“十三五”国家重点出版物出版规划项目

世界名校名家基础教育系列
Textbooks of Base Disciplines from World's Top Universities and Experts

高等数学教程 第3版

上册

范周田 张汉林 编著

“十三五”国家重点出版物出版规划项目
世界名校名家基础教育系列

高等数学教程

上 册

第3版

范周田　张汉林　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书的编写汲取了国内外众多优秀教材之长，在透彻研究的基础上，以尽可能简单的方式来呈现微积分知识.

本书是课本与网络（手机）相结合的立体教材. 网络（手机）支持重点知识讲解、图形演示、习题答案或提示、扩展阅读、讨论等移动学习功能.

本套教材分为上、下册，并配有《高等数学教程例题与习题集》. 本书是上册，内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及其应用、不定积分、定积分及其应用.

本书各节末均配有分层习题，各章末还配有综合习题. 书后附录的“研究与参考”，对若干重点问题进行了细致的分析.

本书为高等院校理工科类各专业学生的教材，也可作为自学或考研的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学教程. 上册/范周田，张汉林编著. —3 版. —北京：机械工业出版社，2017.12
ISBN 978-7-111-58209-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①范… ②张… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 253892 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：李永联 责任编辑：李永联 郑 玫
责任校对：张晓蓉 封面设计：陈 沛
责任印制：常天培
北京联兴盛业印刷股份有限公司印刷
2018 年 1 月第 3 版第 1 次印刷
184mm×260mm · 15.75 印张 · 294 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-58209-0
定价：45.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
服务咨询热线：010-88379833
读者购书热线：010-88379649

网络服务
机 工 官 网：www.cmpbook.com
机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
教育服务网：www.cmpedu.com
金 书 网：www.golden-book.com

序

本书是北京工业大学数理学院的范周田、张汉林等教师经过数年探索和总结，结合自身教学实践而编写出来的公共数学教材，在概念和方法上都很有创新.

高等数学几乎是所有大学生的必上之课，恐怕也是最重要的一门基础课了. 现在的高等数学教材种类繁多，内容大同小异，那么选什么教材就变得尤为关键，而本书确实是一本内容翔实，易教易学的高等数学教材.

本书从无到有，由浅入深，抓住了微积分的牛鼻子，从无穷小入手，进而引入极限的一般概念，循序渐进地将学生引入微积分的殿堂. 书中有很多评注和要点总结，这是学生最希望看到的.

值得一提的是，在第 2 章中引入无穷小时，书中话语通俗易懂、平易直观，摆脱了以往教材生硬、古板、上来就是 ε-δ 语言的讲法，而是一语中的，抓住了“无穷小”的本质. 生动之后又将其数学化，老师易教，学生也易学. 将复杂的内容，抓住实质讲得明白，使学生觉得自然亲切，真正是以一个例子说清楚了最不易说清楚而又不得不说的无穷小问题.

微积分的教学改革既举足轻重，又颇具难度. 本书对微积分的教学改革是一个很大的推动. 应该说，微积分的教学改革是一场攻坚战，我们仍需努力，将它进行到底!

中国科学院　院士

林　群

第 3 版前言

除了本身的知识外，高等数学（微积分）还是学习解决问题的思想方法的一门课程．尽管有些人可能在毕业之后不再直接用到微积分，但是他们仍然可以从微积分的学习中受益，因为他们在此过程中所获得的能力，包括严密的逻辑思维能力，对问题的分析和判断能力，不仅可以用于专业，而且可以用于生活的方方面面．编辑本书是期望读者能够更顺利地完成微积分的学习.

在内容方面，本书延续了第 1、2 版逻辑简约，语言科学、平易的优点，汲取了国内外优秀教材的众家之长，秉承透彻研究、简单呈现的原则，对微积分内容及叙述方式做了进一步的梳理；以微积分中的数学思想为主线，对一些重点或难点知识进行了优化，降低了教与学的难度，有利于学习者理解、掌握数学的思维方式，并将之应用于解决实际问题.

