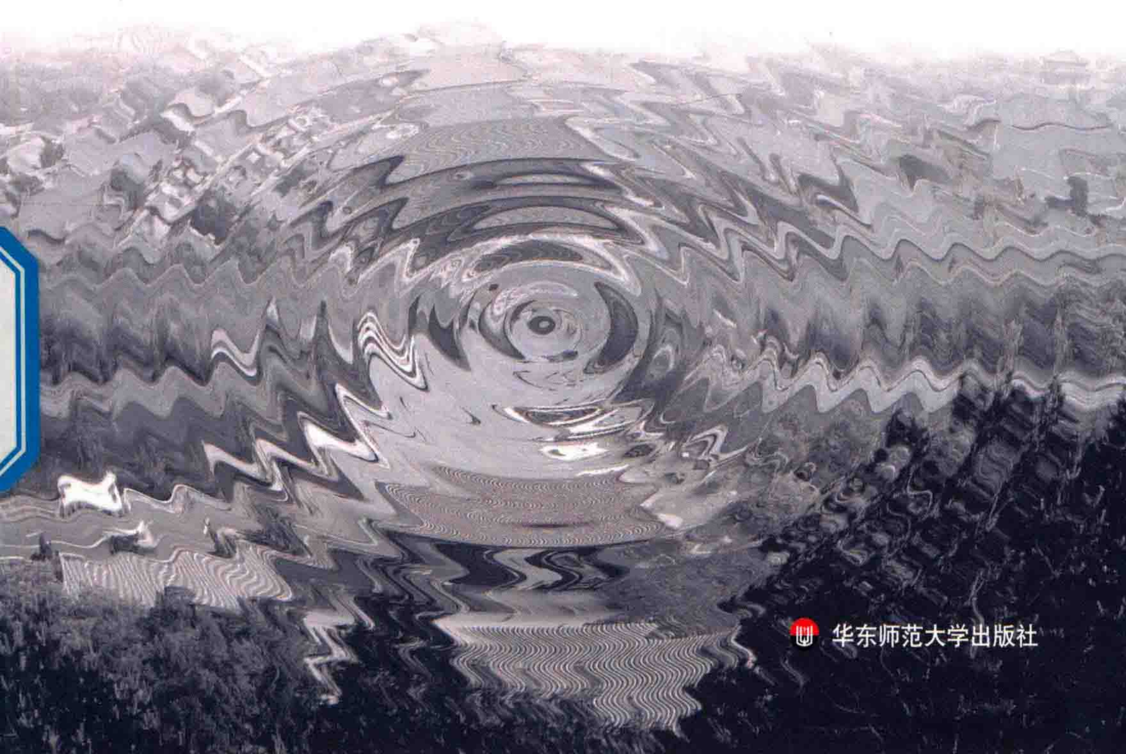
相干与衍推谓词逻辑

冯 棉 著

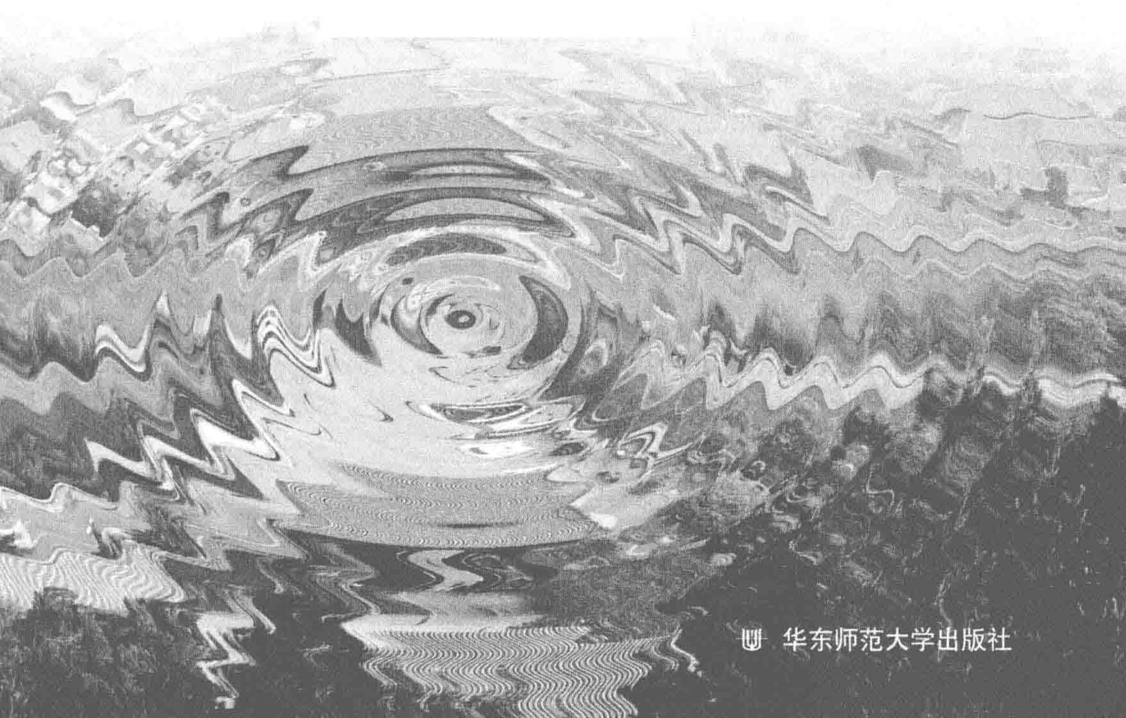


华东师范大学出版社

国家社会科学基金项目：11BZX063

相干与衍推谓词逻辑

冯 棉 著



华东师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

相干与衍推谓词逻辑/冯棉著. —上海：华东师范大学出版社，2018
（华东师大新世纪学术基金）
ISBN 978-7-5675-7776-3

Ⅰ. ①相… Ⅱ. ①冯… Ⅲ. ①相干逻辑②衍推-谓词逻辑 Ⅳ. ①B815. 7

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 108136 号

华东师范大学新世纪学术著作出版基金资助出版
相干与衍推谓词逻辑

著　　者　冯　棉
组稿编辑　孔繁荣
项目编辑　夏　玮
审读编辑　陈　震
特约审读　郝旭东
装帧设计　高　山

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www. ecnupress. com. cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市（邮购）电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http：//hdsdcbs. tmall. com

印 刷 者　当纳利（上海）信息技术有限公司
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　14. 5
字　　数　249 千字
版　　次　2018 年 7 月第一版
印　　次　2018 年 7 月第一次
书　　号　ISBN 978-7-5675-7776-3/B · 1132
定　　价　59. 00 元

出 版 人　王　焰

前　言

