

权威 实用 经典



2019年

考研数学

高分复习全书 (数学三) 习题详解

曹显兵 刘喜波 / 编著

赠

2019年 考研数学

高分复习全书（数学三） 习题详解

曹显兵 刘喜波/编 著

中国人民大学出版社

· 北京 ·

目 录

第一部分 微积分	1
第一章 函数、极限与连续	1
习题精选一	1
第二章 导数与微分	5
习题精选二	5
第三章 微分中值定理与导数的应用	11
习题精选三	11
第四章 一元函数积分学	16
习题精选四	16
第五章 多元函数微分学	20
习题精选五	20
第六章 二重积分	25
习题精选六	25
第七章 无穷级数	30
习题精选七	30
第八章 常微分方程与差分方程	35
习题精选八	35
第二部分 线性代数	43
第一章 行列式	43
习题精选一	43
第二章 矩阵	46

习题精选二	46
第三章 向量	53
习题精选三	53
第四章 线性方程组	57
习题精选四	57
第五章 特征值与特征向量	64
习题精选五	64
第六章 二次型	72
习题精选六	72
第三部分 概率论与数理统计	77
第一章 随机事件与概率	77
习题精选一	77
第二章 随机变量及其分布	82
习题精选二	82
第三章 多维随机变量及其分布	86
习题精选三	86
第四章 随机变量的数字特征	93
习题精选四	93
第五章 大数定律和中心极限定理	98
习题精选五	98
第六章 数理统计的基本概念	101
习题精选六	101
第七章 参数估计	103
习题精选七	103

第一部分 微积分

第一章 函数、极限与连续

习题精选一

一、填空题

1. $(ab)^{\frac{3}{2}}$.

【分析】 此题为未定式“ 1^∞ ”型.

【详解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x} (a^x + b^x - 1) = e^{\frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x + b^x - 2}{x}} = e^{\frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} (a^x \ln a + b^x \ln b)} = e^{\frac{3}{2} (\ln a + \ln b)} = (ab)^{\frac{3}{2}}.$

2. $-\frac{3}{2}$.

【详解】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -\frac{2}{3}a.$

由题意知 $-\frac{2}{3}a = 1$, 所以 $a = -\frac{3}{2}$.

3. $10\ln 3$.

【详解】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} (3^x - 1) = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{f(x)}{\sin 2x} \right) = 0$, 从而有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin 2x} = 0$.

由 $\ln \left(1 + \frac{f(x)}{\sin 2x} \right) \sim \frac{f(x)}{\sin 2x}$, $3^x - 1 = e^{x \ln 3} - 1 \sim x \ln 3$, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{\sin 2x}}{x \ln 3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x^2 \ln 3} = 5,$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 10\ln 3.$$

4. $\frac{1}{2}$.

【分析】 作变量替换 $u = xt$, 然后求极限.

【详解】 令 $u = xt$, 则

$$\int_{\frac{x}{2}}^x \frac{e^u - 1}{t} dt = \int_{\frac{x}{2}}^{x^2} \frac{e^u - 1}{u} du,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x^2} \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{e^t - 1}{t} dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} \frac{e^u - 1}{u} du = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \left(2x \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} - x \frac{e^{x^2/2} - 1}{x^2/2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{x^2/2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2/2}(e^{x^2/2} - 1)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{x^2/2} - 1)}{x^2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

$$5. \alpha = 1, \quad \beta = \frac{1}{2}.$$

【详解】 由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x + \sin^2 x} - (\alpha + \beta \sin x)}{\sin^2 x}$ 存在知

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\sqrt{1 + \sin x + \sin^2 x} - (\alpha + \beta \sin x)] = 0,$$

可得 $\alpha = 1$.

用泰勒公式有

$$\begin{aligned}&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x + \sin^2 x} - (\alpha + \beta \sin x)}{\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}(\sin x + \sin^2 x) - \frac{1}{8}(\sin x + \sin^2 x)^2 - (1 + \beta \sin x) + o(\sin^2 x)}{\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\sin x + \frac{3}{8}\sin^2 x}{\sin^2 x}\end{aligned}$$

存在, 从而有 $\beta = \frac{1}{2}$.

