最优再保险精算模型理论与应用

ZUIYOU
ZAIBAOXIAN JINGSUAN MOXING
LILUN YU YINGYONG

胡祥 ◎ 著

中国财经出版传媒集团
经济科学出版社
Economic Science Press

国家自然科学基金项目：
基于不完全信息和相依结构的最优再保险策略研究（项目编号：71601186）资助

ZUIYOU
ZAIBAOXIAN JINGSUAN MOXING
LILUN YU YINGYONG

最优再保险精算模型理论与应用

胡祥 ◎ 著

中国财经出版传媒集团
经济科学出版社
Economic Science Press

图书在版编目（CIP）数据

最优再保险精算模型理论与应用／胡祥著．—北京：经济科学出版社，2017.12
ISBN 978－7－5141－9016－8

Ⅰ．①最…　Ⅱ．①胡…　Ⅲ．①再保险－保险精算－研究－中国　Ⅳ．①F842.69

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第016759号

责任编辑：张　燕　王冬玲
责任校对：隗立娜
责任印制：邱　天

最优再保险精算模型理论与应用
胡　祥　著
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲28号　邮编：100142
总编部电话：010－88191217　发行部电话：010－88191522
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
天猫网店：经济科学出版社旗舰店
网址：http://jjkxcbs.tmall.com
固安华明印业有限公司印装
710×1000　16开　9印张　200000字
2018年5月第1版　2018年5月第1次印刷
ISBN 978－7－5141－9016－8　定价：45.00元

目　　录

第一章

绪　论

第一节

研究背景及意义

一、研究背景

三十多年来，我国保险业的高速发展已经成为经济增长的亮点之一。对于一般的财产以及人身风险，人们都可以通过保险得到相对全面而充足的保障。但是，对于巨灾损失的防范，我国保险业的参与程度却显得相当有限。以2008年的汶川地震为例，保险赔付占经济损失的比例不足1%。事实上，整个亚洲的保险业对于巨灾损失的保障都存在严重不足，根据慕尼黑再保险的“自然灾害服务”（Nat Cat Service）数据库，亚洲保险的巨灾损失承担率约为7%，而全球平均水平为30%。这种对于大额损失的保险缺失问题，已经引起了保险业界人士的高度重视，近年来频发的自然灾害又进一步把巨灾风险这一话题推向风口，成为大家关注的焦点。

众所周知，我国是世界上自然灾害最为严重的少数国家之一，如何对巨灾风险进行管理是我们亟须解决的问题。那么从经济学的视角观察，我国巨灾风险管理主要面临的问题有如下两点。

（1）市场力量应用不足。在各项减灾工作中，政府通常起主导作用，个体的参与很少，这样不可避免地造成市场上资金参与程度的不足。所以我们常常看到灾害发生时，国家财政会投入大量的资金进行灾害救济工作，这也从一

方面导致国民灾害防治意识的薄弱。

（2）损失融资比较缺乏。多年来，我国的灾害损失融资手段极为缺乏，主要手段就是依靠国家救济和慈善捐助，对其他手段，特别是保险手段的使用非常有限。与欧美等发达国家相比，我国的灾害损失与保险损失严重不匹配。

面对以上的问题，保险精算界的学者们主要提出了如下的几个应对措施，参见孙祁祥等（2004），党喆（2007）和赵彧（2008）。

1. 把握政府角色的定位

首先，灾害防御设施和许多防灾减损措施都属于公共物品，而政府正是有效的公共物品的提供者。其次，在灾害发生后，政府需要承担灾害救济的责任，但必须慎重考虑负面影响。目前，发达国家主要做法就是针对贫困地区的或承受特大灾害的社会成员提供必要的、适当的、部分的救济，其形式可能是无偿援助，也可能是低息贷款。最后，政府有必要介入灾害保险体系，但要控制承担风险的程度，以避免在重灾年份严重地削弱国民经济。