相干逻辑（relevance logic 或 relevant logics）是重要的现代逻辑分支，其基本出发点是：坚持演绎推理的相干性，采用“结论的推导必须实际使用前提”的推理方式，进而避免形形色色的“蕴涵怪论”（paradoxes of implication）。衍推逻辑（entailment logic）是相干的模态逻辑，它采用的蕴涵称为“衍推”，兼具相干性和必然性。与经典逻辑（classical logic）相比，相干与衍推逻辑更接近人们的日常推理方式，因而对日常思维、科学研究和人工智能的开发具有重要的理论意义和实际价值。

相干与衍推逻辑包括命题逻辑和谓词逻辑，前者是后者的基础。2010 年，笔者出版了著作《相干逻辑研究》，主要内容是相干命题逻辑（包括衍推命题逻辑）。

本书是前述工作的继续，内容是研究相干与衍推谓词逻辑，涉及多种相干与衍推谓词逻辑弱系统和强系统的建构，包括公理系统、自然推理系统和结构推理系统，在此基础上，建构了相干与衍推谓词逻辑弱系统的三元关系变域语义，并证明了各种相干与衍推谓词逻辑弱系统的可靠性与完全性。全书共分三章十节，书后列出了参考文献。

以下对本书各个章节作简要的导引和说明。

第一章　预备知识

研究相干与衍推谓词逻辑，必须先了解经典逻辑、相干命题逻辑和衍推命题逻辑，本章对此作了概述，也保证了本书的内容是自足的。

§1.1　从经典逻辑谈起

经典逻辑是现代逻辑的基础。本节从经典逻辑的真值语义出发，说明了“真值联结词”与日常联结词的联系与区别；介绍了经典命题逻辑公理系统 **P** 及其可靠

性、完全性和一致性。还从不同的角度对经典命题逻辑作了解读：首先，它可以看成“排中律”$A\vee\neg A$、“广义排中律”$A\vee\neg A\vee B$或“矛盾律”$\neg(A\wedge\neg A)$、“广义矛盾律”$\neg(A\wedge\neg A\wedge B)$的显现；其次，也可以这样理解：当内定理是形式为$A\rightarrow B$的蕴涵式时，其主算子$\rightarrow$表示推理，而当内定理中的$\rightarrow$不是主算子时，它并不表示推理，需转换为$\neg$、$\vee$（或$\neg$、$\wedge$）；此外，还可以从结构推理的视角，看作容纳“结合”、“交换”、“收缩”和“弱化”四种结构规则的一种单调推理。通过这些解读，有助于全面而准确地理解经典逻辑。

