Continued Fraction

连分式概论

黄永龙 编著

四川出版集团·四川科学技术出版社

Continued Fraction

连分式概论

黄永龙 编著

四川出版集团·四川科学技术出版社

·成都·

图书在版编目(CIP)数据

连分式概论/黄永龙编著. — 成都:四川科学技术出版社,2012.12

ISBN 978-7-5364-7505-2

Ⅰ. ①连… Ⅱ. ①黄… Ⅲ. ①连分数—代数式—概论
Ⅳ. ①O173.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 251268 号

连 分 式 概 论

LIAN FEN SHI GAI LUN

编 著 者 黄永龙
责任编辑 肖 伊 陈敦和
封面设计 张维颖
责任校对 尧汝英
责任出版 邓一羽
出版发行 四川出版集团・四川科学技术出版社
成都市三洞桥路 12 号 邮政编码 610031
成品尺寸 185 mm×260 mm
印张 38.25 字数 1000 千
印 刷 四川机投印务有限公司
版 次 2012 年 12 月第一版
印 次 2012 年 12 月第一次印刷
定 价 178.00 元
ISBN 978-7-5364-7505-2

作者简介

黄永龙，1949 年 12 月 24 日生于四川省开江县，1968 年 2 月至 1995 年 8 月在军队工作。1977 年毕业于武汉水利电力学院农田水利专业（现已合并于武汉大学）。1996 年 7 月，毕业于中国人民解放军西安政治学院法律专业，本科学历。1978—1994 年，因技术革新成果显著，先后荣获全军、总后生产技术推广一、二、三等奖。1973 年 3 月至 1975 年 5 月，证明了自然无限连分数的基础定理成立；1975—1995 年，对解析对称理论与方法进行了基础性研究；1980—1996 年，对连分式基础理论进行了拓展性研究；1995—2000 年，对解析对称理论进行了创立与拓展性研究。

2007 年 8 月 1 日至 2008 年 6 月 30 日，将《对称法与哥德巴赫猜想》《数论与对称法》《解析对称方法》《关于对自然无限连分数的证明》《关于对平方根求解的证明》的文字作品在四川省版权局登记；2008 年，在《天府数学》杂志第 22 期发表《解析对称方法关于对哥德巴赫(C. Goldbach)两个命题的证明》《关于对立平方根求解的证明》《求解勾股数的新方法》。2009 年 4 月，与黄琼共同成立“成都循源科学技术研究所”。

2011 年 7 月，将数论专题研究论文集《圆法与对称》一书在四川出版集团·四川科学技术出版社出版。

内容简介

本书重点是介绍各种连分式理论与方法的形成与应用。全书共分九章，内容包括：连分式的基础理论、简单连分式、生成连分式、函数连分式、差式连分式、正规连分式、自然连分式、超越数与超越连分式、复杂连分式。在各章中又以介绍各种连分式的各种构造方法和各种计算方法与多种收敛方法为基础，系统介绍了应用连分式表示整数、分数、无理数、超越数等，还介绍了应用连分式求解级数、积分、特殊函数、多项式、不定方程、开立方等。

本书适用于各类大专院校的数学基础理论、计算数学、应用数学和软件设计等专业的研究人员及数学爱好者，也可供其他基础领域的研究人员参考。

前　言

《连分式概论》一书是作者长期对历史上的一些经典连分式理论进行拓展性研究，在创立多种连分式理论与方法的基础上归纳总结而形成的。《连分式概论》一书的基本思想就是根据连分式的基础理论与方法将比较少的连分式基础形式扩展为多种连分式基础形式，将比较单一的构造方法、计算方法、收敛方法扩展为多种方法。同时，将连分式的功能作用扩展到整数域、有理数域、无理数域、超越数域、复数域等。连分式理论与方法有着重要的意义。

