



生物数学——动力学 模型、方法及应用

张春蕊 郑宝东 著



科学出版社

生物数学——动力学 模型、方法及应用

张春蕊 郑宝东 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书介绍了生物数学研究中的动力学模型方法,如动力系统分支理论、时滞微分方程数值解法、最优控制理论等.重点介绍了近年来连续与离散动力系统的分支理论及在生物数学模型中的应用.

本书可供生物学、应用数学和其他相关领域的研究工作者及相关专业的师生参考.

图书在版编目(CIP)数据

生物数学:动力学模型、方法及应用/张春蕊,郑宝东著. —北京:科学出版社, 2018.1

ISBN 978-7-03-055950-0

I. ①生… II. ①张… ②郑… III. ①生物数学-动力学模型-研究
IV. ①Q-332

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 312890 号

责任编辑:王 静 / 责任校对:张凤琴
责任印制:吴兆东 / 封面设计:陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

2018 年 1 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5

2018 年 1 月第一次印刷 印张: 12 3/4

字数: 257 000

定价: 59.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

生物数学 (Mathematical Biology 或 Biomathematics) 是生命科学、林学、农学和医学学科与数学互相渗透形成的交叉学科. 其研究内容是用数学方法研究和解决生物学问题, 同时也对与生物学有关的数学方法进行深入的理论研究. 传统的、现代的数学理论如代数学理论、常微分方程理论、泛函微分方程理论、差分方程理论、动力系统理论、随机过程理论、统计方法, 乃至算子半群理论在该学科都有使用. 动力学模型方法是定量地描述与时间演化相关的生物现象的重要手段, 利用动力学模型方法可以将一个复杂的生物学问题转变成一个微分方程或差分方程问题, 通过对该模型的推理、求解和运算, 可以达到对生物学问题的解释、预测的目的. 本书介绍了生物数学研究中的动力学模型方法, 如动力系统分支理论、时滞微分方程数值解法、最优控制理论等. 重点介绍了近年来连续与离散动力系统的分支理论及在生物数学模型中的应用. 本书旨在引导读者在短时间内尽快进入本领域的前沿, 将为生物数学动力学模型的研究提供有价值的参考.

本书可供应用数学和其他相关领域的科技人员、教师以及大学高年级学生和研究生使用.

张春蕊 郑宝东

2017年9月于哈尔滨

目 录

前言

第 1 章 生物数学中的动力学方法简介	1
1.1 动力系统建模思想	1
1.2 时滞微分方程分支理论简介	3
1.3 时滞微分方程对称分支理论简介	7
1.4 耦合生物振子研究的群论方法简介	10
1.5 离散动力系统分支理论简介	12
1.6 动力系统最优控制问题解法	13
1.6.1 变分法	16
1.6.2 最简泛函取极值的必要条件 —— Euler 方程	16
1.6.3 条件泛函极值的必要条件	19
1.6.4 边界条件待定的变分问题	21
1.6.5 最优控制问题解法	21
1.7 时滞动力系统 Bogdanov-Takens 奇异的显示计算公式	23
1.8 构造离散系统的数值方法	31
1.8.1 Runge-Kutta 方法解时滞微分方程	32
1.8.2 线性多步方法解时滞微分方程	33
1.8.3 数值线性稳定区域	34
1.9 离散系统 Hopf 分支存在的判别方法 —— 扩展的 Jury 判据	39
1.9.1 Jury 判据	40
1.9.2 扩展的 Jury 判据及应用举例	41
第 2 章 三个神经元的离散时滞耦合映射的动力学分析	45
2.1 双向耦合三振子离散映射	45
2.1.1 耦合映射的 D_3 -等变性质及线性稳定性	46
2.1.2 多重周期解分支	49
2.1.3 混沌现象	51
2.2 Z_3 -对称离散神经元振子	53
2.2.1 Z_3 -等变离散神经网络的线性稳定性	54
2.2.2 多重对称周期解的存在性	56
2.2.3 Hopf 分支方向和分支周期解的稳定性	57