§1.2　相干逻辑的发展动因

“相干性”即日常推理中前提与结论之间意义、内容方面的联系。在我们的日常生活中，缺乏相干性的推理不是正确的推理。从逻辑的角度来看，相干性缺失的后果之一是导致某些“蕴涵怪论”的产生。之所以称为“怪论”，是因为当我们把这些公式中出现的蕴涵符号$\rightarrow$都解读为推理关系时，所陈述的意思不符合人们的日常思维方式。产生在经典命题逻辑层面上的“蕴涵怪论”会直接影响到经典谓词逻辑，因为“蕴涵怪论”的实例都能在经典谓词逻辑中获得表达。“蕴涵怪论”的产生和演绎推理的方式有密切的关系。经典逻辑和模态逻辑会导致“蕴涵怪论”，因为它们容纳了“结论的推导未实际使用前提”的推理方式。坚持演绎推理的相干性，拒斥“结论的推导未实际使用前提”的推理方式，避免形形色色的“蕴涵怪论”，成为相干逻辑的发展动因。

§1.3　相干与衍推命题逻辑概述

构建了一系列相干与衍推命题逻辑公理系统（包括弱系统和强系统），陈述了这些系统的重要内定理、导出规则和元逻辑特性，说明了这些系统可以排除各种“蕴涵怪论”。还从不同的角度对相干与衍推命题逻辑作了解读：首先，可以将相干逻辑系统中的$\rightarrow$解释为非真值联结词“相干蕴涵”，表示推理关系，将衍推逻辑系统中的$\rightarrow$解释为非真值联结词“衍推”，表示必然的推理关系；其次，通过三元关系语义，可以做信息论（或情景论）的解释：$\neg$是非真值联结词“德摩根否定”(de Morgan negation)，而$\rightarrow$则刻画了三个信息库之间的信息传递方式；此外，还可以将相干逻辑系统 **R** 解读为容纳“结合”、“交换”和“收缩”三种结构规则的一种非单调推理，将系统 **RW** 解读为容纳“结合”和“交换”两种结构规则的一种非单调推理。通过这些解读，有助于全面而深入地理解相干与衍推命题逻辑，并理清经典逻辑和相干逻辑之间的相互关系。

第二章　相干与衍推谓词逻辑系统

本章研究相干与衍推谓词逻辑系统，包括公理系统、自然推理系统和结构推理系统的建构，重要内定理和导出规则的证明，并证明了公理系统与对应的自然推理系统、对应的结构推理系统的等价性。

§2.1　相干与衍推谓词逻辑公理系统

在形式语言 $\mathcal{L}_{RQ}$的基础之上，构建了一系列相干与衍推谓词逻辑公理系统（包括弱系统和强系统），它们分别是对应的相干与衍推命题逻辑公理系统的扩充（非量化公理和非量化规则的表述方式相同），谓词逻辑弱系统添加了 4 条量化公理（Q1—Q4）和 2 条量化规则（即“概括规则”UG 和“全称分配规则”UD），而谓词逻辑强系统不同于弱系统之处是：用“换质位公理”和“全称分配公理”分别取代了“换质位规则”和“全称分配规则”。考察了这些谓词逻辑公理系统的相互关系，并通过“命题变换式”证明了这些系统的一致性。

§2.2　量化内定理与导出规则

证明了相干与衍推谓词逻辑公理系统中的一系列量化内定理、导出规则以及重要的元定理“置换定理”，阐释了某些重要的内定理的直观涵义，揭示了这些相干与衍推谓词逻辑系统的推理特性。定义并通过实例来说明“约束变形”和“约束变形代入”的概念，证明了与这些概念有关的内定理和导出规则，为进一步的研究作理论准备。

§2.3　相干与衍推谓词逻辑自然推理系统

构建了相干与衍推谓词逻辑自然推理系统 **NRQ***、**NTQ***、**NEQ***、**NRQ**、**NTQ**、**NEQ**，通过对推理规则的细致的陈述、图示和分析，以及内定理证明的示范，揭示了相干自然推理的基本特性：每一个假设前提都带有相干标记（relevance index）集，每一步推理都借助于相干标记集显示出前提与结论之间的相干性。考察了这些自然推理系统的相互关系，并借助“拟证明”和“拟定理”的概念，证明了这些自然推理系统与对应的公理系统的等价性。

§2.4　相干谓词逻辑结构推理系统及其线性片断

构建了相干谓词逻辑结构推理系统 **JRQ** 及其线性片断 **JRWQ**，它们都拒斥“弱化规则”，以保证前提与结论之间的相干性；系统 **JRWQ** 还拒斥“收缩规则”，这意味着：贯列（sequent，亦称“矢列”）中的每一前提公式都仅使用一次，不可重复使用。证明了结构推理系统中的某些内定理，并借助“内涵合取变换式”的概