在连分式理论与方法中最为重要的是连分式的基础理论。本书系统介绍了各种连分式的基础理论的形成与应用，并根据各种连分式的构造方法和基础条件及计算、收敛等与连分式"真值"的关联性，发现它们之间必然存在的基本规律，由此建立起各种连分式具有的 5 个条件，即在建立连分式的基础形式中，以能够确定连分式中各子元素的取值范围或各子元素为变量时是有规律可循的取值方法作为连分式具有的条件之一；在建立连分式的取项条件中，以应用构造方法能够知道或可推得连分式在范围内的全部子元素的"数"或"式"作为连分式具有的条件之二；在建立组合基数中，以对连分式能够进行有效计算和不能产生累计误差的收敛过程为基本条件来确定组合基数，作为连分式具有的条件之三；在建立计算方法中，以能应用数学归纳法并能获得证明且能适合连分式取项在范围内的全部渐近关系式作为连分式具有的条件之四；在建立收敛方法之中，以能够适应任何一个特定连分式的求解与证明的过程且必须要形成一个逐步接近连分式"真值"的过程，才能够达到对具体连分式所表示的"数"或"式"的解作为连分式具有的条件之五。这 5 个条件是各种连分式基础理论中的重要组成部分。各种连分式的基础理论是用于研究各种连分式中表示"真值"的全部子元素的形成与变化的基本规律的理论。

连分式理论中最为精彩的是连分式的"上升"与"下降"计算方法和"奇偶逼近"收敛理论。各种连分式中的计算方法与收敛过程是实现求解连分式"真值"的唯一途径，在各种连分式的基础形式条件下，通过计算方法所形成的奇偶逼近收敛方法，使连分式的"真值"在随着计算次数的增加而逐步逼近，在这种不产生累计误差的收敛方法中，深藏着有理逼近的基本规律，是其他任何收敛方法都不

可替代的，这种重要而深刻的收敛理论蕴藏着重要的应用意义。连分式理论的重要价值之一，在于它是现代计算科学的理论基础，能为计算科学实现高效准确的设计计算程序提供更多的基本方法，连分式中的计算方法能为计算科学提供重要的"算法"变换的数学理论基础，连分式的收敛过程是计算科学中所追求的最理想的"算法过程"和"算法结果"。

连分式理论中最值得拓展性应用研究的是复杂连分式的理论与方法。复杂连分式是将多个代数数、代数式或超越数、超越式分解成有限个或无限个相同或不相同的代数数、代数式或超越数、超越式表示成渐近递推形式，这是各种复杂连分式特有的基础形式。在各种复杂连分式的各子元素的形成过程中，将多种自身有着必然联系的子元素组合成递推形式，以此形成的多个相关联的条件及条件关系组合在一起，在求解各种"元素"的分解过程中，存在着递推渐近的基本规律。这个过程就是将多种问题条理化，复杂问题简单化，或者是将那些看起来形式简单，但却让人难以理解的问题具体化、清晰化，这即是复杂连分式的意义所在。在复杂连分式中应用多种计算方法与多种收敛方法，求解或求证复杂连分式所表示的综合结论或综合结果是复杂连分式存在的基本目的。各种复杂连分式的应用价值是值得深入研究的。

本书各章的内容都是以介绍各种连分式的基础理论与方法的形成作为基础，以介绍各种连分式的主要作用作为重点。在叙述各种连分式的理论与方法的建立过程中，都是根据基础形式与各子元素自然构成与变化的基本规律而展开的，论据充分，基础性很强。对所需要的研究人员能提供有效的参考。由于本书中的大部分内容是属于作者的原创理论与方法，很多研究成果还是第一次公开，随着这些理论与方法的不断发展与延伸，加之由于探索研究水平有限，难免会存在一些错误，欢迎读者批评指正。

黄永龙

2010 年 9 月 6 日

目 录

第 1 章　连分式的基础理论

连分式的基础理论是连分式形成与变换的基础，是对连分式求解与证明的主要理论. 每一个连分式的基本形式是依据在构造连分式的方法中所求解的相同或者是不相同的子元素，按照连分式的递推连接方法进行连接而形成的序列. 这种连分式形式所表示的意义在于将一些"数"与"式"进行细化，形成表示某个"数"与"式"的有限个或无限个子元素，然后运用递推渐近的计算方法，对这些子元素进行逐项计算或者证明，在对其求解与证明之中就形成了收敛性与简化或变换的过程，这个收敛性与简化或变换的过程经过进一步归纳论证就形成了连分式的基础理论.