2. 充分重视保险和再保险机制的安排

首先，有效的保险机制必须收取与标的风险相匹配的费率，以便保证费率的充足性及保险体系的偿付能力，并体现公平合理的原则。从而可以加强防灾减损的动力，并在某种程度上规避逆向选择。其次，要积极促进巨灾保险的购买。具体措施可以包括增强民众对灾害风险的意识、提高保障水平等。最后，通过再保险在地域上分散风险、扩大承保能力、稳定经营结果，将风险在全球范围内分散是最佳方法。

由以上的观点可以看出，通过再保险，一方面，可以通过聚合风险，使在局部区域内部不可保的风险成为可保风险或准可保风险；另一方面，可以将巨灾风险分散给其他的保险人，从而由众多保险人共同承担风险。这样就能保护直接保险公司免受巨额索赔、异常风险的影响。关于我国再保险市场的相关研究，读者还可以参考祝向军（2002），周桦（2008）和姜鲁宁（2009）。

可见再保险是巨灾风险管理的最为有效的途径之一。

再保险是保险人将其所承保的危险责任的一部分或全部向其他保险人办理保险，即保险的保险。由于保险公司承担风险的能力是有限的，是受其资本金和公积金数量限制的，为求得一定的经营规模和经营业绩的稳定，增强竞争能

力和提高经济效益，保险公司还必须将其承保的危险责任进行合理安排。通过再保险安排，原保险人将危险责任的一部分或全部转嫁给了再保险人，那么原保险人也需要向再保险人支付一部分保险费，即分保费，当然原保险人在承保业务时也支出了部分费用，因此要向再保险人收取一定的手续费，即分保手续费。当保险事故发生后，原保险人与再保险人按事先约定合同形式，共同分摊损失赔款。

我国的再保险市场经过多年的发展，主要还存在如下的问题。

1. 再保险供求失衡

从再保险需求看，我国直保保费和保额连续多年来的大幅增长直接扩大了对再保险的需求。中国是世界上自然灾害频发的国家，由于再保险是巨灾风险管理的有效手段之一，因此频发的自然灾害也增加了对再保险的需求。同时，经济和工业的迅速发展也使得巨额保险标的的保险金额越来越高，增加了对再保险的需求。而从再保险供给来看，我国再保险市场规模小，承担风险特别是巨灾风险的能力十分有限。与国际再保险市场和国际再保险公司相比，我国再保险市场和再保险公司的整体规模和实力都存在较大的差距。

2. 保险市场主体不健全

我国再保险市场上经营主体单一。在 2002 年慕尼黑再保险公司和瑞士再保险公司获准在华筹建分公司之前，中国再保险公司是市场上唯一一家专业性的再保险公司。法定分保规定和垄断市场格局相结合，这一方面使市场缺乏竞争，商业再保险市场难以发展，而且国际再保险市场的分保佣金平均水平高于国内。国内外分保的利益差距和中国再保险公司本身在资本实力、专业服务和声誉等方面的不足，造成了我国商业分保费的大量外流。我国再保险市场体系不健全还表现在缺乏专业的再保险经纪人，有的地方还存在违规或非法从事再保险经纪业务的现象，这显然不利于中国再保险市场的健康发展。

3. 再保险监管不成熟

我国再保险监管的主要依据《保险法》对自留保费收入、每一危险单位自留以及国内优先分保等几条原则规定，对直接保险公司办理再保险的情况进行监管，而对再保险公司的监管主要参照对直接保险公司的监管进行。这种比

较粗略的再保险监管已经不能适应保险市场和再保险市场的发展。监管上，对于再保险的制度规定很不健全，与国际再保险立法存在很大的差距，并且无论是对再保险机构的准入和退出监管，还是对其他偿付能力的财务状况的监管，目前都还有很大的提升空间。

4. 保险公司自留风险过大

从自留比率来看，我国直接保险公司的自留比率偏高。一些保险公司甚至超过最低偿付能力标准规定的最大可接受自留保费进行承保。高自留比率说明我国直接保险公司普遍存在超额自留即超承保能力承担风险责任现象。此外，目前我国一些商业保险公司开展了部分洪水保险和地震附加保险，而这些风险累积责任很大的比重留在国内，未向国际市场分保，这都表明国内保险公司在自然巨灾等方面已存在巨额责任累积。