在形式方面，本书是融合式教学的一种载体，是传统微积分教材与现代网络教育技术结合的有机体．教材中的二维码精确关联与之对应的网络教学资源，包括视频、音频或文本等，支持重点知识解析、图形演示、精选例题讲解、习题答案或提示、扩展阅读、讨论和节点检测等．共享的网络资源定位准确，并不断更新和丰富.

本书的编写得到了众多的帮助与支持，特别在此表示感谢！

感谢北京工业大学副校长吴斌教授、教务处长郭福教授.

感谢北京工业大学高等数学课程组全体同事及北京服装学院的同仁们.

对关心并支持我们的朋友和出版社的朋友们一并表示感谢！

由于编者水平和时间有限，书中难免有不妥之处，敬请广大读者批评指正.

编　者

2017 秋于北京工业大学

第 1 版前言

高等数学（微积分）是大学各工科专业最重要的公共基础课程，具有周期长、课时多、内容多、难点多等特点．一套好的高等数学（微积分）教材应该用科学、平易的语言阐明它的主要内容，并且应该易教易学.

为了实现这一目标，我们长期致力于高等数学教材的建设工作，先后有范周田、张汉林、平艳茹、杨晓华、丁津、唐兢、王术、田鑫、张方、李贵斌、胡京兴、徐大川等十余位教师参与其中.

在教材的写作过程中，我们有幸得到了林群院士的指导. 林群院士指出："擒贼先擒王，无穷小就是微积分的王. 抓住了无穷小就可以学会微积分."同时，我们学习了张景中院士的教育数学理论，即要"通过对数学本身的研究来化解数学的难点"，知识的结构与表达要做到"逻辑结构尽可能简单，概念引入要平易直观，要建立有力而通用的解题工具".《高等数学教程》的写作充分借鉴了这些思想和理论.

《高等数学教程》具有以下特点：

1. 化解障碍，平易衔接. 极限理论是微积分理论的重要基础，也是微积分入门的主要障碍. 我们首先从自变量的变化趋势出发，直观地介绍了三个基本的无穷小，然后用极限的 ε-δ 定义证明了无穷小的比较定理. 以此为基础，我们从正面诠释极限理论，避开了极限定义中"颠倒因果关系"造成的学习困难. 这样既能表达极限 ε-δ 语言的意境和作用，又和初学者已有的知识水平和思维习惯相适应，在一定程度上降低了极限理论的学习难度.

2. 重点突出，难点分散. 例如，中值定理是导数应用的理论基础，也是一元微积分教学的重点和难点，我们从便于学习者加深理解并掌握的角度对其进行了重新设计. 每一节都只有一个重点或难点，从定理证明、思想方法、应用等多侧面由易到难进行介绍.

3. 对重点概念或定理的表述更加科学，更加平易直观. 例如，函数、不定积分和曲率等概念的表述，以及复合函数的导数公式、积分换元法、牛顿-莱布尼兹公式的证明等.

4. 突出数学的思想方法，用数学思想解决实际问题. 例如，教材中借助求解常微分方程过程中经常使用的变量替换的思想，简化了二阶常系数线性微分方程的求解过程. 又如，对坐标的曲面积分是为解决物理中的场论问题产生的，我们从物理问题出发建立对坐标的曲面积分的概念，并从概念中产生了计算

方法.

《高等数学教程》整套教材的写作得到了韩云瑞教授、李心灿教授、郭镜明教授等多位专家的热心支持与无私帮助，其中韩云瑞教授认真审阅了本书的全部书稿，李心灿教授审阅了部分书稿，并提出了许多宝贵意见. 专家们广博深厚的知识、严谨治学的风范以及乐于助人的美德深刻地影响了我们. 正是在他们的帮助和鼓励下本书才得以顺利完成，在此向他们表示崇高的敬意！

在《高等数学教程》成书之际，诚挚感谢林群院士和张景中院士！

感谢我校蒋毅坚副校长、教务处及数理学院的相关领导们长期以来对我们的关心和支持！

对我们的同事，关心并支持我们的朋友和出版社的朋友们一并表示感谢！

由于编者水平和时间有限，书中难免有不妥之处，敬请广大读者批评指正.