连分式的基础理论是用于研究连分式中全部子元素的形成与变化的基本规律的理论. 包括构造方法、基础形式与条件、组合基数、计算方法、收敛方法、连分式的等价关系与变换、连分式的基本运算与应用等内容.

1.1　引　言

连分式是一个历史久远且发展比较缓慢的数学分支. 从两千多年前，由欧几里得(Euclid) 提出辗转相除法以后，人们基本上就找到了构造有限简单连分式的方法，即用

$$\begin{gathered}A=a_0b+t_0\\ b=a_1t_0+t_1\\ t_0=a_2t_1+t_2\\ t_1=a_3t_2+t_3\\ \vdots\\ t_{n-3}=a_{n-1}t_{n-2}+t_{n-1},(n\geqslant 3)\end{gathered}$$

的辗转相除法将 A/b 构造成

$$a_0+\frac{1}{a_1}\,{}_{+}\,\frac{1}{a_2}\,{}_{+}\,\frac{1}{a_3}\,{}_{+}\cdots=\frac{A}{b}$$

人类沿用这一古典连分式的方法持续了近两千年的时间. 1572 年，意大利的工程师、数学家邦贝利(Bombelli) 首次提出利用连分式近似地表示无理数$\sqrt{13}$：

$$\sqrt{13}=3+\frac{4}{6}\,{}_{+}\,\frac{4}{6}\,{}_{+}\,\frac{4}{6}\,{}_{+}\cdots$$

1613 年，印度数学家卡塔尔迪(Cataldi R.) 提出利用连分式近似地表示无理数$\sqrt{18}$：

$$\sqrt{18}=4+\frac{2}{8}\,+\frac{2}{8}\,+\frac{2}{8}\,+\cdots$$

由于当时这种连分式的相关理论与方法还不成熟,致使上述比较好的方法未能得到拓展.到了17世纪中叶,荷兰数学家、物理学家、天文学家惠更斯(Huygens)首次将连分式的收敛理论用于解决有理数逼近的问题,推动了对无穷小分析及应用的研究.1650年,朗博特(Lambert)首次用无限简单连分式表示特殊函数,即

$$P+\frac{1}{3P}\,+\frac{1}{5P}\,+\frac{1}{7P}\,+\frac{1}{9P}\,+\cdots=P+\sum_{\substack{r=1,n=1\\a_0=P}}^{\infty}\frac{1}{|(2n+1)P+}=\frac{e^{\frac{2}{P}}+1}{e^{\frac{2}{P}}-1}$$

1737年,著名数学家欧拉(Euler)提出用无限简单连分式表示二次无理数,即

$$[a_0,\overline{a_0,a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n}]=[a_n,\overline{a_{n+1},a_{n+2},a_{n+3},\cdots,a_{n+m}}]$$

且有共轭数.1760年,拉克朗日(Lagrange)提出无限简单连分式可以表示二次不可约方程根,即

$$ax^2+bx+c=0(b^2-4ac>0,\text{且不是完全平方数})$$

可表示成

$$[a_0,\overline{a_0,a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n}]\quad(n\geqslant 1)$$

1828年,伽罗华(Galois)提出了将部分二次无理数可以表示成纯周期无限简单连分式,即

$$[a_0,\overline{a_0,a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n}]=[a_n,\overline{a_{n+1},a_{n+2},a_{n+3},\cdots,a_{n+m}}]$$

且有共轭数.到了1893年,勒让德(Legendre)证明每个大于1的非完全平方的有理数的平方根可以表示成拟纯周期连分式.即用

$$a_n=\frac{P_n+\sqrt{D}}{q_n}$$

的方法逐次进行试算,将$\sqrt{D}$表示成无限简单连分式,即

$$\sqrt{D}=a_0+\frac{1}{a_1}\,+\frac{1}{a_2}\,+\frac{1}{a_3}\,+\cdots=a_0+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{|[a_0,\overline{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n}]_r+}\quad(n\geqslant 1)$$

历史上很多著名的数学家对简单连分式的深刻研究成果,极大地丰富了简单连分式理论.在那个时期,简单连分式的理论体系已基本形成.可以说,简单连分式的发展过程是一个既曲折又久远的发展过程.

