ \overrightarrow{M_1M_2}\right]\neq 0$；

（2）L_1,L_2共面$\Leftrightarrow\left[\boldsymbol{s}_1\ \ \boldsymbol{s}_2\ \ \overrightarrow{M_1M_2}\right]=0$；

（3）L_1,L_2的夹角θ的余弦$\cos\theta=\dfrac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$；

（4）$L_1\perp L_2\Leftrightarrow\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2=0\Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$；

（5）$L_1/\!/L_2\Leftrightarrow\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

3）直线与平面的位置关系

设直线L的方向向量为$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，平面π的法向量为$\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，则

（1）直线与平面的夹角θ的正弦$\sin\theta=\dfrac{|mA+nB+pC|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$；

（2）$L\perp\pi\Leftrightarrow\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$；

（3）$L/\!/\pi\Leftrightarrow\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=0\Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$.

4）距离

（1）点$M_0(x_0,y_0,z_0)$到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离为$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

（2）点$M_1(x_1,y_1,z_1)$到直线$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$的距离为$d=\dfrac{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times\boldsymbol{s}\right|}{|\boldsymbol{s}|}$，其中$\boldsymbol{s}=(m,n,p),M_0(x_0,y_0,z_0)$.

（3）两异面直线的距离：

两异面直线L_1：$\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$，$L_2$：$\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}$，设$M_1(x_1,y_1,z_1)$，

$M_2(x_2,y_2,z_2)$，公垂线的方向向量为 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2$，则 L_1,L_2 之间的距离为 $d=\left|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{s}}\overrightarrow{M_1M_2}\right|$.

经典例题分析与解答指南

例 1 设 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=3$，且 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

分析：利用数量积与向量积的概念及运算.

解：因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 0（同向平行）或 π（反向平行），

则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=2\times3\times(\pm1)=\pm6$，

又因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，故 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

例 2 求与向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 平行且满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=-18$ 的向量 $\boldsymbol{x}$.

分析：向量平行的条件及向量运算.

解：设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)$，因为 $\boldsymbol{x}/\!/\boldsymbol{a}$，所以 $\dfrac{x_1}{2}=\dfrac{x_2}{-1}=\dfrac{x_3}{2}$.

令 $\dfrac{x_1}{2}=\dfrac{x_2}{-1}=\dfrac{x_3}{2}=\lambda$，则 $x_1=2\lambda$，$x_2=-\lambda$，$x_3=2\lambda$.

又 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=-18$，故 $4\lambda+\lambda+4\lambda=-18\Rightarrow\lambda=-2$，

所以 $\boldsymbol{x}=(-4,2,-4)$.

例 3 设 $|\boldsymbol{a}|=5,|\boldsymbol{b}|=2$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{3}$，求 $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|$.

分析：向量自身的数量积等于模的平方.

解：因为
$$|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|^2=(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$$
$$=4|\boldsymbol{a}|^2-12|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{3}+9|\boldsymbol{b}|^2=76$$

所以 $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$.

例 4 设 $|\boldsymbol{a}|=4,|\boldsymbol{b}|=3$，$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\dfrac{\pi}{6}$，求以 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 为边的三角形面积.

分析：向量积的模与三角形或平行四边形面积的关系.

解：设 S 为所求三角形的面积，

$$S=\frac{1}{2}|(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})|$$
$$=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-6\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}|$$
$$=\frac{1}{2}|5\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}|=\frac{1}{2}\left|5|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\sin\frac{\pi}{6}\right|=\frac{1}{2}\times5\times4\times3\times\frac{1}{2}=15$$

例 5 求同时垂直于 y 轴和向量 $\boldsymbol{a}=(-3,6,8)$ 的单位向量 $\boldsymbol{b}^0$.

分析：单位向量等于向量模的倒数去数乘向量.

解：因为与 y 轴垂直等价于与 y 轴上的单位向量 $\boldsymbol{j}=(0,1,0)$ 垂直，

所以与向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{j}$ 同时垂直的向量 $\boldsymbol{b}=\pm\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{j}=\pm\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\-3&6&8\\0&1&0\end{vmatrix}=\pm(-8,0,-3)$，

因此单位向量 $\boldsymbol{b}^0=\dfrac{\pm\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{73}}(-8,0,-3)$.