念，证明了这些结构推理系统和对应的公理系统的等价性。

第三章　三元关系变域语义与完全性

本章研究相干与衍推谓词逻辑弱系统的三元关系变域语义，在三元关系变域语义的基础上证明了各个相干与衍推谓词逻辑弱系统的可靠性和完全性。

§3.1　系统 **LRQ*** 的三元关系变域语义

对于容纳传递公理的相干与衍推谓词逻辑的强系统 **TWQ**、**RWQ**、**TQ**、**RQ**、**EQ'** 和 **EQ**，[Fine，1989] 证明了这些系统对于常域（constant domain）语义的不完全性；[Fine，1988] 则构建了带有变域（variable domains）的语义模型，证明了这些强系统对于变域语义的完全性，但这种语义过于艰涩复杂，影响了它的实用性。

本书转而构建相干与衍推谓词逻辑弱系统的三元关系变域语义，它不仅是相干与衍推命题逻辑三元关系语义的扩展与变形，而且简明清晰。在此基础上，再添加各种特性（许多特性来自对应的相干与衍推命题逻辑系统的"框架"），进一步建构各个相干与衍推谓词逻辑弱系统的"框架"，并定义"赋值"、"赋值 V 在结点 a 处满足公式 A"、"有效公式"等语义概念。证明了各个"框架"的"赋值"都满足某种单调性的要求，并通过一系列元定理，证明了各个相干与衍推谓词逻辑弱系统的可靠性。还对谓词逻辑三元关系变域语义的直观背景作了细致的分析，提供了"信息论"解释，这一直观解释为相干与衍推逻辑在信息论和人工智能领域的应用展示了广阔的前景。

§3.2　理论与"不可推演对"

用 **LRQ*** 表示 **DWQ***、**TWQ***、**RWQ***、**TQ***、**RQ***、**EQ*** 和 **EQ'*** 中的任意一个相干与衍推谓词逻辑弱公理系统，通过添加可数个新的个体常项的方式，不断地扩充形式语言 L_{RQ}，进而构建 **LRQ*** 的一系列扩充系统 $\mathbf{LRQ}_n$*（$n=1, 2, 3, \cdots$）和 $\mathbf{LRQ}_\omega$*。给出了"理论"、"∨素的"公式集、"∀素的"公式集、"∃素的"公式集、"完备的"公式集、"正规的"公式集、"不可推演对"、"极大的不可推演对"等现代逻辑基本概念，证明了"扩充定理"等一系列元定理，为下一节的完全性证明做理论准备。

§3.3　典范框架与完全性

本节证明各个相干与衍推谓词逻辑弱公理系统的完全性，方法和路径是：参照相干命题逻辑三元关系语义的完全性证明的基本思路，同时借鉴直觉主义谓词逻辑

的完全性证明的某些方法，进行适当的调整和修改。关键的步骤是：

① 对于系统 $\mathbf{LRQ}_n{}^*$（n 是自然数），定义集合 $O_{\mathrm{LRQ}n^*}=\{\Gamma\cup\{n\}:\Gamma$ 是“正规的 $\mathbf{LRQ}_n{}^*$理论”$\}$、$K_{\mathrm{LRQ}n^*}=\{\Gamma\cup\{n\}:\Gamma$ 是“$\mathbf{LRQ}_n{}^*$理论”$\}$、$O'_{\mathrm{LRQ}n^*}=\{\Gamma\cup\{n\}:\Gamma$ 是“$\vee$ 素的、正规的 $\mathbf{LRQ}_n{}^*$ 理论”$\}$ 和 $K'_{\mathrm{LRQ}n^*}=\{\Gamma\cup\{n\}:\Gamma$ 是“$\vee$ 素的 $\mathbf{LRQ}_n{}^*$理论”$\}$，再定义 $K_{\mathrm{LRQ}n^*}$、$K'_{\mathrm{LRQ}n^*}$ 上的三元关系 $R_{\mathrm{LRQ}n^*}$ 和 $R'_{\mathrm{LRQ}n^*}$，并通过一系列元定理来揭示这些三元关系的有关属性。

② 在上述工作的基础上，构建新型的“典范框架”和“典范赋值”，用一系列元定理揭示其基本特性，最终完成各个相干与衍推谓词逻辑弱系统的完全性证明。

这是相干与衍推逻辑研究中的理论进展。在研究方法上，也为谓词逻辑的完全性证明做了示范，具有规范性与普适性。

本书是国家社会科学基金项目“谓词逻辑与元逻辑研究”(项目批准号11BZX063) 的最终成果。

目 录

第一章　预备知识

§1.1　从经典逻辑谈起

简言之，演绎逻辑是研究有效推理的学科，研究的方式是注重推理形式并构成演绎系统。推理形式由逻辑常项和变项组成，体现了推理的形式结构；演绎系统则能够从整体上处理一大类有效的推理。

