纯粹数学与应用数学专著·典藏版

第6号

哥德巴赫猜想

(第二版)

潘承洞 潘承彪 著

科学出版社

纯粹数学与应用数学专著　第6号

哥德巴赫猜想

（第二版）

潘承洞　潘承彪　著

科学出版社

1981

内 容 简 介

本书系统介绍有关著名数学难题——Goldbach 猜想的研究成果，特别是我国数学家的重大贡献，同时介绍研究这一问题所要用到一些重要方法.

图书在版编目(CIP)数据

纯粹数学与应用数学专著丛书：典藏版/杨乐主编. —北京：科学出版社，2018.1

ISBN 978-7-03-055754-4

Ⅰ. ①纯… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①数学 Ⅳ. ①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 298639 号

责任编辑：赵彦超 / 责任校对：李静科
责任印制：张 伟 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
1981 年 1 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2018 年 1 月 印 刷 印张：20 1/2
字数：548 000

第二版序

继 2000 年之后, 去年, 科学出版社又一次提出了要再版本书的建议.

1978 年, 为了对 Goldbach 猜想研究成果做一个系统的阶段性总结, 并反映我国数学家所做出的贡献, 承洞承担了撰写这样一本书的任务. 他确定了著书的原则、内容的选择及结构安排, 我协助他完成了这一工作, 于 1981 年出版了本书中文版, 并按出版计划提交了本书的英文稿. 由于外来的障碍, 历经十年的曲折, 科学出版社终于在 1992 年出版了英文版. 国内外对本书的中、英文版都给予了认可和好评.

三十多年来, 虽然对书中为研究猜想所利用的方法、理论和结论都有了一些改进和发展 (这在网上很容易查到), 但对猜想研究本身并无实质性进展. 本书至今仍是国际上唯一的一本较为系统总结 Goldbach 猜想研究的著作. 可以一提的是, 在广义 Riemann 假设下, J.-M. Deshouillers 等证明了：每个不小于 9 的奇数都是三个奇素数之和 (见*Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society*, **3**(1997), 99–104). 但这是一个条件结果, 所以, 根据我们的原则, 本书的主要内容不加改动再版是合适的.

本版中所增加的一些内容及改动是：

(1) 在最后添加了两个附录, 附录 1 是关于偶数 Goldbach 猜想的两个注记, 介绍了承洞所提出的关于处理偶数 Goldbach 猜想的两个想法, 供大家参考, 这一内容在英文版中就有了; 在附录 2 中介绍了承洞提出的小区间上的素变数三角和估计的一个新的分析方法及其应用, 这大大改进了 5.1 节定理 2 及 6.3 节定理 3.

(2) 改进了 7.3 节中一些结论的表述, 使其更便于应用.

(3) 研究 Goldbach 猜想需要用到许多数论, 特别是解析数论方面的基础知识, 而这些在书中是只能引用不能证明的. 在我们写本书时, 国内外解析数论方面的书并不多, 所以我们只能引用大量分散的国外文献, 这对读者是很不方便的. 后来我们又写了一些书 (见增加的参考文献 [148]—[150]), 本书中要引用的知识, 大约除了两个结论外, 都能在这些书中找到, 所以我们在所引用的不加证明的结论处相应地添加了这些新的参考文献, 以方便读者.

(4) 再版前, 我仔细地读了一遍全书, 改正了一些疏漏、笔误和印刷错误, 以及添加了一些注.

此外, 在英文版中, 我们还在 5.1 节中增加了估计线性素变数三角和估计的 Vaughan 方法, 这是Виноградов方法的一个很好的改进. 由于这可以在我们的《解析数论基础》的第十九章 §3 中找到, 所以在本版中就不介绍了.

我要郑重指出的是，不像 Fermat 大定理那样，近五十年来没有见到提出有希望的研究 Goldbach 猜想的新途径. 根据目前的情况，在相当一段时期内，还看不出会有条件去进一步真正研究猜想本身，更不必说解决猜想了. 这可以说是目前数论界的共同看法. 因此，我不希望本书的再版会引起"破解猜想热"，而这只是对于想了解这一猜想的数学工作者提供一本仍是有一定意义的参考书.