编　者

2011 年春于北京工业大学

目　　录

第 1 章

函　数

为了方便阅读本书，我们把初等数学已经涉及但又和微积分密切相关的一些知识进行了罗列或重新叙述，如函数的概念、某些特殊形式的函数，以及基本初等函数的图像与性质等，以备读者参考、查阅.

1.1　函数的概念

在微积分中，我们主要研究数值之间的对应关系，即函数.

设 D 为实数集 $\mathbf{R}$ 的一个非空子集. 如果对 D 中的任意**一个**数值 x，都存在 $\mathbf{R}$ 中**唯一的一个**数值 y 与之对应，那么我们称这两个数值之间的对应关系为函数，记为 f，并记 $y=f(x)$，把 x 称为**自变量**，把 y 称为**因变量**，自变量的取值范围称为函数的**定义域**，因变量的取值范围称为函数的**值域**，分别记为 D_f 和 R_f.

我们通过一个简单的例子来进行说明.

令 $D=\{1,2,3\}$，D 到 $\mathbf{R}$ 的对应关系是：1 对应 5，2 对应 10，3 对应 15.

这个对应方式满足唯一性的要求，因此是一个函数，记之为 f. 函数 f 可以描述为：D 中的每个数值都对应其自身的 5 倍.

把集合 D 内的数值用 x 表示，即 x 取值可以是 1，2，3 这三个数值中的任意一个，则函数 f 可以描述为：x 对应 $5x$，记为 $y=f(x)=5x$. 定义域

$D_f=\{1,2,3\}$，值域 $R_f=\{5,10,15\}$.

需要注意的是，f 与 $f(x)$ 是有所不同的：f 是对应关系，即函数，而 $f(x)$ 则表示函数 f 在 x 处的值．一般情况下不做严格区分，我们说函数 f，也说函数 $f(x)$ 或者说函数 $y=f(x)$．另外，函数的表示与自变量和因变量所使用的字母是无关的，也**不一定有表达式**.

如果函数用于表达实际问题，那么它的定义域也由实际问题确定．例如，设半径为 r 的圆的面积为 S，则有函数关系

$$S=\pi r^2$$

由于 r 表示半径，因此有 $r>0$.

微积分中许多时候不涉及函数的实际意义，只讨论函数的表达式．在这种情况下，函数的定义域是使表达式有意义的所有值构成的集合．例如，函数 $y=\pi x^2$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

函数 $y=f(x)$ 是一元函数．一般来说，一个函数可以用来表示一个变量与另外一组变量之间的确定关系，即当这一组变量的取值都确定后，这个变量的取值也随之唯一确定，这一组中有几个变量就称这个函数是几元函数.

1.2 几种具有特殊性质的函数

1. 单调函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D. 如果对任意的 $x_1>x_2\in D$，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，就称 $f(x)$ 是单调递增函数，简称单增. 如果对任意的 $x_1>x_2\in D$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，就称 $f(x)$ 是单调递减函数，简称单减. 单调递增函数和单调递减函数统一称为单调函数.

一般而言，一个函数往往在其定义域内的某些区间上是递增的，而在另外的区间上是递减的，这样的区间称为函数的单调区间. 例如，函数 $y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调递增，在 $(-\infty,0]$ 内单调递减，$[0,+\infty)$ 和 $(-\infty,0]$ 就是函数 $y=x^2$ 的单调区间.

2. 奇函数与偶函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D. 如果对任意 $x\in D$，都有 $-x\in D$，我们就说 D 关于原点对称.

如果函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于坐标原点对称，且对任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数. 奇函数的图形关于原点对称.

如果函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，而且对任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数. 偶函数的图形关于 y 轴对称.

例如，$y=x^2$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 是偶函数，而 $y=x^3$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 是奇函数.

3. 周期函数

设 $y=f(x)$ 为函数，如果存在正数 T，使得 $f(x)=f(x+T)$ 对任意实数 x 都成立，则称 $y=f(x)$ 为周期函数，T 是一个周期.