2.3	一般形式的三细胞时滞离散神经网络模型	61
2.3.1	三个离散神经元的五种连接方式	61
2.3.2	多重周期解的存在性	67
第 3 章	生命科学中的 van der Pol 振子模型	72
3.1	时滞耦合 van der Pol 振子的分支分析	73
3.2	Hopf-zero 分支的存在性	73
3.3	Hopf-pitchfork 分支的规范型	74
第 4 章	耦合的 Stuart-Landau 模型	85
4.1	耦合 Stuart-Landau 模型的多重 Hopf 分支	85
4.1.1	线性稳定分析	86
4.1.2	同步与锁相周期解的存在性	89
4.2	双 Hopf 分支分析	95
4.3	$N = 3$ 时耦合 Stuart-Landau 振子双 Hopf 分支计算方法	99
第 5 章	具有多层对称结构的神经网络模型	109
5.1	$Z_3 \times Z_2$ 对称耦合神经网络模型	109
5.1.1	系统的 $Z_3 \times Z_2$ 对称性	110
5.1.2	基本结果	111
5.1.3	迷向子群及固定点子空间确定的多重分支周期解	116
5.2	四足动物步态刻画的复值神经网络模型	124
5.2.1	基本问题	125
5.2.2	$\Gamma = Z_4 \times Z_2$ 确定的多重 Hopf 分支周期解	132
第 6 章	基于种群生态模型的生物系统	143
6.1	捕食-被捕食生态经济系统模型	143
6.1.1	捕食者、食饵稳态解的存在性	144
6.1.2	Hopf 分支方向和稳定性	147
6.1.3	考虑扩散的种群经济模型	153
6.2	基于单种群模型的分段常数自变量 Logistic 方程	155
6.2.1	正平衡解稳定性分析	156
6.2.2	Hopf 分支的方向和稳定性	158
6.3	具有收获及食饵染病的三维种群模型	162
6.4	疾病在捕食者中传播的三维种群模型	163
6.5	时滞 Leslie-Gower 种群模型	164
6.5.1	永存性结果	164
6.5.2	全局稳定性分析	167

第 7 章 几个生物系统最优控制问题	168
7.1 农作物-害虫生态系统最优控制模型	168
7.2 多因素耦合非线性森林生态系统最优控制模型	169
第 8 章 几类生物模型的数值 Hopf 分支	172
8.1 向日葵方程的数值 Hopf 分析	172
8.1.1 向日葵方程的稳定性与分支性	173
8.1.2 向日葵方程 Hopf 分支的数值逼近	173
8.1.3 分支方向与稳定性的数值逼近	176
8.2 具时滞的人体激素浓度模型的数值逼近	180
8.3 离散的血红细胞模型	184
8.3.1 离散模型建立	184
8.3.2 离散血红细胞模型的动力学性质	185
参考文献	189

第1章 生物数学中的动力学方法简介

1.1 动力系统建模思想

模型 (model) 是对系统特性和规律的描述, 用于提供关于系统的有用信息. 这些信息用数学及逻辑等抽象的方法进行描述, 是对系统的一种近似表达. 根据时间集合的特点, 可以将模型分为连续时间模型和离散时间模型. 连续时间模型中的时间用实数来表示, 即系统的状态可以在任意时刻点获得. 离散时间模型中的时间用整数来表示, 即系统的状态只能在离散的時刻点上获得, 这里的整数时间只定性地表示时间离散, 而不一定是绝对时间. 根据状态变量的特点, 可以将模型分为连续变化模型和离散变化模型. 在连续变化模型中, 系统的状态变量是随时间连续变化的. 在离散变化模型中, 系统状态变量的变化是不连续的, 即它只在特定时刻变化, 而在两个特定时刻之间保持不变.

数学模型具有以下优点: ① 具有形式化、数量化的优点. 数学模型大都是能促进问题处理的数学表达式, 它揭示问题的主要矛盾和各因素间的定量关系, 较少地遗漏隐含的条件; 有大量的数学定理和方法可供计算、推理和变形, 特别是便于利用计算机进行仿真与论证. ② 具有对实际问题描述、解释与判断的优点. ③ 具有预见性的优点.

人们在解决实际问题时, 通常按照如下步骤建立数学模型. ① 数学化: 对实际问题作数量分析, 给出自变量、因变量和参数, 按照事物的规律写出数学表达式; ② 建模: 运用数学理论和方法, 探求数学模型; ③ 反馈: 返回到实践中检验、修正模型.

动力学模型方法用来研究某些生命现象已经有相当长的历史. 最早的典型例子是 Malthus (1834 年) 人口模型:

$$N'(t) = rN(t),$$

这里 $N(t)$ 代表在 t 时刻人口的密度 (假设人口密度分布是均匀的), r 代表人口密度随时间的相对增长率, 设为常数, 称为内禀增长率. 根据这个模型, Malthus 得到人口指数无穷增长的论述.

Malthus 人口模型是十分粗糙的, 他没有考虑环境的因素, 实际上人所生存的环境中资源不是无限的, 因而人口的增长也不可能是无限的, 1938 年 Verhulst-Pearl 提出用 Logistic 模型来描述种群的增长. 考虑环境的容纳量 K ($K > 0$), 也就是在

所考虑的环境中最多能允许生存的种群数量 (或密度), 这样, 得到如下的 Logistic 模型:

$$N'(t) = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right),$$

从 Logistic 动力学模型可以看出, 存在一个正的平衡态 $N = K$, 使种群数量 (或密度) 将始终保持稳定在 $N = K$ 的水平.