我衷心感谢科学出版社给予本书再版的机会，责任编辑赵彦超同志甚为仔细地改正了第一版中的不少疏漏和印刷错误，并对本版提出了许多有益建议，对此表示衷心感谢.

三十多年来，在我国解析数论界一批年轻人成长起来了，但是，景润和承洞却过早地离开了我们，我想，三十年后能保持本书的原貌再版，是以最难得、最有意义的方式来表达我们对景润和承洞的深切思念！

潘承彪
2011 年 5 月 16 日

第一版序

Goldbach (哥德巴赫) 猜想是 1742 年提出来的, 它是解析数论的中心问题之一. 二百多年来, 许多数学家为之付出了艰苦的劳动. 然而, 仅在最近六十年, 对这个著名数学难题的研究才取得了一系列成果, 并大大推动了整个解析数论的发展, 但是, 这一猜想迄今仍然没有被证明. 看来, 离到达这一问题的最终解决还有一段漫长的路. 或许可以认为, 目前对 Goldbach 猜想乃至整个解析数论的研究, 正处于一个期待着新突破的相对停滞阶段. Goldbach 猜想的研究差不多涉及了解析数论中所有的重要方法. 因此, 对过去的工作做一个阶段性的总结以利于今后的研究, 是十分必要的. 当然, 这一重要的工作不是我们力所能及的. 但基于上述原因, 并抱着抛砖引玉的愿望, 我们写了这一本书. 希望能把有关 Goldbach 猜想的最重要的研究成果, 特别是研究这一问题的最重要的方法做一尽可能系统的介绍, 以供有志于研究 Goldbach 猜想和解析数论的数学工作者参考.

早在 20 世纪 30 年代, 华罗庚教授就开始了对于这一猜想及其他著名解析数论问题的研究, 并得到了许多重要成果. 解放后不久, 他就在中国科学院数学研究所组织了一批青年数学工作者继续从事这方面的研究. 稍后, 我的导师闵嗣鹤教授在北京大学数学力学系开设了解析数论专门化课程. 在他们的热情指导和精心培养下, 我国年青的数学工作者对解析数论中许多著名问题的研究做出了重要贡献. 可以认为, 解析数论是迄今为止我国在近代数学中取得重大进展的最突出的分支之一, 其中对 Goldbach 猜想的研究所取得的成就尤其引人瞩目. 总结我国数学工作者的这些成就, 正是本书的主要目的之一.

在本书的写作过程中, 始终得到了山东大学党组织的热情关怀和大力支持, 我们谨致以深切的谢意.

我们衷心感谢华罗庚教授对撰写本书所给予的宝贵指导; 衷心感谢陈景润教授、王元教授和丁夏畦教授, 他们对本书的写作提供了极为有益的帮助和意见. 我们还要对裘卓明、楼世拓、姚琦和于秀源等同志所给予的帮助表示诚挚的谢意. 最后, 我们要感谢科学出版社的同志, 他们为本书的编辑出版作了大量的工作, 没有他们的帮助, 这本小册子是不可能这样快与读者见面的.

由于我们水平所限, 书中缺点、错误和遗漏之处在所难免, 切望读者不吝指教.

潘承洞

1979 年 3 月

符号说明

现将全书常用符号说明如下:

1. a, b, h, l, m, n, q 等表示整数;

   $p, p', p_1, p_2, \cdots$ 表示素数.

2. $c, c_1, c_2, \cdots$ 表示正常数. 除第 11 章外, 每一章中的正常数 $c_1, c_2, c_3, \cdots$ 均按在该章中出现先后的次序各自编号.

3. $e(z)=e^{2\pi i\, z}$.

4. $a|b$: a 整除 b; $a\nmid b$: a 不能整除 b; $p^k\|a$: $p^k|a$ 但 $p^{k+1}\nmid a$.

5. $(a, b, c, \cdots, l)$: $a, b, c, \cdots, l$ 的最大公约数;

   $[a, b, c, \cdots, l]$: $a, b, c, \cdots, l$ 的最小公倍数.

6. $a\equiv b(q)$: $q|(a-b)$.