故 $\alpha = 1, \quad \beta = \frac{1}{2}$.

二、选择题

1. (B)

【分析】 利用无穷小量阶的比较.

$$\text{【详解】 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin^2 x) \cos x}{3x^2 + 4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{3x^2 + 4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2 + 4x^3} = \frac{1}{3}.$$

所以 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的同阶但非等价无穷小. 答案应选(B).

2. (C)

$$\begin{aligned}\text{【详解】 } F(x) &= \int_0^x (x^2 - t^2) f(t) dt = x^2 \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t^2 f(t) dt, \\ F'(x) &= 2x \int_0^x f(t) dt + x^2 f(x) - x^2 f(x) = 2x \int_0^x f(t) dt.\end{aligned}$$

因为 $F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{x^k}$ 存在且不为零.

用洛必达法则有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x f(t) dt}{x^{k-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x)}{(k-1)x^{k-2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f'(x)}{(k-1)(k-2)x^{k-3}}$$

$$= 2f'(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(k-1)(k-2)x^{k-3}}$$

存在且不为零,从而 $k-3=0$, 即 $k=3$.

3. (A)

【详解】 函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的间断点是 $x=0, \pm \frac{\pi}{2}, 1$, 而

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)} = -1,$$

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

但 $\lim_{x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)} = \infty,$ 故答案应选(A).

4. (C)

【详解】 由 $f(x), g(x)$ 可导知, $f(x), g(x)$ 连续. 于是有: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$. 又 $f(x_0) < g(x_0)$, 所以有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. 故选(C).

【评注】 本题也可用排除法. 取 $f(x) = x, g(x) = x + 1$, 则 $f(x) < g(x), x \in (-\infty, +\infty)$. 但(A), (B), (D) 不成立, 故选(C).

5. (C)

【详解】 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 2$, 因而 $g(0) = 0, g'(0) = 2$. 故应选(C).

三、解答题

1. 【详解】 用洛必达法则有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{1 - \cos x + \sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{\sin x + 2 \sin x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{-2}{(1+x)(1-x)(1+2\cos x)} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

2. 【详解】 由泰勒公式有 $\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$

$$\sqrt[3]{1+2\sin^2 x} = 1 + \frac{2}{3}\sin^2 x + o(x^2),$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+2\sin^2 x}}{\tan^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{1}{2}x^2\right) - \left(1 + \frac{2}{3}\sin^2 x\right) + o(x^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}\sin^2 x}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

3. 【详解】 $\lim_{x \rightarrow 0} (3e^{\frac{x}{3}} - 2)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3e^{\frac{x}{3}} - 2)}{x}},$

而
故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3e^{\frac{x}{x-1}} - 3)}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{x}{x-1}} \frac{-1}{(x-1)^2} = -3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3e^{\frac{x}{x-1}} - 2)^{\frac{1}{x}} = e^{-3}.$$

4.【详解】 由洛必达法则有

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \sin \frac{\pi}{2}x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{-\sin(x-1)}{\cos(x-1)}}{-\left(\cos \frac{\pi}{2}x\right) \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\sec^2(x-1)}{\frac{\pi}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2}x\right) \frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{\frac{\pi^2}{4}} = -\frac{4}{\pi^2}.$$

5.【分析】 作代换 $t = \frac{1}{x}$, 转化“ $\infty - \infty$ ”型为“ $\frac{0}{0}$ ”型.

【详解】 令 $t = \frac{1}{x}$, 用洛必达法则有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \ln(1+t) \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+t)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

6.【详解】 由泰勒公式有 $\ln(1+ax) = ax - \frac{a^2x^2}{2} + o(x^2)$, 从而得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a}{x} - \left(\frac{1}{x^2} - a^2 \right) \ln(1+ax) \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a}{x} - \left(\frac{1}{x^2} - a^2 \right) \left(ax - \frac{a^2x^2}{2} + o(x^2) \right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a}{x} - \frac{a}{x} + a^3x + \frac{a^2}{2} - \frac{a^4x^2}{2} \right] = \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

【评注】 本题可通分直接利用洛必达法则, 但较烦琐且易出错.