1974 年, May 把 Logistic 模型作差分化, 得到离散单种群模型

$$N_{n+1} = rN_n \left(1 - \frac{N_n}{K} \right),$$

并发现当 r 在 0—3 变化时, 不但会有和微分方程 Logistic 模型一样, 存在大范围稳定平衡态的可能, 而且会出现以各种正整数为周期的周期解以及混沌解.

Logistic 模型隐含着一种近似, 种群在时刻 t 时的相对增长率应是在时刻成年的种群密度的函数, 因为只有成年的种群才有能力繁殖后代, 如果所考虑的种群成年期为 τ , 则 Logistic 模型修正为

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = r \left(1 - \frac{N(t-\tau)}{K} \right).$$

以上假定密度在空间分布是均匀的, 即密度仅是时间的函数, 如果密度同时还是空间位置的函数, 即 $N = N(t, x)$, 这里 x 表示空间位置, 则有

$$\frac{\partial N}{\partial t} = d \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right),$$

其中 d 为扩散常数.

若考虑在同一环境中共同生存的其他种群的相互作用、相互影响, 则可以建立多种群相互作用模型.

1925 年, 意大利年轻的生物学家 D'Ancona 发现, 在第一次世界大战期间的几年中, 在亚得里亚海北部捕获的食肉鱼 (捕食者) 的比例比过去有所上升, 而被食肉鱼所食鱼类 (食饵) 的比例则有所下降. 他最初认为这是战争期间捕鱼量大大减少的缘故, 人们捕鱼量的减少, 会使食肉鱼得到更多的食饵, 从而迅速繁殖, 进而增加了捕食类鱼的数量. 但是事实也不完全如此, 由于捕鱼量减少, 食饵类鱼的数量也会有所增加, 为什么捕鱼量少对食肉鱼比对食饵鱼更为有利呢? 这个问题的答案被当时著名的数学家 Volterra 所找到, 他利用动力学的方法建立了食饵鱼与捕食者鱼相互作用的数学模型

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy, \\ \dot{y} = cxy - dy, \end{cases}$$

这里 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别为食饵鱼与捕食者鱼种群的密度, a 为食饵鱼种群的内在增长率, d 为捕食者鱼种群的死亡率, b 和 c 为两种群相互作用的系数. 这个模型就是

著名的刻画捕食关系的 Volterra 模型. Volterra 利用该模型很好地解释了生物学家 D'Ancona 的问题.

如果考虑时滞、扩散、捕获能力及功能反应等因素, 则可以由上述模型得到不同类型的捕食关系模型.

考虑如下的 Leslie-Gower 型捕食模型, 该模型考虑了时滞、扩散、捕获能力及功能反应.

$$\begin{cases} \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = d_1 \Delta U + U(r_1 - b_1(t - \tau)) - \frac{a_1 UV}{k + U} - \frac{qEU}{m_1 E + m_2 U}, \\ \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = d_2 \Delta V + V \left(r_2 - \frac{a_2 V}{k + V} \right), & x \in \Omega, t > 0, \\ U_x(x, t) = V_x(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ U(x, \theta) = U_0(x, \theta) \geq 0, \quad V(x, \theta) = V_0(x, \theta) \geq 0, & x \in \Omega, \theta \in [-\tau, 0], \end{cases}$$

这里, q 表示捕食能力, E 表示收获对食饵的影响, m_1, m_2 表示适当的常数; r_1, r_2 分别表示食饵和捕食者的增长速度, b_1 表示食饵种群内部的竞争; a_1, a_2 表示食饵鱼捕食者个体平均减少率的最大值, k 表示平均饱和率.

从以上例子可以看出, 依据历史与现况, 对自然界宏观现象, 如生物种群、资源及发展趋势; 微观现象, 如生命体的运动、睡眠、运动、呼吸、循环、咀嚼和消化过程等生物学现象建立数学模型, 可以达到对相关问题进行解释、预测的目的.

动力系统理论用于研究生物科学问题已经被人们广泛采用. 随着人们对生命现象研究的深入, 借助于非线性动力学理论的新成果, 将定性分析和数值模拟方法相结合, 可以对模型的动力学性质进行全面研究.

本书中我们着重介绍生物科学中的动力学模型及研究方法.

1.2 时滞微分方程分支理论简介

在生物数学问题中, 有节律的振动比比皆是. 比如, 在睡眠、运动、呼吸、循环、咀嚼和消化过程中随处可见有节奏的振动现象. 目前, 人们非常希望了解生物系统是如何产生这些振动又是如何控制这些振动的. 许多学者基于神经机制或者肌内机制提出了诸多刻画这类现象的动力学模型; 并借助于科学实验研究了若干复杂程度不同、网络结构各异的生物系统的振荡行为. 动力系统分支理论刻画节律的振动的重要工具.