7. $[x]$: 不超过 x 的最大整数;

   $\{x\}=x-[x]$; $\langle x\rangle=\min(\{x\},\ 1-\{x\})$.

8. $\chi(n), \chi_q(n), \chi(n) \bmod q$: 均表示模 q 的 Dirichlet 特征函数, 有时可省去 n 不写.

9. $\sum\limits_{h=1}^{q}{}'$: $\sum\limits_{\substack{h=1\\(h,\ q)=1}}^{q}$.

10. $\sum\limits_{\chi_q}, \sum\limits_{\chi \bmod q}$: 对模 q 的所有特征求和, 有时 q 可省去不写.

11. $\sum\limits_{\chi_q}{}^{*}, \sum\limits_{\chi \bmod q}{}^{*}$: 对模 q 的所有原特征求和, 有时 q 可省去不写.

12. $\chi_q\Leftrightarrow\chi^*_{q*}, \chi \bmod q\Leftrightarrow\chi^* \bmod q^*, \chi\Leftrightarrow\chi^*$: 均表示 χ^* 为对应于 χ 的原特征, χ 为由原特征 χ^* 所导出的特征, 见第 1 章 1.1(6), (6′).

13. Gauss 和: $G_\chi(m)=\sum\limits_{h=1}^{q}\chi(h)e\left(\dfrac{mh}{q}\right)$, 特别地, $\tau(\chi)=G_\chi(1)$.

14. Ramanujan 和: $C_q(m)=G_{\chi_q^0}(m)$, χ_q^0 为模 q 的主特征.

15. Euler 函数: $\phi(n)=n\prod\limits_{p|n}\left(1-\dfrac{1}{p}\right)$.

16. $\nu_1(n)$: n 的不同的素因子的个数;

    $\nu_2(n)$: n 的所有的素因子的个数 (按重数计算).

17. Möbius 函数

$$\mu(n)=\begin{cases}(-1)^{\nu_1(n)}, & n \text{ 无平方因子};\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

18. 除数函数 $d(n)$：$d(n)$ 等于 n 的所有正除数的个数.

19. Mangoldt 函数

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\log\ p, & n=p^k, p \text{ 是素数};\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

20. RH：Riemann 假设; GRH：广义 Riemann 假设. 见第 4 章.

21. $N\ (\alpha,\ T)$, $N\ (\alpha,\ T,\ \chi)$, $N\ (\alpha,\ T,\ q)$, $N^*(\alpha,\ T,\ q)$ 等的定义见第 4 章 (1), (3), (4), (5).

22. $\pi(x)=\sum\limits_{p\leqslant x}1$;

$\psi(x)=\sum\limits_{n\leqslant x}\Lambda(n)$.

23. $\pi\ (x;\ q,\ l)=\sum\limits_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv l(q)}}1$;

$\psi(x;q,l)=\sum\limits_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l(q)}}\Lambda(n)$.

24. $\pi(x;a,q,l)=\sum\limits_{\substack{ap\leqslant x\\ ap\equiv l(q)}}1$;

$\psi(x;a,q,l)=\sum\limits_{\substack{an\leqslant x\\ an\equiv l(q)}}\Lambda(n)$.

25. $S(\alpha,\ x)=\sum\limits_{p\leqslant x}e(\alpha p)$;

$S^{(1)}(\alpha,\ x)=\sum\limits_{p\leqslant x}e(\alpha p)\log\ p$;

$S^{(2)}(\alpha,\ x)=\sum\limits_{n\leqslant x}e(\alpha n)\ \Lambda(n)$.

26. $\psi(x,\ \chi)=\sum\limits_{n\leqslant x}\Lambda(n)\chi(n)$.

27. 命题 $\{a,b\}$：每一个大偶数可以表为一个不超过 a 个素因子的乘积及一个不超过 b 个素因子的乘积之和.

28. 设 $A>0$, 符号 $B=O(A)$ 或 $B\ll A$, 均表示存在一个正常数 c, 使 $|B|\leqslant cA$. 在一些问题中, 常数 c 可能依赖于某些参数, 则将它们标注在符号 “O” 或 “$\ll$” 的右下方, 或另加说明; 当这些参数不重要时, 则不具体指出.