7.【详解】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \sin(n\pi - \pi \sqrt{n^2+1})$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n+1} \sin \pi \frac{-1}{n + \sqrt{n^2+1}} = 0.$$

8.【分析】 应注意极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ 不存在情形的处理(要考虑左、右极限).

【详解】 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}} + e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}} + 1} + \frac{\sin x}{x} \right) = 1.$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} - \frac{\sin x}{x} \right) = 2 - 1 = 1,$$

所以 原式 = 1.

9.【详解】 当 $x < 0$ 时, $e^{tx} \rightarrow 0$, 故 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}} = x$. 当 $x = 0$ 时, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}} = \frac{1}{2}$. 当

$x > 0$ 时, $e^{tx} \rightarrow +\infty$, 故 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}} = 1$. 所以

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}} = \begin{cases} x & x < 0; \\ \frac{1}{2}, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

【评注】 含参量的极限一定要考虑参数的取值范围.

10.【详解】 $f(x)$ 的间断点为 $x = -k\pi - \frac{\pi}{2} (k = 0, 1, 2, \dots), x = 0, x = 1$.

因为 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\sin 1$, 故 $x = 0$ 为跳跃间断点.

因为 $x \rightarrow 1$ 时, $f(x)$ 的左、右极限均不存在, 故 $x = 1$ 为第二类间断点.

因为 $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{x(\pi + 2x)}{2\cos x} = -\frac{\pi}{2}$, 故 $x = -\frac{\pi}{2}$ 为可去间断点.

因为 $\lim_{\substack{x \rightarrow -k\pi - \frac{\pi}{2} \\ k=1, 2, \dots}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -k\pi - \frac{\pi}{2} \\ k=1, 2, \dots}} \frac{x(\pi + 2x)}{2\cos x} = \infty$, 故 $x = -k\pi - \frac{\pi}{2} (k = 1, 2, \dots)$ 为

第二类间断点.

11.【详解】 由于 $2x - 1 < [2x] \leq 2x$ 成立, 故当 $x \neq 0$ 时, 有

$$\frac{2x-1}{x} < \frac{[2x]}{x} \leq \frac{2x}{x}, \quad \text{即} \quad 2 - \frac{1}{x} < \frac{[2x]}{x} \leq 2, \quad \text{或} \quad \frac{2x-1}{x} > \frac{[2x]}{x} \geq \frac{2x}{x},$$

$$\text{即} \quad 2 - \frac{1}{x} > \frac{[2x]}{x} \geq 2.$$

$$\text{由夹逼原理,} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[2x]}{x} = 2.$$

$$\text{因为} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[2x]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{0}{x} = 0.$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

第二章 导数与微分

习题精选二

一、填空题

1. $-\frac{101!}{100}$.

【详解】 由于 $f(1) = 0$, 则 $f(x) = f(x) - f(1)$.

由导数的定义有

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} [(x+2)(x-3)(x+4) \cdots (x+100)]$$

$$= 3 \cdot (-2) \cdot 5 \cdot (-4) \cdots (-98) \cdot 101 = -\frac{101!}{100}.$$

2. $\frac{f'(0)}{2}.$

【详解】 用导数的定义.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos x)}{\tan^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2 \sin^2 \frac{x}{2})}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2 \sin^2 \frac{x}{2}) \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(2 \sin^2 \frac{x}{2}) - f(0)}{2 \sin^2 \frac{x}{2} - 0} \cdot \frac{\cos^2 x \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x} \right] = \frac{f'(0)}{2}. \end{aligned}$$

3. $\frac{1}{(x+1)^2} \ln \frac{2x-1}{x+1}.$

【详解】 令 $u = \frac{2x-1}{x+1}$, 则 $u'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}.$

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \cdot u'(x) = \ln u^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{3}{(x+1)^2} = \left(\ln \frac{2x-1}{x+1} \right) \frac{1}{(x+1)^2}.$$

4. e.