例 6　已知 $\boldsymbol{a}=(4,-3,2)$，单位向量 $\boldsymbol{e}$ 与三坐标轴的夹角相等且为锐角，求 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{a}$.

分析：此题考查向量方向余弦的平方和为 1，以及利用数量积计算投影.

解：可设单位向量 $\boldsymbol{e}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k}$，

因为 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，又已知向量 $\boldsymbol{e}$ 与三坐标轴的夹角相等且为锐角，

可推得 $3\cos^2\alpha=1$，即 $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，所以 $\boldsymbol{e}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}$.

又因为向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，得

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}}{|\boldsymbol{e}|}=\frac{\dfrac{4}{\sqrt{3}}-\dfrac{3}{\sqrt{3}}+\dfrac{2}{\sqrt{3}}}{1}=\sqrt{3}$$

例 7　将下列各曲线绕对应的轴旋转一周，求生成的旋转曲面的方程.

（1）双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 x 轴和 z 轴旋转；

（2）yOz 面上曲线 $z=\sin y$ 绕 y 轴旋转.

分析：要掌握平面曲线绕坐标轴旋转而成的曲面方程的求法.

解：（1）绕 x 轴旋转：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2+z^2}{c^2}=1$，绕 z 轴旋转：$\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

（2）绕 y 轴旋转：$\pm\sqrt{x^2+z^2}=\sin y$.

例 8　指出下列方程在平面解析几何和空间解析几何中分别表示什么图形？

（1）$x=2$；　　（2）$x^2+y^2=4$；　　（3）$y=x+1$.

分析：分清平面几何与空间几何的联系与区别.

解：如表 8–1 所示.

表 8–1

方程	平面解析几何	空间解析几何
$x=2$	平行于 y 轴的直线	平行于 yOz 面的平面
$x^2+y^2=4$	圆心在 $(0,0)$，半径为 2 的圆	以 z 轴为中心轴的圆柱面
$y=x+1$	斜率为 1 的直线	平行于 z 轴的平面

例 9　写出满足下列条件的动点轨迹方程，它们分别表示什么曲面？

（1）动点到坐标原点的距离等于它到平面 $z=4$ 的距离；

（2）动点到点$(0,0,5)$的距离等于它到x轴的距离.

分析： 此题考查各类曲面方程的特点，要求对曲面方程要熟练.

解：（1）设(x,y,z)为动点，由已知条件得$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=|z-4|$，

化简得$x^2+y^2+8z=16$，此为以z轴为旋转轴的旋转抛物面.

（2）设(x,y,z)为动点，由已知条件得$\sqrt{x^2+y^2+(z-5)^2}=\sqrt{y^2+z^2}$，

化简得$x^2-10z=-25$，此为母线平行于y轴的抛物柱面.

例 10 求抛物面$y^2+z^2=x$与平面$x+2y-z=0$的交线在三个坐标面上的投影曲线方程.

分析： 此题考查空间曲线在坐标面上的投影.

解：（1）两曲面的交线方程为$\begin{cases}y^2+z^2=x\\x+2y-z=0\end{cases}$，在此方程中消去变量$z$，

得投影柱面方程$x^2+5y^2+4xy-x=0$，

则$\begin{cases}x^2+5y^2+4xy-x=0\\z=0\end{cases}$为原曲线在$xOy$面上的投影曲线.

（2）同理，消去y得在xOz面上的投影曲线$\begin{cases}x^2+5z^2-2xz-4x=0\\y=0\end{cases}$.

（3）同理，消去x得在yOz面上的投影曲线$\begin{cases}y^2+z^2+2y-z=0\\x=0\end{cases}$.

例 11 写出下列平面方程：

（1）xOy面；（2）过z轴的平面；（3）平行于xOz面的平面.

分析： 三元一次方程$Ax+By+Cz+D=0$表示平面，若方程缺少某一变量，说明该变量的系数为零，则此平面必平行于该坐标轴.

解：（1）设所求平面方程为$Ax+By+Cz+D=0$，因为xOy面同时平行于x轴与y轴，所以$A=0$，$B=0$. 又因为过坐标原点，所以$D=0$. 因此$z=0$即为xOy面的方程.

