



首都经济贸易大学出版基金资助

北京

(2014000020124G126)

BEL

CELIANG WUCHA MOXING DE
TONGJI TUIDUAN JIQI
ZAI KEKAOXING FENXI ZHONG DE
YINGYONG



BERKSON

**测量误差模型的
统计推断及其
在可靠性分析中的应用**

张赛茵 © 著



首都经济贸易大学出版社

Capital University of Economics and Business Press

学出版基金资助

资助项目 (2014000020124G126)

BEIJING



测量误差模型的 统计推断及其 在可靠性分析中的应用

张赛茵 © 著

 首都经济贸易大学出版社
Capital University of Economics and Business Press

· 北京 ·

图书在版编目(CIP)数据

Berkson 测量误差模型的统计推断及其在可靠性分析中的应用/张赛茵著. -- 北京:首都经济贸易大学出版社,2018.10

ISBN 978 - 7 - 5638 - 2848 - 7

I. ①B… II. ①张… III. ①测量误差—数据模型—统计推断—应用—可靠性数据—分析 IV. ①TB114.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 190464 号

Berkson 测量误差模型的统计推断及其在可靠性分析中的应用
张赛茵 著

责任编辑 刘欢 彭芳

封面设计



砚祥志远·激光照排

TEL: 010-65976003

出版发行 首都经济贸易大学出版社

地 址 北京市朝阳区红庙(邮编 100026)

电 话 (010)65976483 65065761 65071505(传真)

网 址 <http://www.sjmcb.com>

E-mail publish@cueb.edu.cn

经 销 全国新华书店

照 排 北京砚祥志远激光照排技术有限公司

印 刷 人民日报印刷厂

开 本 710 毫米×1000 毫米 1/16

字 数 140 千字

印 张 7

版 次 2018 年 10 月第 1 版 2018 年 10 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978 - 7 - 5638 - 2848 - 7/TB · 4

定 价 35.00 元

图书印装若有质量问题,本社负责调换
版权所有 侵权必究

前 言

本书主要介绍 Berkson 测量误差模型的统计推断及其在可靠性退化试验分析中的应用。众所周知,在 EV(error-in-variable)模型中假定协变量的真实值与其测量误差独立;若协变量的观测值与测量误差独立,则称为 Berkson 测量误差模型。这两种误差结构之间的差异导致参数估计与推断方法存在较大差异。Berkson 测量误差模型在工业、农业、流行病学、经济学等领域有广泛的应用。

随着现代科学技术的发展,产品的寿命越来越长。若按照传统的加速寿命试验技术进行产品的评估,往往难以在可行的时间内获得足够的失效数据,所以,加速退化试验成为一种越来越实用的可靠性分析方法。加速退化试验就是在高应力水平下收集退化数据,然后估计在正常使用条件下产品的可靠性。但是在许多情况下,在对产品施加高应力时,由于各种各样的原因,输出的应力会带有误差,此时应力的误差与设定的应力水平独立,这类误差就是 Berkson 测量误差。统计研究表明,忽略这些误差会导致效应参数的有偏估计,从而导致预测寿命出现偏差。

本书为两类退化试验建立了 Berkson 测量误差模型。首先,当退化数据独立时,即在破坏性加速退化试验的情况下,考虑了应力带有误差的 Berkson 测量误差模型,给出了模型中参数和各种可靠性指标的估计方法,推广了最小距离估计,并证明了所得估计的相合性和渐近正态性。其次,考虑了非破坏性加速退化试验。此时,退化数据是由产品随时间延长不断地测量而得到的退化量,是纵向数据。这种试验建立了应力带有误差的加速退化试验模型,给出了在应力个数固定时模型参数的估计方法。接下来,本书考虑了一类多元超结构 Berkson 测量误差模型,即协变量不是独立同分布的 Berkson 测量误差模型,给

出了该模型中参数的相合估计,推导了估计的渐近分布,并把该方法应用到了一元超结构 Berkson 测量误差模型中。最后,针对不同来源的几组相关数据集,研究了部分线性模型的加权似然推断问题,给出了加权似然估计的相合性和渐近正态性。模拟结果表明,在均方误差意义下,加权似然得到的估计优于经典的极大似然估计,并把新的估计方法应用到艾滋病临床试验数据分析中。