在现代演绎逻辑的研究中，基础的逻辑是经典逻辑，包括经典命题逻辑和经典谓词逻辑。经典命题逻辑的变项是命题变项（亦称“语句变项”），用字母 p_1、p_2、p_3、…等表示；常项是逻辑联结词 $\neg$（否定词）、$\wedge$（合取词）、$\vee$（析取词）、$\rightarrow$（蕴涵词）和 $\leftrightarrow$（等值词），对应的日常联结词分别为“并非”、“并且”、“（兼容的）或者”、“如果……，那么……”和“当且仅当”。这些日常联结词对于日常推理的重要性是不言而喻的。

命题变项 p_1、p_2、p_3、…和逻辑联结词 $\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$ 根据形成规则可组合为合式公式，简称为公式，用字母 A、B、C、…表示任意的公式或自然语言中的语句（命题）。

经典逻辑的标准语义是真值语义（亦称“真值解释”），即通过真值表，将逻辑联结词都解释为“真值联结词”，这种解释方式只考虑真假，不考虑内容、意义方面的关联。以下是逻辑联结词 $\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$ 的真值解释，其中的 1 表示“真”，0 表示“假”，“真”和“假”统称为“真值”。

（1）否定词$\neg$的真值解释：

A	$\neg A$
1	0
0	1

这样解释的否定词称为“经典否定”或“布尔否定”（Boolean negation），它贴近日常联结词“并非”：当A为真时，“并非A”为假；当A为假时，“并非A”为真。

（2）合取词$\wedge$的真值解释：

A	B	$A\wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$A\wedge B$的真假，仅与A、B的真假有关，与A、B之间内容、意义方面的联系无关。然而，在自然语言中，“A并且B”这样的语句，通常是在A、B之间有内容、意义方面联系的情况下使用的。例如，通常不会说“铜是导体并且小王参加了篮球队”，因为在日常会话的很多场合，“铜是导体”与“小王参加了篮球队”没有内容、意义方面的关联。

（3）析取词$\vee$的真值解释：

A	B	$A\vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

这是“相容的析取”，当A、B同真时，$A\vee B$亦真。一个对应的自然语言实例（形式为“A或者B”）是：“今天下午他看书或者看报（看书与看报可以兼容）”，当今天下午他既看书也看报时，这句话也是真的。

$A\vee B$的真假，仅与A、B的真假有关，与A、B之间内容、意义方面的联系无关。然而，在自然语言中，“A或者B”这样的语句，通常是在A、B之间有内容、意义方面联系的情况下使用的。例如，通常不会说“小李比小张高或者雪是

白的”，因为在日常会话的很多场合，“小李比小张高”与“雪是白的”没有内容、意义方面的关联。

请注意：在自然语言中，还有“（不兼容的）或者”，它对应于“不相容的析取”（可表述为 $(A \vee B) \wedge \neg (A \wedge B)$），一个自然语言实例是：“这个自然数是奇数或者是偶数（但这个自然数不能既是奇数又是偶数）”。

（4）蕴涵词→的真值解释：

A	B	$A \rightarrow B$	
1	1	1	第一行
1	0	0	第二行
0	1	1	第三行
0	0	1	第四行

这样解释的蕴涵词称为“实质蕴涵”（material implication），有以下三个特点：

① 假命题蕴涵任何命题。这体现在上述真值表的第三、四行，当前件 A 为假时，无论后件 B 取值为真还是为假，蕴涵式 $A \rightarrow B$ 都是真的。

② 真命题被任何命题蕴涵。这体现在上述真值表的第一、三行，当后件 B 为真时，无论前件 A 取值为真还是为假，蕴涵式 $A \rightarrow B$ 都是真的。

③ 当前件 A 为真且后件 B 为假时，蕴涵式 $A \rightarrow B$ 为假。这体现在上述真值表的第二行。

实质蕴涵是条件词“如果……，那么……”在真假关系方面的一种逻辑抽象，没有顾及前件和后件之间内容、意义方面的联系，是否合理引起争议。对于实质蕴涵真值表的第二行没有异议，即特点③是对条件词的正确刻画。问题在于特点①②，它们与另三行有关，请看实例：

例 1.1.1： 如果 $2+3=5$，那么北京大学在北京。

例 1.1.2： 如果 $2+3\neq5$，那么北京大学在北京。

例 1.1.3： 如果 $2+3\neq5$，那么北京大学在上海。

上述实例分别对应实质蕴涵真值表的第一、三、四行，对应的蕴涵式 $A \rightarrow B$ 为真，但一般认为这些形式为“如果 A，那么 B”的语句是病句，是对条件词“如果……，那么……”的误用，因为 A 是一个数学命题，而 B 是现实生活中的一个事实命题，A 与 B 没有内容、意义方面的联系，A 不是 B 成立的条件。