最早发现和应用正规连分式是在1650年,数学家洛德尔·布龙克尔首次利用代数插值方法,将

$$\frac{\prod_{G=1}^{\infty}G_r^2}{\prod_{Q=1}^{\infty}Q_r^2}$$

构造成固定连分式,其中分母部分的子元素为2,分子部分的子元素设定为变量数$(2n+1)^2$,其变化规律随着连分式的递推次数增加而变化,即

$$\frac{\prod\limits_{G=1}^{\infty} G_r^2}{\prod\limits_{Q=1}^{\infty} Q_r^2}=1+\frac{1}{2}\,+\frac{3^2}{2}\,+\frac{5^2}{2}\,+\frac{7^2}{2}\,+\frac{9^2}{2}\,+\cdots=1+\sum_{r=1,n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)_r^2|}{|\;2+}=\frac{4}{\pi}$$

此种变量连分式的结果为把连分式用于将复杂与特定的函数和连分式的子元素表示成规律变量提供了理论基础.

1935 年,日本长泽龟子助编著的《代数学辞典》中介绍了连分式中的分子部分与分母部分的子元素都为变量的或者是不相等的数的基础形式,即

$$a_0+\frac{b_1}{a_1}\,+\frac{b_2}{a_2}\,+\frac{b_3}{a_3}\,+\cdots=a_0+\sum_{r=1}^{n}\frac{b_r\,|}{|a_r+}\quad(3\leqslant n\leqslant\infty)$$

并依据该连分式的基础形式给出了渐近关系式

$$P_n=a_{n-1}P_{n-1}+b_{n-1}P_{n-2}$$

$$q_n=a_{n-1}q_{n-1}+b_{n-1}q_{n-2}$$

在此基础上,还给出连分式中分母部分与分子部分的子元素都为规律变量数的特定基础形式,即

$$\frac{1}{1}\,+\frac{2}{2}\,+\frac{3}{3}\,+\frac{4}{4}\,+\cdots=\sum_{r=1}^{\infty}\frac{b_r\,|}{|a_r+}=\frac{1}{\mathrm{e}-1}$$

同时,还为纯循环连分式的直接上升计算方法提供了理论基础,即

$$\frac{b}{a}\,+\frac{b}{a}\,+\frac{b}{a}\,+\frac{b}{a}\,+\cdots=\sum_{r=1}^{n}\frac{b\,|}{|a+}\quad(3\leqslant n\leqslant\infty)$$

其渐近关系为

$$\begin{cases}P_n=bq_{n-1}\\ q_n=aq_{n-1}+P_{n-1}\end{cases}$$

从 1973 年初,作者就发现有自然连分式、自生连分式、原生连分式、生成连分式存在,并在 1975—1980 年期间,相继证明了自然连分式、自生连分式、原生连分式、生成连分式的成立. 在 1980—1995 年间,开始对上述几种连分式的应用进行拓展性研究. 这几种新连分式的成立,主要是首先发现有构造这几种连分式的基本方法,并证明渐近递推式中的 $3\leqslant n\leqslant\infty$ 时,其收敛性与连分式的“真值”且满足这几种构造连分式的基础条件式的解. 具体的构造方法是:

构造自然连分式的方法为　$f(x)=\dfrac{b}{a+f(x)\to\infty}$

构造自生连分式的方法为　$f(x)=a+\dfrac{b}{f(x)\to\infty}+\dfrac{b}{f(x)\to\infty}$

构造原生连分式的方法为　$f(x)=a+\dfrac{b}{f(x)\to\infty}$

构造生成连分式的方法为　$f(x)=a+\dfrac{b}{a+f(x)\to\infty}$

在各种构造方法的基础上,利用直接上升计算方法分别给出几种连分式的渐近关系式,

即

$$\frac{P_n}{q_n}=\frac{bq_{n-1}}{aq_{n-1}+P_{n-1}}\quad（自然连分式渐近式）$$

$$a+2\frac{P_n}{q_n}=a+2\frac{bq_{n-1}}{aq_{n-1}+P_{n-1}}\quad（自生连分式渐近式）$$

$$a+\frac{P_n}{q_n}=a+\frac{bq_{n-1}}{aq_{n-1}+P_{n-1}}\quad（原生连分式渐近式）$$

$$a+\frac{P_n}{q_n}=a+\frac{bq_{n-1}}{2aq_{n-1}+P_{n-1}}\quad（生成连分式渐近式）$$

在构造方法与计算方法相匹配的基础上，给出了几种连分式的基础结果式，即

自然连分式基础表达式：

$$\frac{b}{a}\ +\frac{b}{a}\ +\frac{b}{a}\ +\frac{b}{a}\ +\cdots=\sum_{\substack{r=1\\(a>0,b>0)}}^{\infty}\left(\frac{b\,|}{|a+}\right)_r=\frac{(a^2+4b)^{\frac{1}{2}}-a}{2}$$

自生连分式基础表达式：

$$a+2\left(\frac{b}{a}\ +\frac{b}{a}\ +\frac{b}{a}\ +\cdots\right)=a+2\sum_{\substack{r=1\\(a>0,b>0)}}^{\infty}\left(\frac{b\,|}{|a+}\right)_r=(a^2+4b)^{\frac{1}{2}}$$

原生连分式基础表达式：

$$a+\frac{b}{a}\ +\frac{b}{a}\ +\frac{b}{a}\ +\frac{b}{a}\ +\cdots=a+\sum_{\substack{r=1\\(a>0,b>0)}}^{\infty}\left(\frac{b\,|}{|a+}\right)_r=\frac{(a^2+4b)^{\frac{1}{2}}+a}{2}$$

生成连分式基础表达式：

$$a+\frac{b}{2a}\ +\frac{b}{2a}\ +\frac{b}{2a}\ +\frac{b}{2a}\ +\cdots=a+\sum_{\substack{r=1\\(a>0,b>0)}}^{\infty}\left(\frac{b\,|}{|2a+}\right)_r=(a^2+b)^{\frac{1}{2}}$$

其中，自然连分式与原生连分式分别是求解二次方程根的一种新方法，自生连分式与生成连分式是求解平方根的一种新方法，也是求解平方根的根本方法，能有效解决直接上升递推计算方法的应用问题. 与此同时，还建立了以基础形式、连分式的全部子元素、组合基数、计算方法、收敛效果作为连分式必备的五个条件，并以缺一不可的条件作为对某个特定连分式的判定方法. 同时，还建立了复杂连分式.

复杂自然连分式形式：

$$\frac{\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{c\,|}{|d+}\right)_r}{\left[a+\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{b\,|}{|a+}\right)_r\right]}+\frac{\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{c\,|}{|d+}\right)_r}{\left[a+\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{b\,|}{|a+}\right)_r\right]}+\frac{\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{c\,|}{|d+}\right)_r}{\left[a+\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{b\,|}{|a+}\right)_r\right]}+\cdots=$$

$$\sum_{\substack{r=1\\(a>0,b>0)\\(c>0,d>0)}}^{\infty}\left\{\frac{\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{c\,|}{|d+}\right)_r\ \Big|}{\Big|\left[a+\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{b\,|}{|a+}\right)_r\right]+}\right\}_r$$

复杂自生连分式形式：

$$\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{b\,|}{|a+}\right)_r+2\left[\frac{d+\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{c\,|}{|d+}\right)_r}{\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{b\,|}{|a+}\right)_r+}\;\frac{d+\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{c\,|}{|d+}\right)_r}{\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{b\,|}{|a+}\right)_r+}\;\frac{d+\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{c\,|}{|d+}\right)_r}{\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{b\,|}{|a+}\right)_r+\cdots}\right]$$

$$=\sum_{\substack{r=1\\(a>0,b>0)}}^{\infty}\left(\frac{b\,|}{|a+}\right)_r+2\sum_{\substack{r=1\\(c>0,d>0)}}^{\infty}\left[\frac{d+\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{c\,|}{|d+}\right)_r\,\Big|}{\Big|\,\Big|\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{b\,|}{|a+}\right)_r+}\right]_r$$