5. 保险经营模式粗放、产品单一

长期以来，我国再保险产品的定价，采用的是由政府部门统一管理的模式，且价格体系具有风险要素较少、风险分类粗略和定价过于简单的特点。在这种统一和单一的定价体系下，忽视了不同客户群在风险特征和风险水平上的差异，忽视了不同地区之间风险的现实差异，忽视了不同的经营主体之间经营水平的差异。同时，这种粗放的经营模式带来了一系列的市场问题。

6. 优先分保的规定缺乏量化标准

《保险法》和《保险公司管理规定》中都规定：保险公司需要办理再保险业务时，应当优先向中国境内的保险公司分保。但实际上，由于再保险本身就是一种包含分保佣金、赔付方式、技术支持、信息咨询和附加服务的综合性服务产品，所以很难说什么是“明显优惠的分保条件”。这样，优先向国内保险公司办理分保也成为一纸空文。同时，国外的著名再保险公司一般将市场定位于高保额、高风险、高技术、高利润的优质分保业务。而中国的再保险公司提供的产品单一、服务落后，并且国内分保佣金仅为20%左右，而国际再保险市场分保佣金平均在32%以上。

7. 再保险统计数据积累严重不足

严格地说，我国的再保险市场是从1996年以后才开始发展起来的，远远

落后于直保市场。由于发展时间短，再保险业务操作不够规范，保险统计口径不一，使得可供利用的再保险数据非常欠缺，这也在一定程度上影响了再保险产品的开发。

8. 再保险精算和管理等方面的专业人才缺乏

办理再保险，比经办直接保险业务涉及面更广泛，所需知识更为专业和精深。尤其对风险的评估、风险单位的划分、最优再保险的选择、自留额的确定、再保险费率的厘定、再保险准备金的评估等方面，都要求再保险人有很高的精算技能和业务管理水平。而国内由于各家参与再保险业务的公司过于关注短期利益，未能从长远角度看待再保险，从而丧失了许多再保险业务的开发而造就一批专业人才的机会。人才的缺乏是我国在再保险业务探索方面处于低水平、粗放经营的重要原因。

二、研究意义

本书主要的研究内容是设计出对再保险参与的个体而言最优的再保险合同形式。很显然如何合理有效地设计最优再保险，可以在很大程度上减少保险公司自留风险过大的风险，有助于增强损失强度和损失频率的稳定性。另外，最优再保险问题研究的现实意义还包括以下三点。

1. 控制承保责任，稳定经营成果

可通过分出、分入的调剂，使各险种的数量达到足够大，使原集中于某一区域的危险责任得到分散，从而减少经营风险。虽然某些年份保险事故损失较少，保险公司可能因为再保险费的支出而减少其利润额，但却能在损失较多年份，从再保险人处摊回赔偿金额，而控制其损失赔付，最终使其各年经营成果趋于稳定，而可获正常利润。

2. 增大承保规模，扩大经营范围

保险公司的承保能力受其自身财务状况的限制，为了保证有足够的偿付能力，保障被保险人的利益，相关的保险法都对保险公司的偿付能力有具体要求。因此，各个保险公司就可能在承揽业务时受到偿付能力的限制，结果使保

险公司减少了许多营业机会和获利能力，同时也影响了保险公司的信誉和保险保障作用的发挥。通过再保险的安排，保险公司不仅可招揽大保额的保险业务，而且可扩大险种范围，发挥保险的积极作用。