当前件和后件有内容、意义方面联系的情况下（这意味着前件 A 是后件 B 成

立的条件)，实质蕴涵真值表是否合理？看来第一行会获得认可，那么第三、四行呢？请看以下两例：

例 1.1.4：如果我是隐身人，那么没有人能看到我。

例 1.1.5：如果我是隐身人，那么人人都能看到我。

它们是虚拟的条件句（subjunctive conditionals)，亦称为反事实条件句（counterfactuals)，其特点是：前件事实上是假的，并且前、后件之间有内容、意义上的联系。“隐身人”是科幻小说中虚构的对象，所谓“隐身人”即具有隐身功能、像空气一样透明、常人无法看到的人。现实生活中没有“隐身人”，条件句的前件“我是隐身人”事实上是假的，按照实质蕴涵真值表，上述两例对应的蕴涵式都为真。但从人们的语言实践来看，会认为例 1.1.4 为真，而例 1.1.5 为假。因为在实际生活中，人们的思维过程是这样的：首先假定（或设想）前件为真（尽管它事实上是假的)，即设想我的确成了隐身人，在前件为真的假定前提之下，可以断定“没有人能看到我”，即例 1.1.4 的后件为真，而不会是“人人都能看到我”，即例 1.1.5 的后件为假，换言之，这里使用的仍然是实质蕴涵真值表的前两行，而不是后两行。由此可见，实质蕴涵式与日常语言中的条件句有距离。

(5) 等值词↔的真值解释：

A	B	$A\leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

这样解释的等值词称为“实质等值”，特点是：$A\leftrightarrow B$ 为真，当且仅当 A 与 B 有同样的真假情况（真值相同)。日常语言中的“A 当且仅当 B”就是“‘如果 A，那么 B’并且‘如果 B，那么 A’”的意思，而实质等值式 $A\leftrightarrow B$ 没有顾及 A 与 B 之间内容、意义方面的联系，所以 $A\leftrightarrow B$ 与“A 当且仅当 B”有距离。

在五个真值联结词 ¬、∧、∨、→、↔之中，从 ¬、∨（或 ¬、∧，或 ¬、→）出发可定义其他三个真值联结词，进而可构成以 ¬、∨（或 ¬、∧，或 ¬、→）为初始联结词的经典命题逻辑系统。例如，以 ¬、∨ 为初始联结词，可构成形式语言 $\mathscr{L}_p$，并在 $\mathscr{L}_p$ 的基础上构建经典命题逻辑的公理系统 **P**。

定义 1.1.1：形式语言 $\mathscr{L}_p$ 由以下几个部分组成：

（1）初始符号：

〈i〉 p_1、p_2、p_3，…（可数个字母）；它们可解释为命题变项。我们约定：分别用 p、q、r 表示其中的 p_1、p_2、p_3。

〈ii〉 $\neg$、$\vee$；它们可分别解释为真值联结词“否定”和“析取”。

〈iii〉(、)；它们是“左括号”和“右括号”。

（2）形成规则：

〈i〉 p_i 是公式（$i=1, 2, 3, \cdots$）；

〈ii〉若 A、B 是公式，则 $\neg A$ 和（$A \vee B$）是公式。

以下用 A、B、C、D、E、A'、A_1、A_2，…表示任意的公式，除非有特别的说明。

（3）定义（A、B 是任意的公式）：

定义①：$(A \wedge B) =_{\mathrm{df}} \neg(\neg A \vee \neg B)$，$\wedge$ 可解释为真值联结词“合取”。

定义②：$(A \rightarrow B) =_{\mathrm{df}} (\neg A \vee B)$，$\rightarrow$ 可解释为真值联结词“实质蕴涵”。

定义③：$(A \leftrightarrow B) =_{\mathrm{df}} ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$，$\leftrightarrow$ 可解释为真值联结词“实质等值”。

上述定义中的左右两个公式的真值相同，其中的定义②清楚地显示了实质蕴涵的真值涵义：“A 实质蕴涵 B”就意味着“A 假或 B 真”。

为省略括号，在本书中作如下几条规定：

① 位于一个公式最外层的那对括号可省略，上述联结词的结合能力的强弱次序为：$\neg$ 最强，$\wedge$ 和 $\vee$ 其次，$\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 最弱。例如，公式 $((\neg p \wedge r) \leftrightarrow ((p \wedge \neg r) \rightarrow (q \vee r)))$ 可简写为 $\neg p \wedge r \leftrightarrow (p \wedge \neg r \rightarrow q \vee r)$。

② 公式 $(A_1 \wedge A_2) \wedge A_3$ 可简写为 $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$；一般地，公式 $(A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_{n-1}) \wedge A_n$（$n \geqslant 3$）可简写为 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_{n-1} \wedge A_n$。

③ 公式 $(A_1 \vee A_2) \vee A_3$ 可简写为 $A_1 \vee A_2 \vee A_3$；一般地，公式 $(A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_{n-1}) \vee A_n$（$n \geqslant 3$）可简写为 $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_{n-1} \vee A_n$。