由于作者水平有限,疏漏与不足在所难免,恳请同行及广大读者批评指正。

目 录

1 绪论	1
1.1 常见的可靠性指标及其概率解释	1
1.2 退化数据与退化轨道	4
1.3 加速退化试验	7
1.4 统计模型及复杂数据集介绍	14
1.5 本书内容及结构	23
2 应力带有误差的破坏性加速退化试验分析	25
2.1 模型介绍	26
2.2 方法与主要结果	28
2.3 模拟研究	32
2.4 基于模拟的估计	35
2.5 实例分析	37
2.6 定理的证明	40
2.7 结束语	46
3 纵向数据下应力带有误差的加速退化试验分析	47
3.1 模型介绍	48
3.2 方法与主要结果	50
3.3 基于模拟的估计	52
3.4 模拟研究	52

3.5	定理的证明	55
3.6	结束语	59
4	多元超结构 Berkson 测量误差模型的分析	61
4.1	模型介绍	62
4.2	主要结果	63
4.3	模型简单应用	65
4.4	模拟研究	68
4.5	定理的证明	70
4.6	结束语	76
5	部分线性回归模型的加权似然推断	79
5.1	部分线性模型的加权似然	81
5.2	数值模拟及实例分析	85
5.3	结束语	87

1 绪论

Berkson 测量误差模型与经典 EV 模型的不同之处在于测量误差与可观测变量之间是相互独立的。Berkson 测量误差模型虽然看起来有些不可思议，但是在工业、医学和农业生产等领域中常常是一种合理的选择。

本书主要研究 Berkson 测量误差模型在可靠性中的应用，考虑了应力带有 Berkson 测量误差的加速退化试验模型，给出了寿命的估计，并分析了产品的各种可靠性指标。

下面首先对可靠性指标、退化数据、加速退化试验等可靠性中的知识进行简要介绍，然后对 EV 模型、Berkson 测量误差模型、纵向数据等进行简单回顾。

1.1 常见的可靠性指标及其概率解释

在工程中，为了定量描述产品的可靠性，通常采用一些数量指标。一方面，这些数量指标能够从某一角度反映产品的可靠性或寿命的状态，具有明确的工程意义；另一方面，它们具有概率统计方面的特征，可以用概率统计的方法对其进行统计推断。本节主要介绍在可靠性数据分析中常用的一些数量指标及它们的工程意义和统计特征。

1.1.1 可靠度和可靠寿命

产品的可靠度函数，简称可靠度，其定义是产品在规定的时间内和规定的条件下，完成规定功能的概率，通常记为 $R(t)$ ^①。把产品从处于完好状态开

①赵宇, 杨军, 马小军. 可靠性数据分析教程[M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2009.

始直到进入失效状态所经历的时间记为 ξ ，称它为产品的寿命。它是一非负随机变量，则概率 $R(t)$ 可表示为

$$R(t) = P(\xi > t) \quad (1.1)$$

产品的可靠度 $R(t)$ 是时间的函数，且满足 $0 \leq R(t) \leq 1$ 。开始使用时， $R(0) = 1$ ，即在零时刻产品总能正常工作；随着时间的增加，产品的可靠度越来越低，且 $\lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = 0$ 。

在可靠度的定义中，“规定的条件”应引起特别重视。它是指产品的使用条件，如环境条件、维护条件和操作技术等。同一产品在不同条件下工作，表现出不同的可靠性水平，不同工作条件下的数据不能简单地放在一起。例如，一辆汽车在水泥路和沙石路上行驶相同里程，后者故障会多于前者，说明使用条件越恶劣，可靠性越低。因此，不在规定条件下谈论可靠性就失去比较产品可靠性高低的基础。

$R(t)$ 可用频率的观点来解释。如 $R(500) = 0.95$ ，意味着如果有 1 000 件这样的产品工作 500h，则大约有 950 件能完成规定的功能，而大约有 50 件产品发生故障。产品的可靠度 $R(t)$ 表示产品在 t 时刻能正常工作的概率是多少。在工程中，有时要知道为保证产品正常工作的概率在某一水平 R 以上，产品可以工作多长时间，即根据

$$P(\xi > t) = R(t) = R$$

求相应的时间 t ，该时间称为可靠寿命 t_R 。可靠度 $R = 0.5$ 时的可靠寿命 $t_{0.5}$ 称为中位寿命，中位寿命反映了产品好坏各占一半可能性的工作时间。