目　　录

引　言

1742 年, 德国数学家 Christian Goldbach (1690—1764) 在和他的好朋友、大数学家 Leonhard Euler (1707—1783) 的几次通信中, 提出了关于正整数和素数之间关系的两个推测, 用现在确切的话来说, 就是

(A) 每一个不小于 6 的偶数都是两个奇素数之和;

(B) 每一个不小于 9 的奇数都是三个奇素数之和.

这就是著名的 Goldbach 猜想. 我们把猜想 (A) 称为 "关于偶数的 Goldbach 猜想", 把猜想 (B) 称为 "关于奇数的 Goldbach 猜想". 由于

$$2n+1=2(n-1)+3,$$

所以, 从猜想(A) 的正确性就立即推出猜想 (B) 亦是正确的. Euler 虽然没有能够证明这两个猜想, 但是对它们的正确性是深信不疑的. 1742 年 6 月 30 日, 在给 Goldbach 的一封信中他写道：我认为这是一个肯定的定理, 尽管我还不能证明出来.

Goldbach 猜想提出到今天已经有 237 年了, 可是至今还不能最后地肯定它们的真伪. 人们积累了许多宝贵的数值资料①, 都表明这两个猜想是合理的. 这种合理性以及猜想本身所具有的极其简单、明确的形式, 使人们和 Euler 一样, 也不由得不相信它们是正确的. 因而, 二百多年来这两个猜想一直吸引了许许多多数学工作者和数学爱好者, 特别是不少著名数学家的注意和兴趣, 并为此作出了艰巨的努力. 但是, 直至本世纪, 对这两个猜想的研究才取得了一系列引人瞩目的重大进展. 迄今得到的最好结果是, (1) 1937 年, 苏联数学家 И. М. Виноградов [132] 证明了：每一个充分大的奇数都是三个奇素数之和; (2) 1966 年, 我国数学家陈景润[18] 证明了：每一个充分大的偶数都可以表为一个素数与一个不超过两个素数的乘积之和. 这是两个十分杰出的成就. Виноградов 的结果基本上证明了猜想 (B) 是正确的②. 所以, 现在说到 Goldbach 猜想时, 总是只指猜想 (A), 即关于偶数的 Goldbach 猜想.

下面我们简要地谈一谈研究 Goldbach 猜想的历史.

---

① 例如, Shen Mok Kong 验证了猜想 (A) 对于所有不超过33×10^6 的偶数都是正确的.

② 后来, Вороздкий [6] 具体计算出, 当奇数 $N\geqslant e^{e^{16.038}}$ 时, 就一定可以表为三个奇素数之和. $e^{e^{16.038}}$ 是一个比 10 的 400 万次方还要大的数 (目前知道的最大素数是 Mersenne 素数 $2^{21701}-1$, 这只是一个 6533 位数). 而对于如此巨大的数字, 我们根本没有可能来一一验证, 对所有小于它的每一个奇数来说, 猜想 (B) 是否一定成立. 所以, Виноградов 是基本上解决了猜想 (B).

从提出 Goldbach 猜想到 19 世纪结束这 160 年中, 虽然许多数学家对它进行了研究, 但并没有得到任何实质性的结果和提出有效的研究方法. 这些研究大多是对猜想进行数值的验证, 提出一些简单的关系式或一些新的推测 (见 L. E. Dickson: *History of the Theory of Numbers*, I, 421–425). 总之, 数学家们还想不出如何着手来对这两个猜想进行哪怕是有条件的极初步的有意义的探讨. 但我们也应该指出：古老的筛法, 以及在此期间内 Euler, Gauss, Dirichlet, Riemann, Hadamard 等在数论和函数论方面所取得的辉煌成就, 为二十世纪的数学家们对猜想的研究提供了强有力的工具和奠定了不可缺少的坚实基础.