分支 (bifurcation) 是动力系统理论研究中的一个重要问题, 其研究对象是结构不稳定的系统. 所谓分支现象是指依赖于参数的系统, 当参数变动并经过某些临界值时, 系统的某些属性, 如平衡状态、周期现象、稳定性等发生的突然变化. 分支现象广泛存在于自然界中, 对它的研究有重要的理论意义与实际意义, 因而备受人

们的关注. 关于连续的与离散的向量场的分支问题都有较完善的理论, 中外学者都有专著论述. 20 世纪 50 年代初, Wright 首先研究了具时滞的 Logistic 方程的解随滞量的变化而变化的问题. 70 年代开始, 延迟微分方程系统 Hopf 分支问题引起了数学家的普遍关注. Chow, Mellet-Paret 和 Hele 分别用不同方法给出了 Hopf 分支的存在定理. 利用半群理论可以将延迟微分方程化为抽象的算子方程, 根据这一性质 Hassard 和 Kazarinoff 利用抽象的微分方程的中心流形理论讨论了分支周期解的稳定性、振幅、分支方向及分支周期解在中心流形上的近似表达式等内容. 三十年来, 这一问题的研究有了较大的进展.

一个系统产生 Hopf 分支是指当系统的参数经过某些特殊值时系统的奇点的稳定性发生变化, 并在奇点附近产生周期解的现象. 延迟微分方程的 Hopf 分支现象与常微分方程的 Hopf 分支现象有很大差异. 早在 20 世纪 50 年代初期就有数学家注意到延迟微分方程的分支现象. 比如: Wright 就研究了单种群增长模型——时滞 Logistic 方程的解的稳定性与随时滞 τ 变化的情况. 从 20 世纪 70 年代开始, 泛函微分方程的分支理论得到了数学家的普遍关注, 这方面的研究尤其活跃.

对于时滞微分方程, 其 Hopf 分支的一种解法是建立在抽象的常微分方程的中心流形理论之上. 因为自治的延迟微分方程可以写成抽象的常微分方程, 如果该方程在常值解处的线性化方程的特征方程在特定参数 $\lambda = \lambda_0$ 处有一对单纯虚根, 其他特征根与其非共振, 并且简单纯虚根满足横截条件, 那么, 存在二维中心流形, 所考虑的延迟微分方程在中心流形上的限制即为一个二维常微分方程, 从而利用常微分方程的分支理论得到延迟微分方程的理论. Hassard 等 (1981) 对此有详细的论述.

对于时滞微分方程 Hopf 分支理论的研究还包括分支方向、分支周期界的稳定性、振幅周期等内容. 魏俊杰教授等在 Kazannoff 的计算分支性质的理论之上, 概括出了计算延迟微分方程 Hopf 分支性质的计算公式.

对时滞微分方程 Hopf 分支值的讨论, 一个主要的困难在于分析其在奇点处的线性部分的特征方程的根的分布. 通常情况下, 时滞微分方程的特征方程是指数多项式方程. 在此基础上, 魏俊杰教授等利用 Rouché 定理给出了指数多项式零点分布的理论, 从而为 Hopf 分支的确定给出了一种方法, 详见 Wu(1998).

时滞微分方程在刻画一个变化过程时既考虑了现在又考虑了历史甚至是未来, 因而几十年来出现了大量具时滞的生态模型. 利用分支理论对其研究, 对生物数学其他分支的发展都有重要意义.

设 $C^k[-r, 0]$ 为区间 $[-r, 0]$ 上的一维向量值函数, 且所有分量都有 k 阶连续导数. 考虑自治系统

$$\frac{dX(t)}{dt} = L_{\mu}X_t + f(X_t(\cdot), \mu) \quad (t > 0, \mu \in \mathbf{R}). \quad (1.2.1)$$

对于 $r > 0$, $X_t(\theta) = X(t + \theta)$, $X : [-r, 0] \rightarrow \mathbf{R}^n$, $\theta \in [-r, 0]$, 这里 L_μ 是一个连续有界单参数线性算子

$$L_\mu : C[-r, 0] \rightarrow \mathbf{R}^n.$$

算子

$$f(\cdot, \mu) : C[-r, 0] \rightarrow \mathbf{R}^n$$

包含非线性项 (至少二次的), 且

$$f(0, \mu) = 0, \quad D_x f(0, \mu) = 0.$$

由 Riesz 表示定理, 存在分量均为有界变差函数的 $n \times n$ 矩阵

$$\eta(\cdot, \mu) : [-r, 0] \rightarrow \mathbf{R}^{n^2},$$

使得对所有的 $\varphi \in C[-r, 0]$

$$L_\mu \varphi = \int r^0 d\eta(\theta, \mu) \varphi(\theta),$$

特别地

$$L_\mu X_t = \int r^0 d\eta(\theta, \mu) X(t + \theta).$$

考虑

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - L_\mu e^{\lambda \varphi} I) &= 0, \\ \sigma(\mu) &= \{\lambda \mid \det(\lambda I - L_\mu e^{\lambda \varphi} I) = 0\}. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