1.1.2 失效分布函数

对于不同的产品，不同的工作条件，寿命 ξ 的统计规律不同。一种产品在一定工作条件下的寿命的规律可以用一个分布函数 $F(t)$ 来描述，即

$$F(t) = P(\xi \leq t) \quad t > 0 \quad (1.2)$$

它表示在规定的条件下，产品的寿命不超过 t 的概率，或者说产品在 t 时刻前发生失效的概率。在可靠性中，寿命 ξ 的分布函数 $F(t)$ 称为失效分布函数或寿命分布函数。 $F(t)$ 的推断是可靠性数据分析的核心问题。

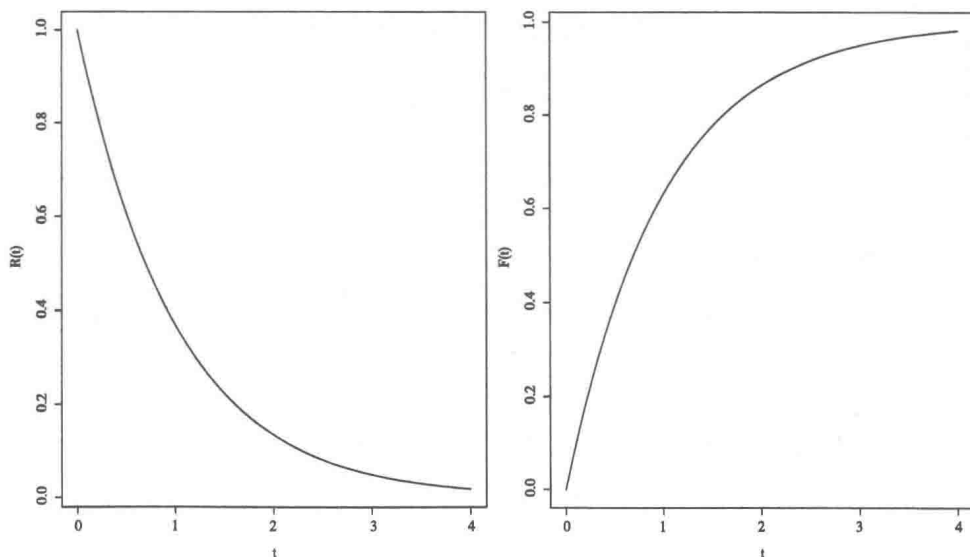


图 1.1 可靠度曲线 $R(t)$ 与分布函数曲线 $F(t)$

由式1.1和式1.2容易看出 $F(t)$ 与 $R(t)$ 之间的关系(如图1.1所示)

$$F(t) = 1 - R(t) \quad t > 0$$

因此, $F(t)$ 也称作产品在 t 时刻的不可靠度。当产品开始使用时,其不可靠度函数值很小;随着时间的增加,产品的不可靠度越来越高,且 $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$ 。

如果寿命 ξ 是连续型随机变量,则必存在函数 $f(t)$,使得

$$F(t) = \int_0^t f(x) dx \quad (1.3)$$

或者

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(x) dx \quad (1.4)$$

$f(t)$ 称为产品的失效密度函数。

1.1.3 平均寿命

产品的平均寿命是常用的产品可靠性指标之一,由于它直观易懂,常被大

家采用, 设产品寿命 ξ 的失效密度函数为 $f(t)$, 则它的数学期望

$$E(\xi) = \int_0^{\infty} tf(t)dt$$

称为产品的平均寿命^①。平均寿命是标志产品平均能工作多长时间的量。许多产品, 如电视机、计算机、雷达和电台等, 都可以用平均寿命作为其可靠性指标, 直观地了解它们的可靠性水平。

像灯泡、晶体管这类不可修复产品的平均寿命就是平均寿终时间, 或称平均失效前工作时间, 记为 MTTF (mean time to failure)。像雷达、电台这类可修复产品的平均寿命指的是平均故障间隔时间, 记为 MTBF (mean time between failure)。假如仅考虑首次失效前的一段工作时间, 那么两者就没有区别。

对于不完全样本, 其平均寿命的估计需要使用寿命分布的统计推断。

1.2 退化数据与退化轨道

目前, 大部分可靠性分析方法主要采用的是以失效数据作为统计分析对象的寿命试验, 但是随着现代科学技术的发展和工业水平的不断提高, 材料、元器件和制造工艺的改进速度得以加快, 在电子工业、航空航天、军事、通信工程、机械制造等领域中, 产品的可靠性越来越高, 寿命越来越长。若按照传统的寿命试验技术进行产品的寿命评估, 则往往难以在可行的时间内获得足够的失效数据。另外, 寿命试验只是将产品分为正常和失效两种状态, 但是在实践中, 产品非正常不一定就是失效的, 从正常到失效有一个连续的退化过程, 产品性能退化的数据包含着大量的寿命信息。于是, 人们提出利用产品性能退化数据来估计高可靠、长寿命产品的可靠性。