1900 年, 在巴黎召开的第二届国际数学会上, 德国数学家 D. Hilbert 在其展望二十世纪数学发展前景的著名演讲中, 提出了二十三个他认为是最重要的没有解决的数学问题, 作为今后数学研究的主要方向, 并期待在这新的一个世纪里, 数学家们能够解决这些难题. Goldbach 猜想就是 Hilbert 所提出的第八问题的一部分. 但是, 在此以后的一段时间里, 对 Goldbach 猜想的研究并未取得什么进展. 1912 年, 德国数学家 E. Landau 在英国剑桥召开的第五届国际数学会上十分悲观地说：即使要证明下面较弱的命题 (C), 也是当代数学家所力不能及的:

(C) 存在一个正整数 k, 使每一个 $\geqslant 2$ 的整数都是不超过 k 个素数之和.

1921 年, 英国数学家 G. H. Hardy 在哥本哈根数学会作的一次讲演中认为：Goldbach 猜想可能是没有解决的数学问题中的最困难的一个.

就在一些著名数学家作出悲观预言和感到无能为力的时候, 他们没有料到, 或者没有意识到对Goldbach 猜想的研究正在开始从几个不同方向取得了为以后证明是重大的突破, 这就是：1920 年前后, 英国数学家 Hardy, Littlewood 和印度数学家Ramanujan 所提出的“圆法”[41],[42]; 1920 年前后, 挪威数学家 Brun [9] 所提出的“筛法”; 以及 1930 年前后, 苏联数学家 Шнирелbман [109] 所提出的“密率”. 在不到 50 年的时间里, 沿着这几个方向对 Goldbach 猜想的研究取得了十分惊人的丰硕成果, 同时也有力地推进了数论和其他一些数学分支的发展.

(一) 圆 法

首先我们来谈谈圆法. 从 1920 年开始, Hardy 和 Littlewood 以总标题为 *Some problems of “Partitio numerorum”*发表了七篇论文. 在这些文章中, 他们系统地开创与发展了堆垒数论中的一个崭新的分析方法. 其中 1923 年发表的第Ⅲ, Ⅴ两篇文章就是专门讨论 Goldbach 猜想的[42]. 这个新方法的思想在 1918 年 Hardy 和 Ramanujan [41] 的文章中已经出现过. 后来人们就称这个新方法为 Hardy-Littlewood-Ramanujan 圆法. И. М. Виногралов 对圆法作了重大改进. 对于 Goldbach 猜想

来说, 圆法的思想是这样的: 设 m 为整数, 由于积分

$$\int_0^1 e(m\alpha)d\alpha=\begin{cases}1, & m=0;\\ 0, & m\neq 0,\end{cases} \tag{1}$$

其中 $e(x)=e^{2\pi ix}$, 所以方程

$$N=p_1+p_2,\quad p_1,p_2\geqslant 3 \tag{2}$$

的解数

$$D(N)=\int_0^1 S^2(\alpha,\ N)e(-N\alpha)d\alpha; \tag{3}$$

方程

$$N=p_1+p_2+p_3,\quad p_1,p_2,p_3\geqslant 3 \tag{4}$$

的解数

$$T(N)=\int_0^1 S^3(\alpha,\ N)e(-N\alpha)d\alpha, \tag{5}$$

其中

$$S(\alpha,\ N)=\sum_{2<p\leqslant N} e(\alpha p). \tag{6}$$

这样, 猜想 (A) 就是要证明: 对于偶数 $N\geqslant 6$ 有

$$D(N)>0; \tag{7}$$

猜想 (B) 就是要证明: 对于奇数 $N\geqslant 9$ 有

$$T(N)>0. \tag{8}$$

因此, Goldbach 猜想就被归结为讨论关系式 (3) 及 (5) 中的积分了. 显然, 为此就需要研究由 (6) 所确定的以素数为变数的三角和. 他们猜测三角和 (6) 有如下的性质: 当 α 和分母"较小"的既约分数"较近"时, $S(\alpha,N)$ 就取"较大"的值; 而当 α 和分母"较大"的既约分数"接近"时, $S(\alpha,N)$ 就取"较小"的值(这里的"较小"、"较大"、"较近"的确切含义将在下面作进一步的说明) . 进而他们认为, 关系式 (3) 及 (5) 中积分的主要部分是在以分母"较小"的既约分数为中心的一些"小区间" (即那些和它距离"较近"的点组成的区间) 上, 而在其余部分上的积分可作为次要部分而忽略. 这就是圆法的主要思想. 为了实现这一方法, 首先就要把积分区间分为上述的两部分, 其次把主要部分上的积分计算出来, 最后要证明在次要部分上的积分相对于前者来说可以忽略不计. 下面我们更具体地来加以说明.