3. 便于业务指导，形成联合保险基金

再保险关系的确立，使原保险人的利益与再保险人的利益联系在一起。原保险人经营不善，防灾不力，事故赔付增加，再保险人的摊赔也就必然增多，因而再保险人对原保险人的经营情况十分关注，从而能促使原保险人业务的规范化经营。同时，由于再保险关系的存在，也使新成立的保险公司获得经验丰富的再保险公司的业务指导机会，促使其业务迅速纳入正常轨道。此外，由于再保险关系的确立，使原来各家独立的保险公司有了携手合作的机会，原来各家独立的保险公司筹集的保险基金也因此而汇集成了联合的保险基金。这样，通过再保险，既分担了危险责任，降低了保险成本，又提高了保障程度，保全了被保险人的合法权益。

再保险分出设计是再保险分出公司根据自身的承保业务状况、风险偏好以及财务状况等因素，运用再保险技术，对有关风险进行分散，保证保险公司经营稳定的综合分保安排，它是保险企业经营战略管理的综合体现。良好的再保险规划对再保险分出人非常重要，它可以帮助再保险分出人稳定经营业绩、提高承保能力、提供巨灾保障和盈余补贴。就巨灾风险而言，再保险安排的好坏意味着生存和破产的差异。最优再保险规划需要再保险分出人精心设计，对保险标的的损失进行充分而精确的评估，详见高洪忠（2008），杨旭和聂磊（2008）和史鑫蕊（2012）。

再保险形式多样，任何再保险分出人都可以找到满足其需要的再保险组合。再保险规划设计包括分析再保险人需要，确定自留额、再保险限额以及再保险成本。一般情况下，保险公司再保险安排的模式是：合理确定自留额，巨灾超赔保障为先，合同分保为主，临时分保、预约分保为辅。要充分发挥再保险积极作用，我们就必须选择最优的分保方式，确定合理的自留额，准确厘定费率和提取准备金。本书主要研究的内容是如何选择最优的再保险形式，包括在合理厘定再保险保费的原则下，确定自留水平。

再保险业务中分出人所保留的风险就是自留额，体现在数字上便是保额。自留额是保险公司根据其自身承受能力（含总承受能力和分出种承受能力）

而确定的每一个单位自己所承担的风险责任的最大限额。规模较小的保险公司，由于资金少，为增强自身实力，往往倾向于多留保费；另外，由于其抗风险能力弱，出于稳健经营的考虑，它倾向于经营赔付率较低的险种。所以对规模较小的保险公司，其自留额相对数会高些，而其绝对数因业务量的限制，一般不如大保险公司。再保险分出人、再保险中介以及再保险接收人通常会依据精确的数学模型来设定自留额。数学模型是对保险经营业务的高度抽象概括，其有效性和准确性取决于模型的基本假设及由此所得出的适用性结果。

第二节

再保险形式与保费准则

一、再保险形式

再保险合约设计的目的主要是满足再保险分出人的需求。为了理解各种合约再保险类型，首先需要掌握三个基本概念：自留额（自留水平）、责任限额和分保层。自留额是再保险分出人自己留取的风险或金额；责任限额是指根据再保险合约的有关条款，再保险接受人可以分入的最大责任额；分保层则用于将超额赔款再保险分成具有各自责任限额的不同层。

一般地，再保险合约按分保责任可以分为比例再保险和非比例再保险。比例再保险的一个显著特征是按照一定的比例在保险人和再保险人之间划分保额和损失。用数学语言描述是：对于风险损失 X，保险人承担的损失比例为 $\alpha(0<\alpha<1)$，并将剩余的部分 $1-\alpha$ 转移给再保险人。那么一旦损失发生，保险人支付赔款 αX，余下的 $(1-\alpha)X$ 则由再保险人支付。相应地，保险人和再保险人收取的期望纯保费为 $\alpha E[X]$ 和 $(1-\alpha)E[X]$。在非比例再保险中，主要包括超额索赔再保险和停止损失再保险。对于停损再保险，一旦损失发生，赔款将以如下的方式进行分担。