【详解】 $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + f(x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + f(x)]^{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{f(x)-f(0)}{\ln(1+x)-\ln 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \cdot \frac{x}{\ln(1+x)-\ln 1} \right]$
 $= e^{f'(0) \frac{1}{\ln(1+x)} \big|_{x=0}} = e.$

5. $3\sqrt{3}.$

【详解】 $g''(y) = (g'(y))' = \left(\frac{1}{f'(x)} \right)'_y = -\frac{f''(x)}{f'^2(x)} \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} \cdot \frac{1}{f'(x)}.$

当 $y = 2$ 时, $x = 1, f'(1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}, f''(1) = 1,$

故 $g''(2) = -\frac{1}{\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = 3\sqrt{3}.$

二、选择题

1. (A)

【详解】 函数可能的不可导点为 $x = \pm \pi.$

因为

$$y'_-(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{(\pi^2 - x^2) \sin^2 x}{x - \pi} = 0,$$

$$y'_+(\pi) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-(\pi^2 - x^2) \sin^2 x}{x - \pi} = 0,$$

所以 y 在 π 处可导.

又

$$y'_-(-\pi) = \lim_{x \rightarrow -\pi^-} \frac{-(\pi^2 - x^2) \sin^2 x}{x + \pi} = 0,$$

$$y'_+(-\pi) = \lim_{x \rightarrow -\pi^+} \frac{(\pi^2 - x^2) \sin^2 x}{x + \pi} = 0,$$

所以 y 在 $-\pi$ 处可导.

故 y 无不可导点.

【评注】 本题可利用如下结论: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \exists$, 则 $g(x) |x - x_0|$ 在 x_0 处可导的充分必要条件是 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

2. (C)

【详解】 由于 $-f(x) = f(-x)$, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上为奇函数, 故曲线 $y = f(x)$ 关于 $(0, 0)$ 中心对称. 又当 $x \in (0, +\infty)$ 时 $f'(x) > 0, f''(x) > 0$, 故当 $x \in (-\infty, 0)$ 时 $f'(x) > 0, f''(x) < 0$.

3. (C)

【详解】 由于 $f(x)$ 为奇函数, 故 $f(0) = 0$.

对 $f(x)$ 在以 $0, x$ 为端点的区间上用拉格朗日中值定理有

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| = |f'(\xi)| |x - 0| \leq M \cdot 1,$$

故对 $\forall x \in [-1, 1], |f(x)| \leq M$.

4. (C)

【详解】 根据泰勒公式有

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5), \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5),$$

$$\text{则} \quad \tan x - \sin x = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{8}x^5 + o(x^5),$$

$$\text{而} \quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots,$$

由题知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{f(x)} = 1$, 即当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 与 $\tan x - \sin x$ 为等价无穷小量, 所以

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0, \quad \frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{2},$$

故 $f'''(0) = 3$, 而 $f^{(4)}(0)$ 任意.

5. (D)

【详解】 由于

$$F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f'(t) dt = x^2 \int_0^x f'(t) dt - \int_0^x t^2 f'(t) dt,$$

所以

$$F'(x) = 2x \int_0^x f'(t) dt + x^2 f'(x) - x^2 f'(x) = 2x \int_0^x f'(t) dt,$$

由题意知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{x^2} = 1$, 即

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \int_0^x f'(t) dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x f'(t) dt}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2f'(0),$$

故 $f'(0) = \frac{1}{2}$.

三、解答题

1.【详解】(1) 当 $x \neq 0$ 时, $f(x)$ 显然连续.

当 $x = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a = f(0),$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x(1 + \sqrt{1+x})} = \frac{1}{2}.$$

故当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 处处连续.

(2) 当 $x \neq 0$ 时, $f(x)$ 显然可导. 当 $x = 0$ 时,

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = b,$$

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} - \frac{1}{2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{4x \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{2}x}{4x} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

所以当 $b = \frac{1}{8}$ 时, $f(x)$ 处处可导.

2.【详解】方程两边对自变量 x 求导, 得

$$2 - e^{-(x+y)^2} (1 + y') = xy' + y \quad ①$$

令 $x = 0$, 由原方程得

$$0 - \int_1^{y(0)} e^{-t^2} dt = 0.$$

又 $e^{-t^2} \neq 0$, 所以有 $y(0) = 1$, 代入 ① 式, 得

$$2 - e^{-[0+y(0)]^2} [1 + y'(0)] = 0 + y(0).$$

即 $2 - \frac{1 + y'(0)}{e} = 1$, 解得 $y'(0) = e - 1$.