设 Q, τ 为两个正数,

$$1\leqslant Q\leqslant \tau\leqslant N. \tag{9}$$

考虑 Farey 数列

$$\frac{a}{q}, (a,q)=1, \quad 0 \leqslant a < q, \quad q \leqslant Q. \tag{10}$$

并设①

$$I(q,\ a) = \left[\frac{a}{q} - \frac{1}{\tau},\quad \frac{a}{q} + \frac{1}{\tau}\right] \tag{11}$$

以及②

$$E_1 = \bigcup_{1 \leqslant q \leqslant Q} \bigcup_{\substack{0 \leqslant a < q \\ (a,\ q)=1}} I(q,\ a), \tag{12}$$

$$E_2 = \left[-\frac{1}{\tau},\quad 1 - \frac{1}{\tau}\right] \backslash E_1. \tag{13}$$

容易证明, 满足条件

$$2Q^2 < \tau \tag{14}$$

时, 所有的小区间 $I\ (q,\ a)$ 是两两不相交的 (第 6 章 6.1). 我们称 E_1 为基本区间或优弧 (basic intervals 或 major arcs), E_2 为余区间或劣弧 (supplementary~ 或 minor~). 如果一个既约分数的分母不超过 Q, 我们就说它的分母是“较小”的, 反之就说是“较大”的. 如果两个点之间的距离不超过 τ^{-1}, 我们就说是“较近”的. 显然, 当 $\alpha \in E_1$ 时, 它就和一分母“较小”的既约分数“接近”. 可以证明 (见第 6 章 6.1 节引理 2), 当 $\alpha \in E_2$ 时, 它一定和一分母“较大”的既约分数“接近”. 这样, 利用 Farey 数列就把积分区间 $\left[-\frac{1}{\tau},\quad 1-\frac{1}{\tau}\right]$ 分成了圆法所要求的两部分 E_1 和 $E_2$③. 因而, 我们有

$$D(N) = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} S^2(\alpha,\ N) e(-N\alpha) d\alpha = D_1(N) + D_2(N), \tag{15}$$

其中

$$D_i(N) = \int_{E_i} S^2(\alpha,\ N) e(-N\alpha) d\alpha, \quad i = 1, 2,$$

以及

$$T(N) = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} S^3(\alpha,\ N) e(-N\alpha) d\alpha = T_1(N) + T_2(N), \tag{16}$$

① 有时亦取 $I(q,\ a) = \left[\frac{a}{q} - \frac{1}{q\tau},\quad \frac{a}{q} + \frac{1}{q\tau}\right]$.

② $\cup$ 与 $\backslash$ 是集合的和与差的符号. 由于被积函数的周期为 1, 为方便起见, 我们把积分区间 $[0,1]$ 改为 $\left[-\frac{1}{\tau},\quad 1-\frac{1}{\tau}\right]$.

③ 这种方法通常称为 Farey 分割.

其中

$$T_i(N) = \int_{E_i} S^3(\alpha,\ N)e(-N\alpha)d\alpha, \quad i = 1, 2.$$

圆法就是要计算出 $D_1(N)$ 及 $T_1(N)$, 并证明它们分别为 $D(N)$ 及 $T(N)$ 的主要项, 而 $D_2(N)$ 及 $T_2(N)$ 分别可作为次要项而忽略不计.