假定: (H₁) 方程 (1.2.2) 有一对简单特征值

$$\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu),$$

且满足

$$\alpha(0) = 0, \quad \omega(0) = \omega_0 > 0, \quad \alpha'(0) \neq 0.$$

(H₂) $\sigma(0)$ 的所有其他根具有负实部.

对 $\phi \in C^1[-r, 0]$ 定义

$$A(\mu)\varphi = \begin{cases} \frac{d\varphi}{d\theta}, & -r \leq \theta < 0, \\ \int d\eta(s, \mu)\varphi(s) = L_\mu\varphi, & \theta = 0, \end{cases}$$

$$R\phi = \begin{cases} 0, & -r \leq \theta < 0, \\ f(\phi, \mu), & \theta = 0, \end{cases}$$

于是可得

$$X'_t = A(\mu)X_t + RX_t. \quad (1.2.3)$$

令 $q(\theta)$ 是 $A(0)$ 的属于特征值 $\lambda(0)$ 的特征向量, $A(0)$ 的共轭算子为 $A^*(0)$:

$$A^*(0)\alpha(s) = \begin{cases} -\frac{d\alpha(s)}{ds}, & 0 < s \leq r, \\ \int r^0 d\eta^T(t, 0)\alpha(-t), & s = 0, \end{cases}$$

其中 η^T 为 η 的转置, 简记 $A(0) = A, A^*(0) = A^*$.

令 $\bar{\lambda}(0)$ 为 A^* 的特征值, 即

$$A^*q^* = -i\omega_0q^*.$$

对 $\psi \in C[0, r], \varphi \in C[-r, 0]$ 定义

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \bar{\psi}(0)\varphi(0) - \int_{\theta=-r}^0 \int_{\xi=0}^{\theta} \bar{\psi}^T(\xi - \theta)d\eta(\theta)\varphi(\xi)d\xi,$$

将 q, q^* 正规化, $\langle q^T, q \rangle = 1, \langle q^*, q \rangle = 0$.

定义 $z = \langle q^*, X \rangle, W = X - zq - \bar{z}q = X - 2\text{Re}\{zq\}$. 令 X_t 为 $\mu = 0$ 时 (1.2.3) 的解, 定义

$$\begin{aligned} z(t) &= \langle q^*, X_t \rangle, \\ W(t, \theta) &= X_t(\theta) - 2\text{Re}\{z(t)q(\theta)\}. \end{aligned}$$

则在 C_0 流形上有

$$W(t, \theta) = W(z(t), \bar{z}(t), \theta),$$

此时

$$W(z, \bar{z}, \theta) = W_{20}(\theta)\frac{z^2}{2} + W_{11}(\theta)z\bar{z} + W_{02}(\theta)\frac{\bar{z}^2}{2} + W_{30}(\theta)\frac{z^3}{6} + \dots$$

事实上, z 与 \bar{z} 是关于 C_0 在 q, q^* 方向上的坐标, 且如果 X_t 为实的, 则 W 亦是实的, 并有

$$\langle q^*, W \rangle = 0.$$

对 $X_t \in C_0$, 有

$$\langle q^*, X'(t) \rangle = \langle q^*, AX_t + RX_t \rangle.$$

又由于 $\mu = 0$, 于是

$$z'(t) = i\omega_0z(t) + \bar{q}^*(0)f(W(z, \bar{z}, \theta)) + 2\text{Re}zq(\theta) = i\omega_0z + \bar{q}^*(0)f_0(z, \bar{z}).$$

令 $z' = i\omega_0 z(t) + g(z, \bar{z})$. 下面计算展开系数. 令

$$g(z, \bar{z}) = g_{02} \frac{z^2}{2} + g_{11} z \bar{z} + g_{20} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \cdots,$$

$$f_0 = f_{z^2} \frac{z^2}{2} + f_{z^{-2}} \frac{\bar{z}^2}{2} + f_{z\bar{z}z\bar{z}} f_{z^2 \bar{z}} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \cdots,$$

则有

$$\begin{aligned} g_{20} &= \bar{q}^*(0) f_{z^2}, \\ g_{11} &= \bar{q}^*(0) f_{z\bar{z}}, \\ g_{02} &= \bar{q}^*(0) f_{z^{-2}}, \\ g_{21} &= \bar{q}^*(0) f_{z^2 \bar{z}}, \end{aligned}$$