3.【详解】当 $x \neq a$ 时, $g'(x) = \frac{f'(x)(x-a) - f(x)}{(x-a)^2}.$

$$\begin{aligned} \text{当 } x = a \text{ 时, } g'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)}{x-a} - f'(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f'(a)(x-a)}{(x-a)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{2(x-a)} = \frac{1}{2} f''(a). \end{aligned}$$

故

$$g'(x) = \begin{cases} \frac{f'(x)(x-a) - f(x)}{(x-a)^2}, & x \neq a, \\ \frac{1}{2} f''(a), & x = a. \end{cases}$$

又由于

$$\lim_{x \rightarrow a} g'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)(x-a) - f(x)}{(x-a)^2} = \frac{1}{2} f''(a) = g'(a).$$

所以, $g'(x)$ 在 $x=a$ 处连续.

4.【详解】 由于 $f(x+1) = 2f(x)$, 则

$$f(x+2) = 2f(x+1) = 2^2 f(x).$$

一般式为

$$f(x+n) = 2f(x+n-1) = \cdots = 2^n f(x),$$

则

$$f(n) = 2^n f(0) = 2^n,$$

所以

$$f'(n) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x+n) - f(n)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^n f(x) - 2^n f(0)}{x} = 2^n f'(0).$$

5.【证明】 当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, $|f(x)| \geq |g(x)|$.

又 $f(a) = g(a) = 0$, 则 $|f(x) - f(a)| \geq |g(x) - g(a)|$,

于是

$$\frac{|f(x) - f(a)|}{|x-a|} \geq \frac{|g(x) - g(a)|}{|x-a|}.$$

令 $x \rightarrow a$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a)|}{|x-a|} \geq \lim_{x \rightarrow a} \frac{|g(x) - g(a)|}{|x-a|},$$

即

$$|f'(a)| \geq |g'(a)|.$$

6.【详解】 由莱布尼茨公式有

$$f^{(n-1)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k [(x-a)^n]^{(n-1-k)} \varphi^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{n!}{(k+1)!} (x-a)^{k+1} \varphi^{(k)}(x),$$

显然

$$f^{(n-1)}(a) = 0.$$

所以

$$\begin{aligned} f^{(n)}(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} n! \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \frac{1}{(k+1)!} (x-a)^k \varphi^{(k)}(x) = n! \varphi(a). \end{aligned}$$

7.【详解】 由泰勒公式有

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(\xi(x))}{2} (x-0)^2 = \frac{f''(\xi(x))}{2} x^2,$$

其中 $\xi(x)$ 介于 $0, x$ 之间, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \xi(x) = 0$,

同时 $f(u) = \frac{1}{2} f''(\xi(u)) u^2$, 其中 $\xi(u)$ 介于 $0, u$ 之间, 而 $u = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} u = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - f(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-f'(x)}{f''(x)} = 0,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \xi(u) = 0,$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(u)}{u f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} x f''(\xi(u)) u^2}{\frac{1}{2} u f''(\xi(x)) x^2} = \frac{f''(0)}{f''(0)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u}{x}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{f(x)}{f'(x)}}{\frac{x}{f'(x)}} = 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x f'(x)} = 1 - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(\xi(x)) x}{f''(x)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} f''(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f''(x)} = 1 - \frac{1}{2} f''(0) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f''(x)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

8.【详解】 一般有如下结论: $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上一个连续的周期函数, 周期为 p , 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{p} \int_0^p f(t) dt.$$

事实上, 对 $\forall x > 0, \exists n$ 及 $x' \in [0, p)$, 使 $x = np + x'$, 由周期函数积分性质有

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt &= \frac{1}{np + x'} \int_0^{np+x'} f(t) dt \\ &= \frac{1}{np + x'} \left[\int_0^{np} f(t) dt + \int_{np}^{np+x'} f(t) dt \right] \\ &= \frac{n}{np + x'} \int_0^p f(t) dt + \frac{1}{np + x'} \int_0^{x'} f(t) dt. \end{aligned}$$