Hardy-Littlewood[42,III] 首先证明了一个重要的假设性结果：如果存在一个正数 $\theta < \frac{3}{4}$, 使得所有的 Dirichlet L 函数的全体零点都在半平面 $\sigma \leqslant \theta$ 上, 则充分大的奇数一定可以表为三个奇素数之和, 且有渐近公式

$$T(N) \sim \frac{1}{2}\mathfrak{S}_3(N)\frac{N^2}{\log^3 N}, \quad N \to \infty, \tag{17}$$

其中

$$\mathfrak{S}_3(N) = \prod_{p|N}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p\nmid N}\left(1 + \frac{1}{(p-1)^3}\right). \tag{18}$$

同时他们猜测[42,III], 对于偶数 N 应该有

$$D(N) \sim \mathfrak{S}_2(N)\frac{N}{\log^2 N}, \quad N \to \infty, \tag{19}$$

其中

$$\mathfrak{S}_2(N) = 2\prod_{p>2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{\substack{p|N\\p>2}}\frac{p-1}{p-2}. \tag{20}$$

Hardy-Littlewood [42,V] 还证明了一个假设性结果：如果广义 Riemann 猜测成立, 那么几乎所有的偶数都能表为两个奇素数之和. 更精确地说, 若以 $E(x)$ 表示不超过 x 且不能表为二个奇素数之和的偶数个数, 他们在 GRH 下证明了

$$E(x) \ll x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}, \tag{21}$$

其中 ε 为一任意小的正数.

可以看出, 圆法如果成功的话, 是十分强有力的. 因为它不但证明了猜想的正确性, 而且进一步得到了表为奇素数之和的表法个数的渐近公式, 这是至今别的方法都不可能做到的. 虽然 Hardy-Littlewood 没有证明任何无条件的结果, 但是他们所创造的圆法及其初步探索是对研究 Goldbach 猜想及解析数论的至为重要的贡献, 为人们指出了一个十分有成功希望的研究方向.

1937 年, T. Esterman[27] 证明：每一个充分大的奇数一定可以表为两个奇素数及一个不超过两个素数的乘积之和.

1937 年, 利用 Hardy-Littlewood 圆法, И. М. Виноградов 终于以其独创的三角和估计方法无条件地证明了：每一个充分大的奇数都是三个奇素数之和, 且有渐

近公式 (17) 成立. 这就基本上解决了猜想 (B), 是一个重大的贡献. 通常把这一结果称为 Goldbach-Виноградов 定理, 简称三素数定理. Page 在 1935 年 (见第 10 章引理 5) 及 Siegel 在 1936 年 (见第 10 章引理 9) 证明了关于 L 函数例外零点的两个十分重要的结果, 由此可推出相应的算术级数中素数分布的重要定理 (见第 6 章 6.2 节引理 2 及 6.3 节引理 7). Виноградов 首先利用这两个结果之一 (用任意一个结果都可以) 证明了: 对适当选取的 Q 及 τ, 有

$$T_1(N) \sim \frac{1}{2}\mathfrak{S}_3(N)\frac{N^2}{\log^3 N}, \quad N \to \infty \tag{22}$$

(见第 6 章 6.2 节定理 1). 而他的主要贡献是在于利用他自己创造的素变数三角和估计方法, 证明了 Hardy-Littlewood 关于三角和 $S\,(\alpha,\,N)$ 性质的猜测. 简单地说, 他证明了: 对适当选取的 Q 和 τ, 当 $\alpha \in E_2$ 时有

$$S(\alpha,\ N) \ll \frac{N}{\log^3 N} \tag{23}$$

(见第 5 章 5.1 节). 由此容易推出

$$T_2(N) \ll \frac{N}{\log^3 N}\int_0^1 |S^2(\alpha,\ \ N)|d\alpha \ll \frac{N^2}{\log^4 N}. \tag{24}$$

这表明相对于 $T_1(N)$ 来说, $T_2(N)$ 是可以忽略的次要项. 这样, 由 (16), (22), (24) 就证明了三素数定理 (见第 6 章 6.2 节, 当用 Page 的结果时情况要复杂一些, 见第 6 章 6.3 节).

Виноградов [134],[138],[139] 创造和发展了一整套估计三角和的方法, 利用他的强有力的方法使解析数论的许多著名问题得到了重要的成果. 他对数论的发展作出了重要贡献.

1938 年, 华罗庚[47] 证明了更一般的结果: 对任意给定的整数 k, 每一个充分大的奇数都可表为 $p_1 + p_2 + p_3^k$, 其中 p_1, p_2, p_3 为奇素数 (见第 6 章 6.5 节定理 4).