令

$$C_1(0) = \frac{i}{2\omega_0} \left[g_{11} g_{20} - 2|g_{11}|^2 - \frac{|g_{02}|^2}{3} \right] + \frac{g_{21}}{2},$$

$$\mu_2 = -\frac{\operatorname{Re} C_1(0)}{\alpha'(\mu_0)}, \quad \beta_2 = 2\operatorname{Re} C_1(0).$$

如果 $\operatorname{Re} C_1(0) < 0$, 那么 Hopf 分支周期解是渐近稳定的; 如果 $\operatorname{Re} C_1(0) > 0$, 那么 Hopf 分支周期解是不稳定的; 如果 $\mu_2 > 0$, 那么 Hopf 分支方向为 $\mu > \mu_2$; 如果 $\mu_2 < 0$, 那么 Hopf 分支方向为 $\mu < \mu_2$.

1.3 时滞微分方程对称分支理论简介

具有某种对称性的时滞系统, 其所对应线性化系统的特征方程在特定的参数值处一般会有一对多重的特征根. 这样, 通常的时滞微分方程分支定理不能够被应用. 吴建宏教授将 Golubitsky 等关于常微分方程对称性分支理论推广到泛函微分方程上去, 建立了下面的对称性分支定理 (参见 (Wu, 1998)).

令 $\tau > 0$ 是一个给定的常数, $C := (C([-\tau, 0]), \mathbf{R}^n)$ 表示连续映射 $\phi: [-\tau, 0] \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的集合, 并对其中的任意元素 φ 赋予上确界范数 $\|\varphi\| = \sup_{[-\tau, 0]} \varphi(\theta)$. 则 C 是一个 Banach (巴拿赫) 空间. x_t 是空间 C 中元素的通常记号, 定义为 $x_t(s) = x(t+s)$, $s \in [-\tau, 0]$.

设算子 $L: \mathbf{R} \times C \rightarrow \mathbf{R}^n$ 关于第二个变量是连续的和线性的, $f: \mathbf{R} \times C \rightarrow \mathbf{R}^n$ 连续; 关于第二个变量具有连续的一阶和二阶导数, 且对于 $\alpha \in \mathbf{R}$ 和 $\varphi \in C$ 有 $f(\alpha, 0) = 0$ 和 $\frac{\alpha}{\alpha\varphi} f(\alpha, 0) = 0$ 成立.

我们考虑如下泛函微分方程系统的对称 Hopf 分支问题

$$x'(t) = L(\alpha)x_t + f(\alpha, x_t). \quad (1.3.1)$$

众所周知, 对于每个固定的 α 线性系统

$$x'(t) = L(\alpha)x_t \quad (1.3.2)$$

产生具有无穷小生成元 $A(\alpha)$ 的线性算子的强连续半群, 而且该无穷小生成元 $A(\alpha)$ 满足

$$A(\alpha)\phi = \phi', \quad \phi \in \text{Dom}(A(\alpha)),$$

这里 $\text{Dom}(A(\alpha)) = \{\phi \in C \mid \phi' \in C, \phi'(0) = L(\alpha)\phi\}$. 另外, $A(\alpha)$ 的谱 $\sigma(A(\alpha))$ 由特征根组成, 而特征根是特征方程

$$\det \Delta(\alpha, \lambda) = 0$$

的解, 其中特征矩阵 $\Delta(\alpha, \lambda)$ 为

$$\Delta(\alpha, \lambda) = \lambda Id - L(\alpha)(e^\lambda Id).$$

在本节中, 我们对含参数泛函微分方程系统 (1.3.1) 作如下假设:

(A₁) 特征矩阵关于 α 连续可微的, 存在 $\alpha_0 \in \mathbf{R}$ 及 $\beta_0 > 0$ 使得

- (1) $A(\alpha_0)$ 具有特征根 $\pm i\beta_0$;
- (2) 特征根 $\pm i\beta_0$ 的广义特征空间 $U_{i\beta_0}(A(\alpha_0))$ 由所有特征向量构成;
- (3) $A(\alpha_0)$ 的其余特征根都不是 $\pm i\beta_0$ 的整数倍.

(A₂) 存在一个作用在 \mathbf{R}^n 上的紧 Lie 群 Γ 使得 $L(\alpha)$ 和 $f(\alpha, \cdot)$ 都是 Γ -等变的, 即对于一切的 $(\alpha, \rho, \phi) \in \mathbf{R} \times \Gamma \times C$, 有 $f(\alpha, \rho\phi) = \rho f(\alpha, \phi)$, 且 $L(\alpha)\rho\phi = \rho L(\alpha)\phi$ 成立, 这里 $\rho\phi \in C$ 由 $(\rho\phi)(s) = \rho\phi(s), s \in [-\tau, 0]$ 给出.