1.2.1 失效数据与退化数据

常见的寿命试验仅记录失效数据, 不太注意失效过程。如果我们注意观察失效过程就会发现: 不少产品的主要性能在失效前是逐渐退化的, 性能退化到一定程度就判为失效, 退化最终导致失效。这种失效过程又称退化过程。

有些退化过程是不能或不易测量的, 其功能丧失是突然的, 这种失效称为突发型失效。如白炽灯泡的灯丝断裂就是突发型失效。但有不少退化过程是可

^①菲诗松, 汤银才, 王玲玲. 可靠统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.

以设法测量的, 所得到的退化量称为退化数据 (degradation data)。由退化导致的失效称为退化型失效。例如, 重要设备所用的漆包线常处于 100°C 的容器内, 其绝缘电阻 R 会随着时间的延长而逐渐增高, 当高于某临界值 R_0 时就判为失效。这时漆包线的绝缘电阻的测量值就是退化数据, 只要有一定的仪器, 此类退化数据还是较易测量的, 并且随着时间的延长可以大量获得。把退化数据按时间顺序联结起来所得的曲线常称为退化曲线或退化轨道, 这是产品性能真实退化轨道的写照, 常记为 $D(t)$ 。退化曲线可以是增函数, 也可以是减函数。

退化曲线分为以下几种^①。

1.2.1.1 线性退化

线性退化的退化量的变化率(简称退化率)是常数, 即

$$D'(t) = \frac{d[D(t)]}{dt} = b$$

或

$$D(t) = a + bt$$

式中, $a = D(0)$ 。

有时退化量 $D(t)$ 并非 t 的线性函数, 但对 $D(t)$ 或时间 t 做某种变换后可得线性关系, 也都归入此类。最常见的是对数变换, 如

$$\ln D(t) = a + bt$$

$$D(t) = a + b \ln t$$

$$\ln D(t) = a + b \ln t$$

其中, $b > 0$ 得增函数, $b < 0$ 得减函数。线性退化在统计中有成熟的处理方法, 精度也较高, 所以线性退化轨道是人们首选的模型。例如, 某些材料的损耗量(如磨损量、腐蚀量等)常是 t 的线性函数。在大部分加速退化试验模型的分析中都考虑退化量与时间 t 的线性退化模型。

1.2.1.2 曲线退化

曲线退化有多种, 按退化率的正负来分, 退化曲线可分为以下两类。

^① 茆诗松, 汤银才, 王玲玲. 可靠性统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.

(1) 当退化率 $D'(t) > 0$ 时, $D(t)$ 称为增长退化曲线。增长退化也有两种方式:一种是增长退化先慢后快,如金属裂缝,开始一段时间内裂缝增长很缓慢,到一定时间后,裂缝增长越来越快,这种退化曲线呈下凸状,称为凸退化;另一种是增长退化先快后慢,称为凹退化。

(2) 当退化率 $D'(t) < 0$ 时, $D(t)$ 称为下降退化曲线。下降退化也有两种方式:一种是下降退化先快后慢,称为凸退化;另一种是下降退化先慢后快,称为凹退化。如某种绝缘材料的寿命是很长的,全新的绝缘材料在工作温度下要几千伏才能击穿,可随着时间延长,绝缘材料会老化(即退化),其击穿电压也随之下降。当下降到能被 2 kV 电压击穿时就认为材料失效。这种绝缘材料的退化开始很缓慢,且要维持很长一段时间后退化才会加快,其退化曲线呈凹曲线状。

无论哪一类退化曲线,最后都会到达失效状态。判断退化失效的标准称为失效水平,记为 D_f 。如上面提到的绝缘材料退化的失效水平 $D_f = 2\text{kV}$ 。其中, $D(t)$ 与 D_f 相交的时刻 t 就是失效时间。

1.2.2 退化中的波动

假如所有产品都在相同条件和相同环境下制造和使用,失效水平也相同,那么,根据物理的、化学的或工程的模型,其退化轨道应是相同的,失效时间也应该是一样的。可实际不是这样,这是因为建模时仅考虑了主要因子,那些次要因子、随机因子很难考虑进去,即使进入模型的因子,也会有随机波动,而模型外的因子有更多的随机波动。这些随机波动时隐时现,时大时小,时正时负,很难控制,最后综合地表现在退化曲线和失效时间上。因此,退化与波动总是相伴而行,没有波动的退化过程是不存在的。或者说,退化总是受到各种各样波动的干扰,所以要尽力排除干扰,寻找最接近实际的退化曲线。常见的波动有:①产品间的波动,如初始条件的差异、材料性能的波动、元件的形状和大小的差异;②产品内的波动,主要指材料不均匀、制造工艺不一致、元器件筛选不够而引起的波动。