（2）设所求平面方程为$Ax+By+Cz+D=0$，因为过z轴的平面必平行于z轴，所以$C=0$. 又因为过坐标原点，所以$D=0$. 因此过z轴的平面方程为$Ax+By=0$.

（3）设所求平面方程为$Ax+By+Cz+D=0$，平行于xOz面的平面必平行于x轴与z轴，所以$A=C=0$，因此所求平面方程为$By+D=0$.

例 12 求通过点$P(2,-1,-1),Q(1,2,3)$且垂直于平面$2x+3y-5z+6=0$的平面方程.

分析： $\overrightarrow{QP}$与平面$2x+3y-5z+6=0$的法向量的向量积可作为所求平面的法向量.

解： 设所求平面的法向量为$\boldsymbol{n}$，$\overrightarrow{QP}=(1,-3,-4)$，平面$2x+3y-5z+6=0$的法向量$\boldsymbol{n}_1=(2,3-5)$，则

$$\overrightarrow{QP}\times\boldsymbol{n}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-3&-4\\2&3&-5\end{vmatrix}=27\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+9\boldsymbol{k}$$

取$\boldsymbol{n}=(9,-1,3)$，所求平面为$9(x-2)-(y+1)+3(z+1)=0$，

即 $9x-y+3z-16=0$.

例 13 求与已知平面 $2x+y+2z+5=0$ 平行且与三坐标面所构成的四面体体积为 1 的平面方程.

分析： 利用平面的截距式方程求解.

解： 由于所求平面与已知平面平行，所以其法向量可取 $\boldsymbol{n}=(2,1,2)$，

设所求平面方程为 $2x+y+2z-D=0$，其中 $D\neq 0$ 为待定参数. 将平面化为截距式方程

$\dfrac{x}{\frac{D}{2}}+\dfrac{y}{D}+\dfrac{z}{\frac{D}{2}}=1$，则得平面与三个坐标轴的截距，从而可知四面体体积为

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left|\frac{D}{2}\right|\cdot|D|\cdot\left|\frac{D}{2}\right|=1\Rightarrow D=\pm 2\sqrt[3]{3}$$

故所求平面方程为 $2x+y+2z+2\sqrt[3]{3}=0$ 或 $2x+y+2z-2\sqrt[3]{3}=0$.

例 14 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面的夹角的余弦.

分析： 此题考查利用数量积计算夹角的余弦，需要找出各平面的法向量.

解： 由已知可得，$\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$ 为该平面的法向量，

设该平面与 yOz 面、xOz 面 、xOy 面的夹角分别为 α，β，γ，则

$$\cos\alpha=\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{i}})=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{i}|}=\frac{(2,-2,1)\cdot(1,0,0)}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+0^2}}=\frac{2}{3}$$

同理 $\cos\beta=\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{j}})=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{j}|}=-\dfrac{2}{3}$，$\cos\gamma=\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{k}})=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{k}|}=\dfrac{1}{3}$

例 15 求过点 $A(3,1,-2)$ 且通过直线 L：$\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z}{1}$ 的平面方程.

分析： 直线 L 上任取一点 B，向量 $\overrightarrow{AB}$ 与直线 L 的方向向量的向量积可作为所求平面的法向量.

解： 设点 B 为直线 L 上任意一点，因为平面通过直线 L，所以点 B 在平面上，取 $B(4,-3,0)$. 由此得所求平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 同时垂直于向量 $\overrightarrow{AB}$ 及直线的方向向量 $\boldsymbol{s}$，所以可取

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{AB}\times\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-4&2\\5&2&1\end{vmatrix}=-8\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}+22\boldsymbol{k}$$

平面的点法式方程为 $-8(x-3)+9(y-1)+22(z+2)=0$，

整理得 $8x-9y-22z-59=0$.

例 16 已知两直线方程 L_1：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$，$L_2$：$\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$，求过 L_1 且平行 L_2 的平面方程.

分析： 两条直线的方向向量的向量积可作为平面的法向量，再取直线上一点可得所求平面的点法式方程.

解： 由已知得，直线 L_1,L_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(1,0,-1)$，$\boldsymbol{s}_2=(2,1,1)$，

因为所求平面过 L_1 且平行于 L_2，所以所求平面的法向量可取为