因

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{np + x'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{p + \frac{x'}{n}} = \frac{1}{p},$$

$$\left| \frac{\int_0^{x'} f(t) dt}{np + x'} \right| \leq \frac{\int_0^{x'} |f(t)| dt}{np + x'} \leq \frac{\int_0^p |f(t)| dt}{np + x'} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{np + x'} \int_0^p f(t) dt + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{np + x'} \int_0^{x'} f(t) dt. \\ &= \frac{1}{p} \int_0^p f(t) dt + 0 = \frac{1}{p} \int_0^p f(t) dt. \end{aligned}$$

由于 $|\sin t|$ 的周期为 π 且连续, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x |\sin t| dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\sin t| dt = \frac{2}{\pi}.$$

9.【证明】 因为 $f(x)g(x) = 1$, 则

$$f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 0, \quad (1)$$

即

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{g'(x)}{g(x)}. \quad (2)$$

式①两边求导得

$$f''(x)g(x) + 2f'(x)g'(x) + f(x)g''(x) = 0,$$

$$f''(x) + 2 \frac{f'(x)g'(x)}{g(x)} + \frac{f(x)g''(x)}{g(x)} = 0,$$

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} + \frac{2f'(x)g'(x)}{f'(x)g(x)} + \frac{f(x)g''(x)}{f'(x)g(x)} = 0,$$

由①得

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} + \frac{2g'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g''(x)}{g'(x)f(x)} = 0,$$

则

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} + \frac{2g'(x)}{g(x)} = \frac{g''(x)}{g'(x)},$$

又由②得

$$\frac{f''(x)}{f'(x)} - \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g''(x)}{g'(x)} - \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

10.【证明】 由于

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

两边对 x 求导有

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2 x}{dy^2} \cdot \frac{dy}{dx}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = -\frac{\frac{d^2 x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3},$$

故

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = -\left(\frac{dx}{dy}\right)^3 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)^3 \frac{d^2 y}{dx^2},$$

又

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\left(\frac{dy}{dx}\right)^3,$$

所以

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3} \left[-\left(\frac{dy}{dx}\right)^3\right] = 1.$$

第三章 微分中值定理与导数的应用

习题精选三

一、填空题

1. $(-\infty, -1), (0, 1)$.

【详解】 由已知得 $y' = 2x - \frac{2}{x} < 0$.

当 $x < 0$ 时, 解得上述不等式的解集为 $(-\infty, -1)$;

当 $x > 0$ 时, 解得上述不等式的解集为 $(0, 1)$.

所以函数 $y = x^2 - \ln x^2$ 的单调减区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(0, 1)$.

2. $a = 4, b = 5$.

【详解】 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$,

由题设知

$$f'(-1) = 3 - 2a + b = 0, \quad \textcircled{1}$$

$$f(-1) = -1 + a - b = -2, \quad \textcircled{2}$$

联立 ①, ② 解得 $a = 4, b = 5$.

3. $-\frac{1}{\ln 2}$.

【详解】 由 $f'(x) = 2^x(1 + x\ln 2) = 0$, 得驻点为 $x = -\frac{1}{\ln 2}$, 而

$$f''(x) = 2^x[2\ln 2 + x(\ln 2)^2], \quad f''\left(-\frac{1}{\ln 2}\right) > 0.$$

所以函数 $y = x \cdot 2^x$ 在 $x = -\frac{1}{\ln 2}$ 时取得极小值.

4. $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$

【详解】 $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2x+1} = \frac{1}{2}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = -\frac{1}{4},$

所以斜渐近线方程为 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$

5. $y = \frac{x}{e}.$

【解析】 设过原点与曲线 $y = \ln x$ 相切的切线的切点为 (x_0, y_0) , 则切线的斜率为 $k = \frac{1}{x_0}$, 故切线方程为

$$y - y_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0),$$

因为切线过原点, 则

$$-y_0 = \frac{1}{x_0}(-x_0),$$

解得 $y_0 = 1$, 从而切点为 $(e, 1)$, 而切线的斜率为 $k = \frac{1}{e}.$

所以该切线方程为 $y = \frac{x}{e}.$

二、选择题

1. (D)

【详解】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = \infty$, 所以 $x = 0$ 为垂直渐近线;

又 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = 1$, 所以 $y = 1$ 为水平渐近线.