除了上面所描述的材料特性的波动外,退化率还依赖于操作和环境条件。例如,在裂缝退化模型中外加应力大小对退化有影响,并且这种影响是随机的。

由上述分析可见,产品间和产品内的波动,以及产品所受应力的波动等过大,都可使最后的累积波动过大,以至于在退化数据与失效时间之间找不到对

应关系。因此,尽可能控制上述波动在退化试验中是很重要的。

退化过程中所发生的各种波动都可用随机变量及其分布描述。所谓控制,就是控制分布的均值和方差,特别要控制方差,越小越好,当方差为零时,波动就消失了。

本书主要分析了产品所受的应力因波动而对产品退化轨道的影响。

1.2.3 退化数据的测量

退化数据的测量有两种:一种是一个产品可随时间延长不断地测量其退化量,如疲劳裂缝增长的测量;另一种是破坏性测量,如测绝缘材料的击穿电压,一个产品只能测量一次,这时为了获得退化信息,就需要较多的产品投入试验。显然,退化数据个数与样品个数相同,虽然试验成本增加了,但退化数据间的独立性得到了保证。

本书在分析外界环境波动对产品退化轨道的影响时,不仅考虑了破坏性测量的情况,也考虑了非破坏性测量的情况。

1.3 加速退化试验

在一些退化问题中,产品的退化是缓慢进行的,有时要在很长时间内才能观察到细微的退化量,这时自然会想到提高某些应力的水平,促使退化加速进行。加速退化试验(accelerated degradation test, ADT)是在失效机理不变的条件下,通过提高应力水平加速产品性能退化,从而搜集产品在高应力下的性能数据,并利用这些数据来估计产品的可靠性及预测产品在正常使用应力下的寿命。进行加速退化试验的目的是通过将样品置于比通常使用条件更严酷的环境中进行试验,加速样品性能的退化,从而通过外推的方法得到产品在正常使用条件下的可靠性。相较于加速寿命试验,加速退化试验克服了仅记录产品失效时间,而忽略产品的失效机理、失效的具体过程以及产品的性能变化情况等方面的不足。此外,加速退化试验克服了试验时间和样品数量的限制。由于高可靠、长寿命产品的性能退化量在相当长的试验时间内变化微乎其微,若采用一般的退化试验对高可靠、长寿命产品进行可靠性分析,为了得到精度较高的统计推断,则需满足以下三个条件:①试验的时间足够长;②测量的次数足够多;③参加试验的样品个数足够多。

但是在工程实践中,这三个条件很难被同时满足。相较于一般的退化试验,加速退化试验可以弥补上述不足,并且能够缩短试验时间,节省试验费用。

加速退化试验模型是利用加速退化试验信息外推产品在正常应力水平下的各种可靠性指标。对于许多产品,特别是电子产品,其加速退化模型可以根据物理、化学原理得到。例如,当温度作为加速应力时,可以根据物理学的阿伦尼斯公式得到加速退化试验模型,公式如下

$$\frac{dM}{dt} = C \times \exp\left(\frac{-E}{kT}\right)$$

式中, t 为时间; M 为化学反应总量; T 为热力学温度; C 为常数; E 为激活能; E/k 又称激活温度, $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{J/K}$, 称为玻尔兹曼常数。

此时,热力学温度 T 为应力水平。给定高温 T 下的化学反应总量可以推出正常温度水平 T_0 下的化学反应总量,从而外推出这种电子产品的各种可靠性指标。

1.3.1 加速退化试验的类型

加速退化试验的类型很多,按照应力施加方式的不同,常用的有三种类型,即恒定应力加速退化试验(简称恒加试验)、步进应力加速退化试验(简称步加试验)和序进应力加速退化试验(简称序加试验)。

1.3.1.1 恒加试验

恒加试验是先选择一组加速应力水平 S_1, S_2, \dots, S_N , 它们都高于正常应力水平 S_0 , 即 $S_0 < S_1 < \dots < S_N$ 。然后,将全部样品随机分为 N 组,每组样品都在某个加速应力水平下进行退化试验,直到到达规定的试验时间为止。