复杂原生连分式形式:

$$a+\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{b\,|}{|a+}\right)_r+\frac{d+2\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{c\,|}{|d+}\right)_r}{a+\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{b\,|}{|a+}\right)_r+}\;\frac{d+2\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{c\,|}{|d+}\right)_r}{a+\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{b\,|}{|a+}\right)_r+}\;\frac{d+2\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{c\,|}{|d+}\right)_r}{a+\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{b\,|}{|a+}\right)_r+\cdots}$$

$$=a+\sum_{\substack{r=1\\(a>0,b>0)}}^{\infty}\left(\frac{b\,|}{|a+}\right)_r+\sum_{\substack{r=1\\(c>0,d>0)}}^{\infty}\left\{\frac{d+2\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{c\,|}{|d+}\right)_r\,\Big|}{\Big|\left[a+\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{b\,|}{|a+}\right)_r\right]+}\right\}_r$$

复杂生成连分式形式:

$$a+2\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{b\,|}{|a+}\right)_r+\frac{\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{c\,|}{|d+}\right)_r}{2\left[a+2\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{b\,|}{|a+}\right)_r\right]+}\;\frac{\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{c\,|}{|d+}\right)_r}{2\left[a+2\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{b\,|}{|a+}\right)_r\right]+\cdots}$$

$$=a+2\sum_{\substack{r=1\\(a>0,b>0)}}^{\infty}\left(\frac{b\,|}{|a+}\right)_r+\sum_{\substack{r=1\\(a>0,b>0)\\(c>0,d>0)}}^{\infty}\left\{\frac{\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{c\,|}{|d+}\right)_r\,\Big|}{\Big|2\left[a+2\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{b\,|}{|a+}\right)_r\right]+}\right\}_r$$

以上四种复杂连分式形式都是以纯循环形式出现的.

复杂正规连分式形式:

$$a_0+\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{b_0\,|}{|a_0+}\right)_r+\frac{f(x_1)}{a_1+\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{b_1\,|}{|a_1+}\right)_r+}\;\frac{f(x_2)}{a_2+\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{b_2\,|}{|a_2+}\right)_r+}\;\frac{f(x_3)}{a_3+\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{b_3\,|}{|a_3+}\right)_r+\cdots}$$

$$=a_0+\sum_{\substack{r=1\\(a>0,b>0)}}^{\infty}\left(\frac{b_0\,|}{|a_0+}\right)_r+\sum_{\substack{r=1\\(3\leqslant n\leqslant\infty)}}^{N}\left\{\frac{f(x_r)\,\Big|}{\Big|\left[a_r+\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{b_r\,|}{|a_r+}\right)_r\right]+}\right\}_r$$

在复杂正规连分式中,分子部分与分母部分中的子元素都是不断变化的数字. 当这种变化数字在有限连分式中时,子元素的变化可以是没有规律的,只要满足连分式的基础条件即可;当在无限正规连分式中时,则子元素的变化一定是有规律可循的,否则就不能满足连分式的基本条件. 复杂正规连分式一般在无限条件下,在子元素都为规律变量时,所表示的都

是超越数或者是复杂的特殊函数. 同时，还建立了系列超越连分式，即

$$a+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots=a+\sum_{\substack{r=1\\(D_r,N_r=1,2,3,\cdots)}}^{\infty}\frac{N_r\mid}{\mid D_r+}\ (a\geqslant 1,\text{为自然数})$$

和

$$d+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{2(2n+1)}+\cdots$$
$$=d+\sum_{\substack{r=1\\(a_0=2)}}^{\infty}\frac{1\mid}{\mid(a_{n-1}+4)_r+}\ (d\geqslant 1,\text{为自然数})$$

这种用无限简单连分式的形式表示超越数的基础形式是比较少的，因为简单连分式的分子部分中的子元素都是固定数，当设定规律变量时，只能在简单连分式分母部分中的子元素里去考虑，这样与用正规连分式表示超越数相比是要用得少一些.