保险人赔付：$X \wedge M=\min\{X,M\}$，其中 $M>0$ 为自留水平；

再保险人赔付：$X-X \wedge M=\max\{0,X-M\}$。

可以看出，停损再保险的分保方式是以一次巨灾事故所发生赔款的总和为基础分担自负责任额和分保责任额。如果我们以每一危险单位在一次事故中所

发生的赔款计算自负责任额和分保责任额，那么就可以得出超额索赔再保险的合约。设每一危险单位的赔付损失为 X_i，保险人的自留额为 M_i，再保险人承担保险人所转移的损失不超过 L_i 的部分，即为再保险人的责任限额，其中 $L_i > M_i$。假设损失共发生 n 次，这样再保险人支付的总赔付额为 $\sum_{i=1}^{n} \min(\max(0, X_i - M_i), L_i)$。

以上的再保险合约都是以原保险人的承保风险为基础，将风险在再保双方之间进行分摊。如果我们同时考虑金融市场上的风险，例如，既考虑保险标的是否发生，又考虑资本市场的表现，以此为基础设计再保险合约，就能得出所谓的双机制再保险（double trigger reinsurance），详见 Gründl 等（2002）与 Eling和 Toplek（2009），这里不再具体介绍。在再保险市场，还有一种新型的再保险的创新形式，即财务再保险。关于财务再保险的研究，可参考彭雪梅（2002），杜鹃（2008）以及 De Lange 等（2002）。

二、保费准则

无论是何种再保险合约，再保险分出人都需要向再保险接收人支付一定额度的分出保费。按照传统的精算等价准则，有如下的 17 种保费原理，这些保费原理同样适用于再保险的定价，详见孟生旺和刘乐平（2007）和 Young（2004）。

（1）期望保费原理（expectation premium principle）：

$\prod(X) = (1+\beta)E[X]$，其中 $\beta > 0$，$E[X]$表示 X 的期望。

（2）标准差保费原理（standard deviation premium principle）：

$\prod(X) = E[X] + \beta\sqrt{D[X]}$，其中 $\beta > 0$，$D[Z]$表示 X 的方差。

（3）混合保费原理（mixed premium principle）：

$\prod(X) = E[X] + \beta D[X]/E[X]$，其中 $\beta > 0$。

（4）改进的方差保费原理（modified variation premium principle）：

$\prod(X) = E[X] + \beta\sqrt{D[X]} + \gamma D[X]/E[X]$，其中 β，$\gamma > 0$。

（5）中值保费原理（mean value premium principle）：

$\prod(X) = \sqrt{E[X^2]} = \sqrt{(E[X])^2 + D[X]}$。

(6) p阶中值保费原理 (p-mean value premium principle):

$\prod(X)=(E[X^p])^{1/p}$，其中 $p>1$。

(7) 半偏差保费原理 (semideviation principle):

$\prod(X)=E[X]+\beta\{E[X-EX]_+^2\}^{1/2}$，其中 $0<\beta<1$。

(8) Dutch保费原理 (dutch premium principle):

$\prod(X)=E[X]+\beta E[X-EX]_+$，其中 $0<\beta\leqslant 1$。

(9) 王氏保费原理 (wang's premium principle):

$\prod(X)=\int_0^{\infty}[\Pr(X\geqslant t)]^p dt$，其中 $0<p<1$。

(10) Gini保费原理 (gini premium principle):

$\prod(X)=E[X]+\beta E|X-X'|$，其中 $\beta>0$ 且 X' 是 X 独立复制。

(11) 广义分位数保费原理 (generalized percentile premium principle):

$\prod(X)=E[X]+\beta\{F_X^{-1}(1-p)-E[X]\}$，其中 $0<\beta$，$p<1$。

(12) TVaR保费原理 (TVaR premium principle):

$\prod(X)=(1/p)\int_{1-p}^{1}F_X^{-1}(x)dx$，其中 $0<p<1$。

(13) 方差保费原理 (variance premium principle):

$\prod(X)=E[X]+\beta D[X]$，其中 $\beta>0$。

(14) 半方差保费原理 (semivariance premium principle):

$\prod(X)=E[X]+\beta E[X-EX]_+^2$，其中 $\beta>0$。

(15) 二次效用保费原理 (quadratic utility premium principle):