2. (A)

【详解】 由于 $f(x_0) > 0, f'(x_0) = 0$, 故有

$$f''(x_0) - 2f'(x_0) + 4f(x_0) = f''(x_0) + 4f(x_0) = 0,$$

所以有 $f''(x_0) < 0$, 即 $f(x)$ 在 x_0 点处取得极大值.

3. (A)

【详解】 由 $f''(x) + f'(x)g(x) + f(x)x = e^x - 1, f(0) = 1, f'(0) = 0$, 解得 $f''(0) = 0.$

$f''(x) + f'(x)g(x) + f(x)x = e^x - 1$ 两边对 x 求导有

$$f'''(x) + f''(x)g(x) + f'(x)g'(x) + f'(x)x + f(x) = e^x, \quad \text{①}$$

从而有 $f'''(0) = 0$, ① 两边对 x 求得

$f^{(4)}(x) + f'''(x)g(x) + f''(x)g'(x) + f'(x)g''(x) + f(x)g'''(x) + f''(x)x + 2f'(x) = e^x$,
 可得 $f^{(4)}(0) = 1 > 0, f(0) = 1$ 为 $f(x)$ 的极小值.

4. (A)

【详解】 令 $x-t=u$, 则 $t=x-u$, 故

$$F(x) = \int_0^x (x-u)f(u)du = x \int_0^x f(u)du - \int_0^x uf(u)du.$$

由于 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 单调递增, 即对任意的 $x \in (0, +\infty)$, $f(x) > f(0) = 0$.

从而有 $F'(x) = \int_0^x f(u)du > 0$, 所以 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增;

$F''(x) = f(x) > 0$, $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内是凹弧.

5. (D)

【详解】 对 $f'^2(x)$ 与 $f^2(x)$ 运用柯西中值定理可知, 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f'^2(b) - f'^2(a)}{f^2(b) - f^2(a)} = \frac{2f'(\xi)f''(\xi)}{2f(\xi)f'(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{f(\xi)},$$

要使 $f''(\xi) + f(\xi) = 0$, 即 $\frac{f''(\xi)}{f(\xi)} = -1$, 从而有

$$\frac{f'^2(b) - f'^2(a)}{f^2(b) - f^2(a)} = -1,$$

整理得到

$$f'^2(a) - f'^2(b) = f^2(b) - f^2(a).$$

三、解答题

1. 【证明】 因为 $f(x)$ 不恒为常数且 $f(a) = f(b)$, 故至少存在一点 $c \in (a, b)$, 使得 $f(c) \neq f(a) = f(b)$.

若 $f(c) > f(a)$, 则在 $[a, c]$ 上 $f(x)$ 满足拉格朗日中值定理条件, 因此至少存在一点 $\xi \in (a, c) \subset (a, b)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} > 0.$$

若 $f(c) < f(a) = f(b)$, 则在 $[c, b]$ 上应用拉格朗日中值定理可知, 至少存在一点 $\xi \in (c, b) \subset (a, b)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} > 0.$$

综上所述命题得证.

【评注】 本题也可用反证法进行证明, 即假设对 $\forall x \in (a, b)$, 有 $f'(x) \leq 0$, 于是 $f(x)$ 单调不增, 因此有 $f(a) \geq f(x) \geq f(b)$, 而 $f(a) = f(b)$, 故有 $f(a) = f(x) = f(b)$, 即 $f(x)$ 为常数. 这与题设矛盾.

2. 【证明】 作辅助函数 $F(x) = f(x) - x$.

由题设 $0 < f(x) < 1$, 得 $F(0) = f(0) > 0$, 而 $F(1) = f(1) - 1 < 0$, 根据连续函数介值定理知在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $F(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) - \xi = 0$.

下面用反证法证唯一性.