正规变量连分式，即

$$a_0+\frac{2}{2}+\frac{3}{3}+\frac{4}{4}+\cdots=a_0+\sum_{\substack{r=1\\(a_r,b_r=2,3,\cdots)}}^{\infty}\frac{b_r\mid}{\mid a_r+}\ (a_0\geqslant 1,\text{为自然数})$$

$$d+\frac{1}{1}+\frac{4}{4}+\frac{9}{9}+\frac{16}{16}+\frac{25}{25}+\frac{49}{49}+\cdots=d+\sum_{\substack{r=1\\(D_r,N_r=1^2,2^2,\cdots)}}^{\infty}\frac{N_r^2\mid}{\mid D_r^2+}\ (d\geqslant 1,\text{为自然数})$$

所表示的为一系列超越数. 同时建立了前缀连分式，即

$$\frac{a}{1}+\frac{1}{2}+\frac{3^2}{2}+\frac{5^2}{2}+\frac{7^2}{2}+\cdots=\frac{a\mid}{\mid 1+}\sum_{r=1,n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^2\mid}{\mid 2+}\ (a\geqslant 1,\text{为自然数})$$

$$\frac{a}{2}+\frac{2}{2}+\frac{3}{3}+\frac{4}{4}+\frac{5}{5}+\cdots=\frac{a\mid}{\mid 2+}\sum_{\substack{r=1\\(D_r,N_r=2,3,4\cdots)}}^{\infty}\frac{N_r\mid}{\mid D_r+}\ (a\geqslant 1,\text{为自然数})$$

这些新建立的连分式和其中的理论与方法，能够极大地丰富连分式理论. 我们应用这些新的理论与方法的主要目的就是拓展其应用意义. 大家知道，连分式的收敛方法是最有效的收敛方法之一，把这种收敛方法用于计算科学之中，必将起到准确快速的作用. 同时，在实际应用中注重对现有连分式的理论与方法进行变换性的应用研究，推导出更多统一合并性的化简公式，以备需时之用. 如

$$\left[2+\sum_{r=1,a_0=2}^{\infty}\frac{1\mid}{\mid(a_{n-1}+4)_r+}\right]\left[1+\sum_{\substack{r=1\\(D_r,N_r=2,3,\cdots)}}^{\infty}\frac{N_r\mid}{\mid D_r+}\right]=3+\sum_{\substack{r=1\\(D_r,N_r=2,3,\cdots)}}^{\infty}\frac{N_r\mid}{\mid D_r+}$$

$$\left\{\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{1}{(2n)^2}\right]}\right\}^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{G=1}^{\infty}\frac{1}{G^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{4\mid}{\mid 1_r+}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)^2\mid}{\mid 2+}}{2+\sum\limits_{r=1}^{\infty}\frac{4\mid}{\mid 4+}}$$

1.2 连分式的基本内容

连分式基本内容的确定，是按照人们在现有阶段已经创立的连分式种类和人们已经掌

握的连分式理论与方法的基础上而概括出来的. 连分式的基本内容主要有连分式分类、连分式定义、连分式基本条件、计算方法中的组合形式、连分式的等价关系等.

1.2.1　连分式分类

- 连分式
  - 下降递推连分式
    - 简单连分式
      - 有限简单连分式
      - 无限简单连分式
      - 特定无限简单连分式
      - 简单前缀连分式
    - 直接下降连分式 ⇒ 一致收敛连分式
    - 正规连分式
      - 有限正规连分式
      - 无限正规连分式
      - 特殊正规连分式
      - 正规前缀连分式
  - 上升递推连分式
    - 自然连分式
      - 有限自然连分式
      - 无限自然连分式
    - 自生连分式
      - 有限自生连分式
      - 无限自生连分式
    - 原生连分式
      - 有限原生连分式
      - 无限原生连分式
    - 生成连分式
      - 有限生成连分式
      - 无限生成连分式
  - 多种形式连分式
    - 函数连分式
      - 函数自然连分式
      - 函数自生连分式
      - 函数原生连分式
      - 函数生成连分式
    - 复杂连分式
      - 复杂自然连分式
      - 复杂自生连分式
      - 复杂原生连分式
      - 复杂生成连分式
  - 特定形式连分式
    - 超越连分式
      - 正则超越连分式
      - 主项超越连分式
      - 前缀超越连分式
    - 变换组成连分式 ⇒ 变换形成连分式
    - 特殊组合连分式
      - (1,1) 组合连分式
      - (1,0) 组合连分式
      - (0,0) 组合连分式