假设 (A₁) 是通常的 Hopf 分支条件; (A₂) 描述了系统 (1.3.1) 具有某种对称性, 即可由某个紧 Lie 群 Γ 来刻画这种对称性. 注意到, 我们不要求特征根 $\pm i\beta_0$ 是单重的. 实际上, 对称性的出现会引起纯虚根变成多重的, 因此泛函微分方程的一般 Hopf 分支理论不能被应用 (参见文献 (Guo, Huang, 2007)). 实际上, 在假设 (A₁) 下, 特征根 $\pm i\beta_0$ 的广义特征空间 $U_{i\beta_0}(A(\alpha_0))$ 可以看作由 $\text{Re}(e^{i\beta_0(\cdot)}b)$ 和 $\text{Im}(e^{i\beta_0(\cdot)}b)$ 张成的实向量空间, 其中 $b \in \text{Ker}\Delta(\alpha_0, i\beta_0)$.

(A₃) 存在 Γ 的 m 维绝对不可约表示 V 使得 $\text{Ker}\Delta(\alpha_0, i\beta_0)$ 与 $V \oplus V$ 同构, 这里 Γ 在 $V \oplus V$ 上的作用定义为 $\gamma(v_1, v_2) = (\gamma v_1, \gamma v_2), \gamma \in \Gamma, v_1, v_2 \in V$.

若 (A₁) 和 (A₃) 成立, 设 $\{b_{j1} + ib_{j2}\}_{j=1}^m$ 为 $\text{Ker}\Delta(\alpha_0, i\beta_0)$ 的一组基. 定义 $\sin \beta, \cos \beta \in C$ 如下:

$$\sin \beta(\theta) = \sin(\beta\theta), \quad \cos \beta(\theta) = \cos(\beta\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0],$$

记

$$\begin{aligned} \varepsilon_j &= \sin \beta_0 b_{j1} + \sin \beta_0 b_{j2}, \\ \varepsilon_{m+j} &= \cos \beta_0 b_{j1} - \sin \beta_0 b_{j2}, \end{aligned} \quad 1 \leq j \leq m,$$

那么, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2m}$ 就形成广义特征空间 $U_{i\beta_0}(A(\alpha_0))$ 的一组基.

依据吴建宏教授的结论, 存在 $\delta_0 > 0$ 以及一个连续可微函数 $\lambda: (\alpha_0 - \delta_0, \alpha_0 + \delta_0) \rightarrow C$, 使得 $\lambda(\alpha_0) = i\beta_0$, $\lambda(\alpha)$ 是 $A(\alpha)$ 的特征根, $U_{\lambda(\alpha)}(A(\alpha))$ 由 $A(\alpha)$ 的相应的特征向量构成, 并且 $\dim U_{\lambda(\alpha)}(A(\alpha)) = \dim U_{i\beta_0}(A(\alpha_0))$.

为了研究方程 (1.3.1) 的局部对称分支性质, 我们还需要下列横截条件

$$(A_4) \quad \left. \frac{d}{d\alpha} \operatorname{Re} \lambda(\alpha) \right|_{\alpha=\alpha_0} \neq 0.$$

根据一般的 Hopf 分支定理, 若特征根 $\pm i\beta_0$ 是单重的, 则条件 (A_1) 和 (A_4) 可以保证 Hopf 分支现象的产生, 某些具体的情况下, 还可以计算分支方向和 Hopf 分支周期解的稳定性.

令 $\omega = \frac{2\pi}{\beta_0}$, 并且设 P_ω 为所有连续的 ω 周期函数 $x: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 的全体所构成的空间, $\Gamma \times S^1$ 在 P_ω 上的作用定义为

$$(\gamma, \theta)x(t) = \gamma x(t + \theta), \quad \theta \in S^1, \quad x \in P_\omega, \quad \gamma \in \Gamma.$$

设 SP_ω 是 P_ω 的子空间, 它表示当 $\alpha = \alpha_0$ 时, 方程 (1.3.1) 的所有 ω 周期解的全体. 则对于任意的子群 $\Sigma \leq \Gamma \times S^1$, 不动点集

$$\operatorname{Fix}(\Sigma, SP_\omega) = \{x \in SP_\omega \mid (\gamma, \theta)x = x, \forall (\gamma, \theta) \in \Sigma\}$$

是一个子空间.