$\prod(X)=E[X]+\gamma-\sqrt{\gamma^2-D[X]}$，其中 $\gamma>0$ 且 $\gamma^2\geqslant D[X]$。

(16) 协方差保费原理 (covariance premium principle):

$\prod(X)=E[X]+2\beta D[X]-\beta\mathrm{Cov}(X,Y)$，其中 $\beta>0$，Y 是一个随机变量。

(17) 指数保费原理 (exponential premium principle):

$\prod(X)=(1/\beta)\log E[\exp(\beta X)]$，其中 $\beta>0$。

第三节 风险度量

一、一致风险度量（coherent risk measure）

设 L^* 为一风险或损失变量的集合，则称实值函数 ρ：$L^* \to \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ 为一个风险度量。进一步，如果 ρ 满足如下的四条公理，则称其为集合 L^* 上的一致风险度量。

Axiom 1 平移不变性（translation invariance）

对于任意的 $L \in L^*$ 和 $l \in \mathbb{R}$，$\rho(L+l) = \rho(L) + l$。

Axiom 2 次可加性（subadditivity）

对于任意的 L_1，$L_2 \in L^*$，$\rho(L_1 + L_2) \leqslant \rho(L_1) + \rho(L_2)$。

Axiom 3 正齐次性（positive homogeneity）

对于任意的 $L \in L^*$ 和 $\lambda > 0$，$\rho(\lambda L) = \lambda\rho(L)$。

Axiom 4 单调性（monotonicity）

对于任意的 L_1，$L_2 \in L^*$ 且 $L_1 \leqslant L_2$ 几乎处处成立，那么 $\rho(L_1) \leqslant \rho(L_2)$。

容易验证，期望 $E(\cdot)$ 是满足以上四条公理，因此是一致风险度量；由于不满足次可加性，方差 $Var(\cdot)$ 和标准差 $\sqrt{Var(\cdot)}$ 则不满足次可加性。次可加性也是其他一些风险度量不能成为一致风险度量的最主要限制。

二、几类重要的风险度量

接下来我们将要讨论一些常用的风险度量以及它们的若干性质和计算方法。在本书的第三章和第四章，我们将会探究以这些风险度量作为最优化准则时，保险人在特定的保费原则下的最优再保险策略，因此本节的内容可以视为第三、第四章的预备知识。同时除了在最优再保险中有着重要应用之外，还可以将其应用到诸如最优资产分配等相关领域的研究当中，感兴趣的读者可以参考 Dhaene 等（2003），Cai 和 Li（2005），Cossette 等（2012），Dhaene 等（2012）。

定义 1.1 VaR（Value at Risk）给定置信水平 $\alpha\in(0,1)$，那么风险损失 X 在置信水平 α 条件下的 VaR 可以定义为：

$$\begin{aligned}\mathrm{VaR}_\alpha(X)&=\inf\{x\in\mathbb{R}:\Pr(X>x)\leqslant 1-\alpha\}\\&=\inf\{x\in\mathbb{R}:F_X(x)\geqslant\alpha\},\end{aligned}$$

其中，F_X 是 X 的分布函数。

关于 VaR 有如下的几条基本性质。

（1）对于任意的 $0<\alpha<1$，$\mathrm{VaR}_\alpha(X)=x_\alpha$ 存在且满足：

$$F_X(x_\alpha-)=\Pr(X<x_\alpha),F_X(x_\alpha)\geqslant\alpha.$$

（2）对于任意的 $x\in\mathbb{R}$，$0<\alpha<1$，

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X)\leqslant x\Leftrightarrow F_X(x)\geqslant\alpha$$

或等价于

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X)>x\Leftrightarrow F_X(x)<\alpha.$$