在 Виноградов 的证明中, 有一点稍为不调和的地方. 他创造的线性素变数三角和估计方法, 从本质上来说是一种筛法. 这样一来, 处理基本区间 E_1 上的积分 $T_1(N)$ 用的是分析方法, 而处理余区间 E_2 上的积分 $T_2(N)$ 用的却是初等的非分析方法①. 为了消除这种不一致性, 就需要用分析方法来得到线性素变数三角和 $S(\alpha,\ N)$ 的估计式 (23). 1945 年, Ю. В. Линник[74]—[76] 提出了所谓 L 函数零点密度估计方法, 他利用这一方法同样证明了估计式 (23), 从而对三素数定理给出了一个有价值的新的完全分析的证明. Линник 的方法在解析数论的许多问题中都有重要应用. 他原来的证明是十分复杂的, 后来一些数学家[52],[82],[122] 进一步简化了

① 最近 R. C. Vaughan (C. R. Acad. Sc. Paris, Sér. A, **285**(1977), 981–983) 又给出了一个漂亮的初等证明. 亦可见 [148] 的第十九章 §2.

Линник 的证明 (见第 4 章 4.1 节, 第 5 章 5.2 节), 但也仍然是利用零点密度估计方法并要用到比较复杂的分析结果. 1975 年, Vaughan[127] 不用 L 函数零点密度估计方法, 给出了估计式 (23) 一个分析证明, 但他仍需用到复杂的 L 函数的四次中值公式. 1977 年, 潘承彪[91] 仅利用 L 函数的初等性质及简单的复变积分法对估计式 (23) 给出了一个新的简单的分析证明 (见第 5 章 5.3 节).

一些作者还讨论了有限制条件的三素数定理. 例如, 证明了充分大的奇数可以表为三个几乎相等的素数之和[17],[44],[84]. 吴方[146] 及一些数学工作者还讨论了其他形式的推广.

由上所述, 圆法对于猜想 (B) 的研究是极为成功的. 而用它来研究猜想 (A) 却收效甚微, 得不到任何重要的结果. 在 Виноградов 证明了三素数定理后不久, 利用他的思想, 一些数学家[23],[28],[46],[47],[120] 差不多同时证明了: 几乎所有的偶数都可以表为二个奇素数之和. 确切地说, 他们证明了, 对任给的正数 A, 我们有

$$E(x) \ll \frac{x}{\log^A x} \tag{25}$$

(见第 11 章 11.1 节). 华罗庚[47] 的结果比旁人要强, 他还证明了对任意给定的正整数 k, 几乎所有的偶数都可表为 $p_1 + p_2^k$, p_1, p_2 为奇素数.

1972 年, Vaughan[126] 证明了: 存在正常数 c 使

$$E(x) \ll x\ \exp(-c\sqrt{\log\ x}). \tag{26}$$

1973 年, Ramachandra[95] 把结果 (25) 推广到了小区间上 (见第 11 章 11.3 节).

1975 年, Montgomery 和 Vaughan[83] 进一步改进了 (26), 证明存在一个正数 $\Delta > 0$, 使

$$E(x) \ll x^{1-\Delta} \tag{27}$$

(见第 11 章 11.2 节). 这是一个很漂亮的结果. 在这里他们第一次把大筛法应用于对圆法中基本区间的讨论. 为了证明这一结果几乎用到了 L 函数零点分布的全部知识 (见第 10 章). 最近在文献 [21] 中, 定出了常数 $\Delta > 0.01$.

通常我们把可以表为两个奇素数之和的偶数称为 Goldbach 数, 而 $E(x)$ 称为不超过 x 的 Goldbach 数的例外集合. 以上关于猜想 (A) 的结果是证明了: 几乎所有的偶数都是 Goldbach 数, 并逐步改进了对 Goldbach 数的例外集合 $E(x)$ 的阶的估计.

此外, 还应该提到的是, Линник[77] 首先利用圆法研究了相邻 Goldbach 数之差这一有趣的问题, 我们将在第 12 章中讨论.

(二) 筛　法

其次我们来谈谈筛法. 在提出圆法的同时, 为了研究猜想 (A), 数论中的一个