定义 1.1.2：在形式语言 $\mathcal{L}_p$ 的基础之上，再添加下列公理和变形规则，即构成经典命题逻辑的公理系统 **P**：①

（1）公理（A、B、C 是任意的公式）：

公理 P1：$A \rightarrow (B \rightarrow A)$

① 公理和规则引自［Hamilton，1978，p. 28］。

公理 P2：$(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$

公理 P3：$(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow(B\rightarrow A)$

(2) 变形规则（A、B 是任意的公式）：

分离规则：由 A 和 $A\rightarrow B$ 可推出 B。

又如，以¬、∧为初始联结词，通过定义引入∨和→：$(A\vee B)=_{\mathrm{df}}\neg(\neg A\wedge\neg B)$，$(A\rightarrow B)=_{\mathrm{df}}\neg(A\wedge\neg B)$，采用定义 1.1.2 中的公理和变形规则，亦可构建经典命题逻辑的公理系统。上述定义中的左右两个公式的真值相同，其中的定义“$(A\rightarrow B)=_{\mathrm{df}}\neg(A\wedge\neg B)$”清楚地显示了实质蕴涵的真值涵义：“$A$ 实质蕴涵 B”就意味着“并非（A 真且 B 假）”。

再如，以¬、→为初始联结词，通过定义引入∧和∨：$(A\wedge B)=_{\mathrm{df}}\neg(A\rightarrow\neg B)$，$(A\vee B)=_{\mathrm{df}}(\neg A\rightarrow B)$，采用定义 1.1.2 中的公理和变形规则，同样可构建经典命题逻辑的公理系统。

我们约定：用 **S**、**S'**、…表示本书中的任意给定的一个形式系统。当 **S**、**S'**、…是公理系统时，则写明：公理系统 **S**、**S'**、…。

定义 1.1.3：设 **S** 是一公理系统，称公式 A 是系统 **S** 的一个“内定理”，当且仅当存在 **S** 中的公式序列 A_1，A_2，…，A_n（$n\geqslant 1$），使得 A_n 就是 A，并且每一个 A_i（$i=1$，2，…，n）都满足下列条件之一：

〈i〉A_i 是系统 **S** 的公理；

或 〈ii〉A_i 是由序列中在前的某一个或某两个公式运用系统 **S** 的某个变形规则推得的。

用记号“$\vdash_{\mathrm{S}}A$”表示公式 A 是公理系统 **S** 的一个内定理，并称公式序列 A_1，A_2，…，A_n 是内定理 A 的一个“长度为 n 的证明”。

由上述定义可知：公理系统 **S** 中的公理都是内定理，其证明长度为 1。若 $\vdash_{\mathrm{S}}A$，它的证明序列为 A_1，A_2，…，A_n（$n\geqslant 1$），则任何 A_m（$1\leqslant m\leqslant n$）都符合定义 1.1.3 的两个条件之一，序列 A_1，A_2，…，A_m 是 A_m 的一个“长度为 m 的证明”，于是有 $\vdash_{\mathrm{S}}A_m$（$m=1$，2，…，n）成立，即 $\vdash_{\mathrm{S}}A$ 的证明序列中的每一个公式都是系统 **S** 的内定理。显而易见，已经证得的内定理也可以作为证明的出发点，即由公理和已证内定理出发，运用变形规则推得的公式都是内定理。在本书中，推得的内定理都记作“定理××”。

与内定理不同，还有所谓“元定理”，它是对形式系统的某种特性的断定，如

本节中的“系统 **P** 的可靠性与完全性定理”、“系统 **P** 的一致性定理”等等。在本书中，凡元定理都以“命题××”的方式给出，比如下面的命题 1.1.1，是§1.1 节的第一个元定理。

定义 1.1.4: 称形式系统 **S** 是“一致的”，当且仅当不存在系统 **S** 中的公式 A，使得 A 和 $\neg A$ 都是系统 **S** 的内定理。“一致”也称为“相容”或“无矛盾”，一个形式系统是一致的，就意味着这个系统中推不出逻辑矛盾。

对于命题逻辑中的公式 A，在真值解释下（即 $\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$ 都解释为真值联结词），若 A 中的各个命题变项无论取值“真”还是“假”，A 都取值为“真”，则称 A 是重言式。

对于经典命题逻辑系统 **P**，有如下的重要结果：

命题 1.1.1（系统 **P** 的可靠性与完全性定理）：对于系统 **P** 中的任何公式 A，都有：$\vdash_P A$ 当且仅当 A 是重言式。即系统 **P** 的内定理都是重言式，反之亦然。①

命题 1.1.2（系统 **P** 的一致性定理）：系统 **P** 是一致的，即不存在系统 **P** 中的公式 A，使得 $\vdash_P A$ 且 $\vdash_P \neg A$。②