（3）$\mathrm{VaR}_\alpha(X)$在 $\alpha\in(0,1)$上单调递增。

（4）$\mathrm{VaR}_\alpha(X)$关于 $\alpha\in(0,1)$左连续。

（5）$F_X^{-1}(F_X(x))\leqslant x$。

（6）$F_X(F_X^{-1}(\alpha))\geqslant\alpha$。

（7）如果分布函数 F_X 严格递增，那么 $F_X^{-1}(F_X(x))=x$。

（8）如果 F_X 连续，那么 $F_X(F_X^{-1}(\alpha))=\alpha$。

注 1.1 给定 $x_\alpha\in\mathbb{R}$，x_α 成为某一分布函数 F_X 的 $\mathrm{VaR}_\alpha(F_X)$的充分必要条件是如下的两个条件成立：

（1）$F_X(x_\alpha)\geqslant\alpha$，

（2）对于 $x<x_\alpha$，$F_X(x)<\alpha$。

因此，如果随机变量 X 的分布函数 F_X 在$\mathbb{R}$上连续且严格递增，那么对于任意的 $\alpha\in(0,1)$，$\mathrm{VaR}_\alpha(X)$是方程 $F_X(x)=\alpha$ 或 $\bar{F}_X(x)=1-\alpha$ 的唯一解，其中 $\bar{F}_X(x)=\Pr\{X>x\}=1-F_X(x)$。

如果非负随机变量 X 的分布函数 F_X 在 $[0,\infty)$ 上连续且严格递增，$F_X(0)=0$，那么对于 $\alpha\in(0,1)$，$\mathrm{VaR}_\alpha(X)$是方程 $F_X(x)=\alpha$ 或 $\bar{F}_X(x)=1-\alpha$ 的唯一解。

如果非负随机变量 X 的分布函数 F_X 在 $(0, \infty)$ 上连续且严格递增，$F_X(0)>0$，那么对于 $\alpha\in(F_X(0),1)$，$VaR_\alpha(X)$ 是方程 $F_X(x)=\alpha$ 的唯一解。并且对于 $\alpha\in(0,F_X(0)]$，都有 $VaR_\alpha(X)=0$ 成立。

定义 1.2 CTE（conditional tail expectation）给定置信水平 $\alpha\in(0,1)$，对于损失变量 X，如果 $E(|X|)<\infty$，$Pr(X>VaR_\alpha(X))>0$，那么 X 的尾部条件期望可以定义为：

$$CTE_\alpha(X)=E(X|X>VaR_\alpha(X))$$

结合 VaR 和 CTE 的定义，我们有如下的关系成立：

$$CTE_\alpha(X)=VaR_\alpha(X)+\frac{E([X-VaR_\alpha(X)]_+)}{Pr\{X>VaR_\alpha(X)\}}.$$

特别的，如果 F_X 连续，那么，

$$CTE_\alpha(X)=VaR_\alpha(X)+\frac{E([X-VaR_\alpha(X)]_+)}{1-\alpha}$$

注 1.2 关于 VaR 和 CTE，有如下的几点需要注意。

（1）对于任意的随机变量都可以定义其 VaR；而只有对绝对可积的随机变量才能定义其 CTE。

（2）VaR 和 CTE 都不是一致风险度量。

定义 1.3 （TVaR（tail value at risk）和 ES（expected shortfall）对于风险损失变量 X，如果 $E(|X|)<\infty$，那么对于任意的 $\alpha\in(0,1)$，X 置信水平为 α 的尾部风险价值（tail valueatrisk）和期望损失亏空（expected shortfall）可定义为：

$$ES_\alpha(X)=TVaR_\alpha(X)=\frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_q(X)\,dq.$$

注 1.3 （1）对于给定的 α，$0<\alpha<1$，$TVaR_\alpha(X)>VaR_\alpha(X)$ 且 $TVaR_\alpha(X)$ 关于 α 单调递增。

（2）VaR、CTE 和 TVaR 之间有如下的关系：对于给定的 α，$0<\alpha<1$，如果 X 具有连续的分布函数 F_X，那么，

$$TVaR_\alpha(X)=CTE_\alpha(X)=E(X|X>VaR_\alpha(X)). \tag{1.1}$$

（3）TVaR 和 ES 是一致风险度量。