定理 1.3.1 假定上述假设 (A_1) — (A_4) 都成立, 如果存在子群 $\Sigma \leq \Gamma \times S^1$ 使得 $\dim \operatorname{Fix}(\Sigma, SP_\omega) = 2$, 那么对于空间 $\operatorname{Fix}(\Sigma, SP_\omega)$ 选定的一组基 δ_1, δ_2 , 存在常数 $a_0 > 0, a_0^* > 0, \sigma_0 > 0$, 以及关于 a 的连续可微函数 $\alpha: R_{a_0}^2 \rightarrow R, \omega^*: R_{a_0}^2 \rightarrow (0, \infty)$ 和 $x^*: R_{a_0}^2 \rightarrow C(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$, 使得对于每个 $a \in R_{a_0}^2$, $x^*(a)$ 是当参数 $\alpha = \alpha(a)$ 时系统有 $\omega^*(a)$ 周期解, 且满足

$$\begin{aligned} \gamma x^*(a)(t) &= x^*(a) \left(t - \frac{\omega^*(a)}{\omega} \theta \right), \quad (\gamma, \theta) \in \Sigma, \\ x^*(0) &= 0, \quad \omega^*(0) = \omega, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \\ x^*(a) &= (\delta_1, \delta_2)a + o(|a|), \quad |a| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

这里 $R_{a_0}^2 = \{a \in \mathbf{R}^2; |a| < a_0\}$ 且 $C(\mathbf{R}; \mathbf{R}^n)$ 表示由 \mathbf{R} 到 \mathbf{R}^n 的连续函数全体赋予了上确界范数而构成的巴拿赫空间. 而且, 当 $|\alpha - \alpha_0| < \alpha_0^*, \left| \omega^* - \frac{2\pi}{\beta_0} \right| < \sigma_0$, 方程 (1.8.1) 任意 ω^* 周期解 x 满足 $\|x_i\| < \sigma_0$, 且对于 $(\gamma, \theta) \in \Sigma$ 和 $t \in \mathbf{R}$ 有 $\gamma x(t) = x \left(t - \frac{\omega^*}{\omega} \theta \right)$ 成立, 则 x 一定可以表示成上面的形式.

1.4 耦合生物振子研究的群论方法简介

环状的几何结构已被广泛应用于生理生化建模的研究之中. Linkens 等在 1976 年最先利用 van der Pol 振子的环状耦合模拟了哺乳动物的肠道蠕动, 其后, 又有许多学者研究了三个新型神经元振子的环状耦合模型, 并将这项工作推广到神经网络理论背景下的环状模型. 从生理模型的观点来看, 环形网络的重要性在于它们可以作为更复杂的振子模型的基本组成成分, 同时, 许多数学方法已被应用到环状耦合振子的分析之中. 用群论的观点研究上述问题, 是研究耦合振子系统的一种相对新颖的方法, 这种方法适用于具有某种对称性的网络, 比如环状网络. 特别地, 人们愿意考虑 n 个非线性振子的环状对称耦合, 并用其解释了为什么某些对称生命系统广泛地存在着锁相振动的模式. 通过建模, 人们研究了产生对称破缺分支的不同的活动模式之间的转换. 重要的是, 对称破缺分析依赖于振子之间耦合的性质而与各个振子内在的动力学细节无关. 这使得人们可以只依据对称性去区分不同的模型.

单个振子具有相对简单的动力学行为, 如果考虑集体行为, 需要将它们耦合起来以使相互之间有交互. 耦合是生物系统中一种非常常见的现象. 在这样的系统中, 每个振子都与其他所有振子有相互作用, 从而产生奇妙的生物现象. 一个代表性的例子就是, 单个萤火虫会受到整个族群的影响, 从而一群萤火虫同步发亮.

下面我们以生物振子的耦合为例, 介绍 Golubitsky 和 Stewart 的数学思想. 如果有两个相同的振子对称地耦合在一起, 那么最典型的行为模式就是完全同步或完全反同步. 这里的对称是指, 改变两个振子的排列次序时方程不变, 更专业的说法就是等变. 这是相同振子耦合时对称和对称破缺影响的最简单的例子. 同步振动保持对称性, 而反同步破坏对称性. 然而, 并不是所有的对称都消失, 反同步解在交换两个振子并移动半个周期的相位的作用下不变. 为了提供一个具体的形象的数学思想, 考虑一个将四个相同的振子连成一个正方形的网络, 其中任意两个相邻的振子的耦合方式都相同. 如果用向量 $u_i(t)$ 表示第 i 个振子在 t 时刻的状态, 则整个系统的状态可以表示成

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t)).$$

状态 $u(t)$ 可以具有两种不同的对称: 空间对称和时间对称. 当两个或多个振子的行为完全一致, 也就是同步时产生空间对称. 例如, 如果振子 1, 2 是同步的, 则对所有的时间 t , 都有

$$u_1(t) = u_2(t),$$