定义 1.1.5: 对于任意给定的一个形式系统 **S**，仍用记号“$\vdash_S A$”表示公式 A 是系统 **S** 的一个内定理，记 Th（**S**）为系统 **S** 中所有内定理的集合，即 Th（**S**）$=\{A: \vdash_S A\}$。对于任意给定的形式系统 **S** 和 **S'**，若 Th（**S**）$=$Th（**S'**），则称系统 **S** 等价于系统 **S'**，亦称 **S** 和 **S'** 是等价系统，记作：**S**=**S'**。

事实上，以不同方式构建的各种经典命题逻辑系统彼此等价，都是重言式系统。

对于经典命题逻辑，可以从不同的角度来解读。③

解读 1:

以 $\neg$、$\vee$ 为初始符号的经典命题逻辑系统（例如系统 **P**），无非是“排中律” $A\vee\neg A$ 或“广义排中律” $A\vee\neg A\vee B$ 的显现，因为其内定理（以初始符号表示）都可以转换为这两种形式。例如，根据定义 1.1.1 中的定义②，系统 **P** 的公理 P3

---

① 证明见［Hamilton，1978，pp. 38 - 43］。

② 证明见［Hamilton，1978，p. 39］。

③ 除了解读 1 和解读 2 之外，还可以根据经典命题逻辑的结构推理，将经典命题逻辑解读为容纳“结合”、“交换”、“收缩”和“弱化”四种结构规则的一种单调推理。经典命题逻辑的结构推理可参看［冯棉，2015，pp. 1 - 23］。

的实例“$(\neg p\rightarrow\neg q)\rightarrow(q\rightarrow p)$”可以转换为$\neg(\neg\neg p\vee\neg q)\vee(\neg q\vee p)$，再运用“双重否定律”和“$\vee$交换律”，转换为$(p\vee\neg q)\vee\neg(p\vee\neg q)$，它是$A\vee\neg A$的形式，其中的$A=p\vee\neg q$。

以$\neg$、$\wedge$为初始符号的经典命题逻辑系统，无非是“矛盾律”$\neg(A\wedge\neg A)$或“广义矛盾律”$\neg(A\wedge\neg A\wedge B)$的显现，因为其内定理（以初始符号表示）都可以转换为这两种形式。例如，根据$(A\rightarrow B)=_{\mathrm{df}}\neg(A\wedge\neg B)$，系统**P**的公理P1的实例“$p\rightarrow(q\rightarrow p)$”可以转换为$\neg(p\wedge\neg\neg(q\wedge\neg p))$，再运用“双重否定律”、“$\wedge$交换律”和“$\wedge$结合律”，转换为$\neg(p\wedge\neg p\wedge q)$，它是$\neg(A\wedge\neg A\wedge B)$的形式，其中的$A=p$，$B=q$。

鉴于$A\rightarrow B$等值于$\neg A\vee B$，亦等值于$\neg(A\wedge\neg B)$，以$\neg$、$\rightarrow$为初始符号的经典命题逻辑系统，通过符号的转换，将内定理中出现的$\rightarrow$符号均转换为$\neg$、$\vee$或$\neg$、$\wedge$，仍可以看成“排中律”、“广义排中律”或“矛盾律”、“广义矛盾律”的显现。

解读2：

对于经典命题逻辑系统中的内定理，当它是形式为$A\rightarrow B$的蕴涵式时，其主算子$\rightarrow$表示推理，即内定理$A\rightarrow B$意味着：“由前提A出发，可推出结论B”。而当内定理中的$\rightarrow$不是主算子时，它并不表示推理，须转换为$\neg$、$\vee$（或$\neg$、$\wedge$）。例如，保留作为主算子的$\rightarrow$符号，同时将非主算子的$\rightarrow$符号均转换为$\neg$、$\vee$，系统**P**的三条公理可这样解读：

公理P1“$A\rightarrow(B\rightarrow A)$”即$A\rightarrow\neg B\vee A$，它意味着：由前提$A$出发，可推出结论$\neg B\vee A$。

公理P2“$(A\rightarrow(B\rightarrow C))\rightarrow((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$”，即$\neg A\vee(\neg B\vee C)\rightarrow\neg(\neg A\vee B)\vee(\neg A\vee C)$，它意味着：由前提$\neg A\vee(\neg B\vee C)$出发，可推出结论$\neg(\neg A\vee B)\vee(\neg A\vee C)$。

公理P3“$(\neg A\rightarrow\neg B)\rightarrow(B\rightarrow A)$”即$\neg\neg A\vee\neg B\rightarrow\neg B\vee A$，它意味着：由前提$\neg\neg A\vee\neg B$出发，可推出结论$\neg B\vee A$。