1.3.1.2 步加试验

步加试验是先选定一组加速应力水平 S_1, S_2, \dots, S_N , 并要求 $S_0 < S_1 < \dots < S_N$ 。试验开始时,将所有的受试样品置于应力水平 S_1 下进行试验,直到到达规定的试验时间 τ_1 为止;然后把应力水平提高到 S_2 , 将未失效的样品在应力水平 S_2 下继续进行退化试验,如此继续下去,直到到达规定的试验时间为止。

1.3.1.3 序加试验

序加试验与步加试验基本相同,不同之处在于所施加的加速应力水平随着时间的增加而连续上升,最简单的是直线上升。

上述三种加速退化试验各有优缺点。首先,从试验持续时间来看,恒加试验所需试验时间最长,步加试验与序加试验可使样品退化更快;其次,步加试验与序加试验可以减少受试样品数;最后,从试验实施和试验数据处理来看,恒加试验操作方法简单,数据处理方法较为成熟,所以实践中经常采用。

本书只考虑了恒加试验中退化模型的分析,步加试验与序加试验将在今后的科研学习中继续讨论。

1.3.2 加速模型

加速退化试验的基本思想是利用高应力水平下的退化数据去外推正常应力水平下的寿命特征,实现这个基本思想的关键在于确定退化量与应力水平之间的关系。

在大部分加速退化试验模型的分析中均考虑退化量与时间 t 的线性退化模型^①,即

$$y = \alpha - \beta(S) t \quad (1.5)$$

式中, y 为某退化量或退化量取 \log 变换后的值; α 和 $\beta(S)$ 是与产品特征、几何形状、试验方法有关的常数, α 是退化量在 $t = 0$ 时刻的值,表示退化在初始 0 时刻是一样的, $\beta(S)$ 是加速应力 S 的函数。

当退化量 y 达到一定值 D_f 时产品失效, D_f 被称为失效水平,则可以推出失效时间为

$$t = (\alpha - D_f) / \beta(S) \quad (1.6)$$

在药理学中, D_f 是药品外包装标签上写的药品担保质量, t 是确保这个质量的保质期^②。

下面介绍几种常用的加速退化试验模型。

^①Nelson W. Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans, and Data Analyses[M]. New York: John Wiley, 1990.

^②Beal S L, Sheiner L B. Methodology of Population Pharmacokinetics[J]. Drug Fate and Metabolism: Methods and Techniques, 1985, 5: 135-183.

1.3.2.1 阿伦尼斯模型

在加速退化试验中用温度作为加速应力是最常见的,因为高温能使产品(如电子元器件、绝缘材料等)内部加快化学反应速度,促使产品快速失效。阿伦尼斯在1880年研究了这类化学反应,在大量数据的基础上,提出了如下加速模型

$$y = \alpha - t\beta \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \quad (1.7)$$

式中, β 为常数, E 为激活能,与材料有关,它的单位是电子伏特 eV ; k 为玻尔兹曼常数; T 为热力学温度。

阿伦尼斯模型表明:退化量随着温度的上升而呈指数下降趋势。当退化到达 D_f 时,失效时间为

$$t = \frac{\alpha - D_f}{\beta} \exp\left(\frac{E}{kT}\right)$$

这就是寿命的阿伦尼斯模型^①。

1.3.2.2 幂律模型

在加速退化试验中,用电应力(如电压、电流、电功率等)作为加速应力也是常见的。例如,加大电压能使产品快速退化。在物理上已被很多试验数据证实,产品的某些退化量与应力之间有如下关系

$$y = \alpha - t\beta\nu^\gamma \quad (1.8)$$

式中, β 是产品退化过程中的常数特征; γ 是一个与激活能有关的正常数; ν 是电应力,常取电压^②。

上述关系称为幂律(power)模型,当退化达到失效水平 D_f 时,失效时间是

$$t = \frac{\alpha - D_f}{\beta} \nu^{-\gamma}$$

这是寿命的逆幂律模型^③,它表示产品的寿命是电应力 ν 的负次幂函数。

① Vietl R. Statistical Method in Accelerated Life Testing[M]. Gottingan: Vandenhocck Ruprecht, 1988.

② Boothroyd G. Fundamentals of Metal Machining and Machine Tools[M]. New York: McGraw-Hill, 1975.

③ Levenbach G J. Accelerated Life Testing of Capacitors IRA-trans on Reliability and Quality Control[J]. Reliability and Quality Control, IRE Transactions on, 1957, 10: 9-20.