在通常情况下，我们关心周期函数的最小正周期，简称周期. 例如，正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 的周期都是 2π，而正切函数 $y=\tan x$ 和余切函数 $y=\cot x$ 的周期都是 π.

也有例外的情况，例如常数函数 $y=C$ 是周期函数，任意正数都是它的周期，因此它没有最小正周期.

4. 有界函数

设 $f(x)$ 在 D 上有定义. 若存在常数 $M>0$ 使得一切 $x\in D$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有界，也称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数.

例如，因 $|\sin x|\leqslant 1$，故 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界. 有界函数也可以做如下定义：若存在常数 m 和 M 使得一切 $x\in D$，有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$，则

称$f(x)$在 D 上有界，其中 m 称为函数 $f(x)$的一个下界，M 称为函数 $f(x)$的一个上界.

例如，函数 $y=\frac{1}{x}$在（1，+∞）上有界，因为$0<\frac{1}{x}<1, x\in(1,+\infty)$.

1.3 反 函 数

设f为一元函数，如果对任意的$y\in R_f$，都存在唯一的$x\in D_f$，使得$y=f(x)$，则称函数f有**反函数**，f的反函数记为f^{-1}.

函数$y=f(x)$的反函数可以记为$x=f^{-1}(y)$，也可以记为$y=f^{-1}(x)$. 函数$y=f(x)$与$x=f^{-1}(y)$的图像是相同的，与$y=f^{-1}(x)$的图像关于直线$y=x$对称.

例如，$y=\sqrt{x}$有反函数$x=y^2$，也可以说$y=\sqrt{x}$的反函数是$y=x^2$.

一般地，并不是任意的函数都有反函数. 例如，$y=x^2$，$-\infty<x<+\infty$就没有反函数.

函数$y=f(x)$存在反函数的充分必要条件是：对任意的x_1，$x_2\in D_f$，如果$x_1\neq x_2$，则$f(x_1)\neq f(x_2)$. 特别地，**单调函数有反函数**.

例如，正弦函数$y=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内有定义但却没有反函数. 对任意给定的整数k，函数$y=\sin x$在区间$\left[k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$上单调，因此有反函数. 特别地，我们把正弦函数$y=\sin x$在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数记为$y=\arcsin x$，$x\in[-1,1]$，$y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

类似地，反余弦函数、反正切函数和反余切函数见表1-4～表1-6.

1.4　函数的表示

通常可以用集合、图表、数据对应、图形和解析表达式等表示函数.

1. 解析表达式（显函数）

我们在初等数学中所熟知的函数，如多项式函数 $y=x^2+5x+3$、正弦函数 $y=\sin x$、指数函数 $y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$）、对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$）等都是用解析表达式表示的.

2. 分段函数

一个函数在其定义域的不同部分可以有不同的表达式，即所谓的分段函数.

例 1.1　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

如图 1-1 所示，该分段函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\{-1,0,1\}$. 由符号函数的定义，对任意实数 x，都有 $x=|x|\operatorname{sgn}x$.

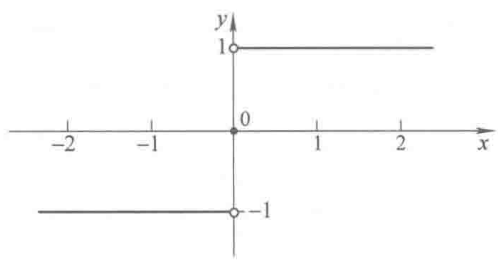

图　1-1

例 1.2　设分段函数

$$y=\begin{cases}x^2-1, & x\in[-1,0)\\ 2x, & x\in[0,1)\\ -2x+4, & x\in[1,2)\\ 0, & x\in[2,3]\end{cases}$$

函数的定义域为$[-1,3]$，如图 1-2 所示.

例 1.3　取整函数

对任意实数 x，用 $y=f(x)=[x]$，表示不超过 x 的最大整数，称为取整函数，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为整数集 $\mathbf{Z}$. 函数的图像呈阶梯状，如